







ECKERT-LORENZ.

LEHRBUCH
der
FORSTWIRTSCHAFT

für Waldbau- und Försterschulen

sowie zum ersten forstlichen Unterrichte für Aspiranten des Forstverwaltungsdienstes.

III. AUFLAGE.

Herausgegeben von

Heinrich Ritter Lorenz von Liburnau,

k. k. Forstmeister im Ackerbau-Ministerium, Honorardozent an der k. k. Hochschule für Bodenkultur in Wien.

WIEN.

Verlag von Wilhelm Frick, k. u. k. Hofbuchhandlung.

1908.

Lehrbuch der Forstwirtschaft.

III. Auflage.

I. BAND.

Einleitung, ferner die grundlegenden mathematischen Gegenstände.

Mit 334 Figuren im Texte.

Herausgegeben von

Heinrich Ritter Lorenz von Liburnau,

k. k. Forstmeister im Ackerbau-Ministerium, Honorardozent an der k. k. Hochschule für Bodenkultur in Wien.

Mitarbeiter der I. und II. Auflage: F. ECKERT, k. k. Forst- und Domänen-Verwalter, emer. Direktor der Waldbauschule in Aggsbach; A. G. RUŽIČKA, gräflich Chorinskyscher Forstmeister, emer. Direktor derselben Waldbauschule; Dr. N. v. LORENZ-LIBURNAU, k. k. Adjunkt der forstlichen Versuchsanstalt in Mariabrunn; M. KREIBICH, k. k. Forstrat; endlich der gegenwärtige HERAUSGEBER. — Mitarbeiter der III. Auflage: E. BITTERLICH, k. k. Forst- und Domänen-Verwalter, und der HERAUSGEBER.

WIEN.
Verlag von Wilhelm Frick, k. u. k. Hofbuchhandlung.
1908.

K. u. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme in Wien.

Vorwort zur dritten Auflage.

Indem ich das „Lehrbuch der Forstwirtschaft" — zunächst den I. Band — in dritter Auflage der Öffentlichkeit übergebe, darf ich wohl mit Befriedigung auf die günstige Aufnahme zurückblicken, welche das Werk in seiner zweiten Auflage sowohl seitens der Kritik als seitens jener Kreise gefunden hat, die es als Lehr- oder Nachschlagebuch benützen. Diese Aufnahme hat in mir die Überzeugung gestärkt, daß das Werk im wesentlichen unverändert in dritter Auflage erscheinen solle, zumal diese der gründlich bearbeiteten zweiten Auflage nach kaum 5 Jahren folgen mußte. Immerhin wurde der gesamte Text für die vorliegende dritte Auflage auch sachlich sorgfältig revidiert und im Detail so manches ergänzt, beziehungsweise verbessert, was allerdings vielfach nur dem sorgfältig vergleichenden Leser auffallen dürfte.

Daß das „Lehrbuch der Forstwirtschaft" trotz der in den letzten Jahren eingetretenen Steigerung der Druckkosten in der vorliegenden dritten Auflage um denselben relativ geringen Preis im Buchhandel erhältlich sein wird, wie in der zweiten Auflage, ist hauptsächlich der Förderung zu danken, welche das k. k. Ackerbauministerium dem Werke in munifizenter Weise durch abermalige Gewährung einer Subvention an den Verleger zuteil werden ließ. Ich erlaube mir deshalb — auch im Namen der Verlagsbuchhandlung — der genannten hohen Zentralstelle, in welcher die Herren Ministerialräte Artur Heidler und Friedrich Ritter v. Zimmerauer als Fachreferenten die Gemeinnützigkeit des Werkes wohlwollend anerkannt haben, hiemit den ehrerbietigsten Dank abzustatten.

Über die Grundsätze, welche bei Herausgabe dieses Lehrbuches überhaupt und des vorliegenden I. Bandes im besonderen maßgebend waren, dann über das Ausmaß, in welchem sich jeder einzelne der am Titelblatte genannten Mitarbeiter um Band I in den früheren Auflagen verdient gemacht hat, gibt das im folgenden unverändert aufgenommene Vorwort zur zweiten Auflage Aufschluß.

Die Revision und Verbesserung der Korrekturbogen für die dritte Auflage haben bei Band I Herr k. k. Forst- und Domänenverwalter Ernst Bitterlich und der Herausgeber im gleichen Maße besorgt.

Meine am Schlusse des Vorwortes zur zweiten Auflage ausgesprochene Bitte hat seitens der beteiligten Kreise, wie ich dankbar feststellen kann, Erfüllung gefunden. Möchte nun auch der dritten Auflage die gleiche wohlwollende Aufnahme zuteil werden.

Wien, im September 1907.

H. v. Lorenz.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Nicht ohne Bedenken bin ich an die Herausgabe einer zweiten Auflage dieses Lehrbuches gegangen. Standen doch den in verschiedenen Berichten forstlicher Zeitschriften über die erste Auflage enthaltenen rückhaltlosen Zustimmungen auch einzelne Äußerungen gegenüber, denen zufolge das Werk nach Anlage und Umfang weitgehende Abänderungen hätte erfahren sollen, deren Durchführung fast einer Neuschaffung gleichgekommen wäre. Hier ist nicht die Stelle, auf alle diesbezüglich zutage getretenen einzelnen Ansichten näher einzugehen, sondern es sollen nur die Gründe angegeben werden, welche den gefertigten Herausgeber veranlaßt haben, in der Hauptsache die Grundzüge sowie den Umfang der ersten Auflage auch bei der vorliegenden zweiten beizubehalten und nur im einzelnen allerdings zahlreiche und zum Teil weitgehende Verbesserungen und Ergänzungen eintreten zu lassen.

Das Gerippe des Werkes war im allgemeinen durch die Lehrpläne der Waldbau- und Försterschulen vorgezeichnet, für welche es nach den Intentionen seines Gründers, des leider viel zu früh verstorbenen k. k. Forst- und Domänenverwalters Franz Eckert, in erster Linie als Lehr- und Lernbehelf dienen soll. Da aber die Lehrpläne dieser Schulen keine einheitlichen sind und namentlich mit Rücksicht auf die gerade in Österreich sehr verschiedenartige spätere Verwendung der Absolventen solcher Schulen eine engere oder weitere Begrenzung des Lehrstoffes aufweisen, so mußte von dem Grundsatze ausgegangen werden, daß ein für alle diese Lehranstalten berechnetes Lehrbuch nur dann genügen könne, wenn es auch den diesbezüglich weitestgehenden Anforderungen entspricht. Schon im Hinblicke also auf die zu fordernde möglichst allgemeine Verwendbarkeit als Lehrbuch für die österreichischen Waldbau- und Försterschulen mit ihren 1- bis 2jährigen Unterrichtskursen, in denen vielfach auf Grundlage einer ziemlich geringen Schulvorbildung ein verhältnismäßig hohes Lehrziel erreicht werden soll, mußte das Werk einen Umfang annehmen, der beim ersten Anblicke vielleicht etwas zu bedeutend erscheinen mag. Dazu kommt aber noch, daß das vorliegende Lehrbuch schon in der ersten Auflage zugleich als Nachschlagebuch für die absolvierten Waldbauschüler gedacht war, eine Eigenschaft, welcher bei der Neuauflage sogar in erhöhtem Maße Rechnung getragen wurde. Von der Forstschule her mit der Einteilung und dem wesentlichsten Inhalte des Werkes vertraut, wird sich in demselben das aus der Schule hervorgegangene Organ in seiner späteren Dienststellung nötigenfalls auch in solchen Kapiteln rasch zurechtfinden, welche an der betreffenden Lehranstalt aus irgend einem Grunde nur gestreift worden sein mögen oder im Laufe der Jahre dem Gedächtnis schon teilweise

entschwunden sind; dabei darf nicht übersehen werden, daß die Absolventen der Waldbau- und Försterschulen zwar vielfach nur als Forstschutzorgane bezeichnet werden, tatsächlich aber ganz überwiegend technische Hilfsorgane sind, an welche die Praxis oft sehr weit gehende Anforderungen stellt; für diese werden sie sich nun zumeist im vorliegenden Lehr- und Nachschlagebuche Rat holen müssen, weil ihnen ihr Einkommen nicht die Anschaffung von Spezialwerken und ihre Dienstesverrichtung nicht deren zeitraubendes Studium gestattet. Soweit das Werk als Lehrbuch verwendet wird, muß allerdings noch eine gewisse Sichtung des gebotenen Materials durch den Lehrer der betreffenden Schule eintreten. Vor allem braucht das im Kleindruck Angeführte beim Unterrichte im allgemeinen nur kurz erwähnt zu werden,*) wo es nicht etwa ganz zu übergehen ist. Auch sonst kann — je nach dem Lehrziele der betreffenden Schule — manche Kürzung und Vereinfachung platzgreifen: so wird beispielsweise in einer Försterschule, die in erster Linie Forstschutzorgane für den Hochgebirgsdienst heranbilden soll, der Eichenschälwaldbetrieb, die Weidenhegerwirtschaft, der Mittelwaldbetrieb und alles damit Zusammenhängende viel kürzer zu behandeln sein, als in einer Waldbauschule, deren Absolventen zum Teile sogar als Revierförster etwa in Niederungs- oder Auwaldungen zu wirtschaften haben werden u. dgl. m.

Jedenfalls will das nun in zweiter Auflage erschienene Werk nach den vorstehenden Ausführungen als ein für die Sphäre des Forstschutzdienstes bis etwa zu jener des Revierförsters überhaupt, in mancherlei Richtung verwendbares Ganzes und nicht ausschließlich als Lehrbuch für niedere Forstschulen betrachtet werden, als das es übrigens mit so befriedigendem Erfolge benützt wird, daß unter andern das Präsidium des niederösterreichischen Forstschul-Vereines, welches das Erscheinen der ersten Auflage angeregt hat, die Neuauflegung des Werkes mit nur wenig gekürztem Umfange ausdrücklich verlangte.

Da den im Sinne dieser Wünsche vorgenommenen Kürzungen nicht unbedeutende Ergänzungen (z. B. im vorliegenden I. Bande auf vielseitiges Verlangen die Ausführungen über den Meßtisch und die Waldboussole) gegenüberstehen, so ist — ich darf wohl sagen, mit Recht — der Umfang des Gesamtwerkes in der zweiten Auflage demjenigen der ersten annähernd gleichgeblieben. Nur der hohen Förderung des Werkes seitens des k. k. Ackerbauministeriums, welches dem Unternehmen eine bedeutende Subvention gewährte und in welchem mir die Herren Ministerialrat Ludwig Dimitz und Sektionsrat Friedrich Ritter von Zimmerauer in mannigfacher Beziehung ihre gütige Unterstützung liehen, ist es zu danken, daß dieses Lehrbuch nun trotz seines bedeutenden Umfanges und der ihm von der Verlagsbuchhandlung gegebenen reichen Ausstattung zu einem verhältnismäßig geringen Preise, weiteren Kreisen zugänglich, in zweiter Auflage erscheinen konnte. Es sei mir gestattet, der bezeichneten hohen Behörde und den genannten Funktionären derselben an dieser Stelle für die gewährte Förderung den ehrerbietigsten Dank auszudrücken.

Was nun im speziellen den Inhalt des vorliegenden I. Bandes betrifft, so sind die Arithmetik und Geometrie in bezug auf Ausführlichkeit der Darstellung — ohne nicht schon früher Erlerntes zu bringen und ohne demnach eine über die Lehrpläne erhöhte Kenntnis aus diesen Gegenständen auch nur im entferntesten anzustreben — gegen-

*) Ausgenommen die wegen Raumersparung im Kleindruck gehaltenen Rechenaufgaben im I. Bande und die Gesetzestexte im IV. Bande.

über einigen folgenden Disziplinen aus mehrfachen Gründen besonders eingehend behandelt worden, vielleicht entgegen der in manchen forstlichen Kreisen herrschenden Annahme, daß alles das, was die Schüler an Waldbau- und Försterschulen als grundlegend aus diesen Gegenständen brauchen, ohnedies zur Genüge aus der Bürgerschule mitgebracht werde, und daß deshalb an dieser Stelle eine grundrißmäßige oder leitfadenähnliche Behandlung des Stoffes im Umfange des Lehrplanes hinreichend sei. Gegen diese Voraussetzung sprechen vorerst die Erfahrungen beim Unterrichte in der überzeugendsten Weise. Nur ein verhältnismäßig geringer Teil der Zöglinge besitzt zur Zeit des Eintrittes in die Fachschule noch eine hinlängliche Kenntnis aus den genannten Gegenständen, und bei der weitaus größeren Anzahl ist eine eingehende Behandlung der nötigen Lehren aus diesen Fächern vom Grunde auf notwendig, wenn die Schüler der Anwendung der letzteren auf die Elemente der praktischen Geometrie und Holzmeßkunde folgen sollen und überhaupt auch die notwendige Gleichmäßigkeit der Kenntnis dieser Gegenstände bei allen Schülern erreicht werden will. Weiters ist das Rechnen jeder Art für die technischen Hilfsorgane von besonderer Wichtigkeit, und endlich ist gerade für die Arithmetik und Geometrie ein Lehrbuch wie das vorliegende im späteren Berufsleben der betreffenden Organe oft der einzige Nachschlagbehelf, der noch brauchbar ist zu Zeiten, in denen vielleicht ein Teil des Fachlichen bereits durch Besseres oder Neueres überholt ist.

Die „Formellehre" wurde für jene Fälle einbezogen, in denen die Lehre von den allgemeinen Zahlen außer Betracht bleibt; die Konstruktionsaufgaben in der Geometrie sowie die darstellende Geometrie, welche in den Gegenstand „Zeichnen" fallen, wurden lediglich des logischeren Zusammenhanges wegen hier behandelt.

Für die detaillierte Bearbeitung des vorliegenden ersten Bandes hat seinerzeit noch der Herausgeber desselben in erster Auflage, F. Eckert, ein Arbeitsgerippe entworfen, auf Grundlage dessen der damalige Waldbauschullehrer Herr A. G. Ružička die eine Hälfte der Arithmetik, dann die Planimetrie und Stereometrie, Eckert selbst aber die andere Hälfte der Arithmetik sowie die darstellende und praktische Geometrie verfaßt hat. Die Figuren hat der Zögling Adolf Liebl der Aggsbacher Waldbauschule gezeichnet. — Die Bearbeitung für die vorliegende zweite Auflage hat bezüglich der Arithmetik und Geometrie der k. k. Adjunkt der forstlichen Versuchsanstalt in Mariabrunn Herr Dr. N. v. Lorenz-Liburnau, bezüglich der namhaft erweiterten praktischen Geometrie der k. k. Forstmeister Herr M. Kreibich durchgeführt. Die Revision der Korrekturbogen haben in beiden Auflagen Herausgeber und Mitarbeiter in gleichem Maße besorgt.

Möchten die beteiligten Kreise auch die zweite Auflage des „Lehrbuch der Forstwirtschaft" einer geneigten Würdigung und wohlwollenden Beurteilung unterziehen und auch die Schwierigkeiten nicht außer acht lassen, welchen die Schaffung eines solchen Werkes gerade in Österreich wegen der hier den Forstschutz- und technischen Hilfsorganen obliegenden so sehr verschiedenartigen Aufgaben begegnet.

Wien, im September 1902.

H. v. Lorenz.

Inhalts-Übersicht.

I. Band.

Seite

Einleitung.

Die grundlegenden mathematischen Gegenstände.

I. Teil. Arithmetik.

I. Abschnitt. Das Rechnen mit besonderen Zahlen.

I. Kapitel. Das Rechnen mit unbenannten und einnamigen ganzen und Dezimalzahlen.

II. Kapitel. Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

III. Kapitel. Die Teilbarkeit der Zahlen.

IV. Kapitel. Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

V. Kapitel. Das Potenzieren.

VI. Kapitel. Das Wurzelziehen (Radizieren).

VII. Kapitel. Die Verhältnisse und Proportionen.

VIII. Kapitel. Die einfache und zusammengesetzte Regeldetri.

IX. Kapitel. Die Prozent- und einfache Zinsrechnung.

X. Kapitel. Die Gesellschaftsrechnung oder Teilregel.

XI. Kapitel. Die Kettenrechnung.

XII. Kapitel. Die Mischungsrechnung.

XIII. Kapitel. Die Formellehre.

II. Abschnitt. Vom Rechnen mit allgemeinen und algebraischen Zahlen.

I. Kapitel. Das Wesentlichste von den Rechnungsoperationen mit allgemeinen Zahlen.

II. Kapitel. Das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen (Algebraische Zahlen).

III. Kapitel. Das Wesentlichste über das Rechnen mit gebrochenen allgemeinen Zahlen.

Seite

IV. Kapitel. Das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzel, dann das Kubieren und das Ausziehen der Kubikwurzel mit allgemeinen Zahlen.

V. Kapitel. Einiges Wesentliche von den einfachsten Gleichungen.

II. Teil. Geometrie.

I. Abschnitt. Die Planimetrie.

I. Kapitel. Der Punkt, die gerade Linie und die Kreislinie.

II. Kapitel. Der Winkel.

III. Kapitel. Die geradlinig begrenzten Figuren.

IV. Kapitel. Die krummlinigen Figuren.

V. Kapitel. Die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.

VI. Kapitel. Umfang und Flächeninhalt der ebenen Figuren.

II. Abschnitt. Die Stereometrie.

I. Kapitel. Vorbegriffe.

Seite

II. Kapitel. Entstehung und Beschreibung der wichtigsten Körper.

III. Kapitel. Die Oberfläche und der Rauminhalt der Körper.

III. Abschnitt. Das Wesentlichste aus der Projektionslehre.

I. Kapitel. Von den Projektionen von Punkten und Strecken.

II. Kapitel. Von den Projektionen ebener Figuren.

III. Kapitel. Von den Projektionen der Körper.

III. Teil. Praktische Geometrie.

I. Abschnitt. Die Flächenmeßkunde.

I. Kapitel. Von den Maßen und Maßstäben.

II. Kapitel. Von den einfachsten Operationen der Flächenaufnahme.

Verzeichnis

der

für den ersten Band benützten Bücher und Schriften.

Ambros J. und Kopetzky F.: Rechenbuch für Bürgerschulen, 1., 2. und 3. Klasse; 9., 6., respektive 4. Auflage. Wien. Verschiedene Ausgabsjahre.

Burckhart W.: Mathematische Unterrichtsbriefe, Leipzig.

Grothe O.: Forstliche Rechenaufgaben, Berlin 1894.

Langenbacher F.: Forstmathematik, Berlin 1875.

Močnik, Dr. F. R. v.: Lehrbücher der Arithmetik, sowohl jene für Untergymnasien als auch jene für Knaben-Bürgerschulen. Verschiedene Ausgabsjahre.

Wie vor: Lehrbücher für Geometrie und geometrisches Zeichnen. Wie vor.

Napravnik Fr.: Geometrie und geometrisches Zeichnen, Wien 1894.

Behse, Dr. W. H.: Die darstellende Geometrie, Fulda und Leipzig 1882.

Baur, Dr. F.: Lehrbuch der niederen Geodäsie, Berlin 1895.

Fialkowski N.: Praktische Geometrie, Wien 1892.

Groß H.: Die einfacheren Operationen der praktischen Geometrie, Stuttgart 1887.

Hartner-Wastler: Handbuch der niederen Geodäsie, Wien 1885.

Schmarda J. K.: Lehrbuch der praktischen Meßkunst, 1874.

Tapla Th.: Die Meßtisch-Praxis, 1896.

Einleitung.

I. Vorbegriffe.

Mit dem Ausdrucke „Wald" bezeichnet man gemeiniglich eine mit wildwachsenden, baumartigen Holzgewächsen bestandene Fläche von größerer Ausdehnung.

Der Einfluß des Menschen auf den Wald kann entweder nur in einer regel- und planlosen Benützung desselben bestehen, oder aber es kann die Nutzbarmachung nach gewissen Grundsätzen und Regeln erfolgen. Man nennt einen unter einer grundsätzlich geregelten und planmäßigen Behandlung stehenden Wald Wirtschaftswald oder Forst. Nachdem aber heute in den Kulturländern wenigstens der größere Waldbesitz nur mit wenigen Ausnahmen einer mehr oder weniger weitgehenden planmäßigen Behandlung unterliegt, so hat man sich daran gewöhnt, auch planmäßig behandelte Wälder kurzweg als Wälder, Waldungen oder Wald zu bezeichnen. Im Gegensatze hiezu heißen dann von jeher ganz außerhalb des Einflusses der Menschen gestandene und weder einer pfleglichen Behandlung noch einer forstlichen Benützung unterlegene Waldungen Urwälder. Man findet dieselben in solchen Gebieten, in welche die Kultur noch wenig oder überhaupt nicht vorgedrungen ist, in seltenen Fällen wohl auch als mit Absicht von größeren Besitzern gehaltene Sehenswürdigkeiten innerhalb der übrigen planmäßig behandelten Waldteile.

Die Gesamtheit aller Verrichtungen, welche der Wirtschaftswald zu seiner sachgemäßen Behandlung erfordert, bezeichnet man als Forstwirtschaft, und die geordnete Darstellung aller zur Durchführung der Forstwirtschaft notwendigen Lehren und Regeln als Forstwirtschaftslehre oder Forstwissenschaft. Der Inbegriff von Forstwirtschaft und Forstwissenschaft, also die Vereinigung von Theorie und Praxis, wird mit dem Ausdrucke Forstwesen bezeichnet, den man übrigens zuweilen auch zur Kennzeichnung der forstlichen Berufsstellung gebraucht. Die der letzteren angehörigen und die Forstwirtschaft handhabenden fachlichen Organe heißen Forstmänner und Forstleute, speziell Forstwirte dann, wenn sie höher vorgebildet sind.

II. Geschichte der Wälder.

1. Besitzverhältnisse.

Der Wald hat insbesondere in Österreich und Deutschland in bezug auf seine Besitzverhältnisse und seine Benützungsart im Laufe der Zeit mannigfache Wandlungen durchgemacht. Er bedeckte vorerst mit wenigen Ausnahmen alles Land und war herrenloses Gut, bewohnt von Nomaden-

völkern. Als die letzteren seßhaft geworden waren und Gemeinden sich herausgebildet hatten, wurden die zunächst gelegenen Waldungen in gemeinschaftlichen Besitz genommen und die zum Ackerbau und zur Viehzucht notwendigen Wiesen und Felder durch Roden hinreichender Waldflächen benützbar gemacht. Erst verhältnismäßig spät gingen die Wälder in das Privateigentum Einzelner und als Staatsgut in das Eigentum der Regenten über, welche den Wald zum Teile wieder an Untertanen, Gemeinden und sonstige Körperschaften (Klöster, Kirchen usw.) weiterbegaben. Diese letztere Verschiedenheit des Waldbesitzes hat sich in Form der Staatsforste, der Gemeinde- und sonstigen Körperschaftsforste sowie der größeren Privatwaldungen bis heute erhalten.

2. Die Benützungsart.

Wie die Besitzverhältnisse, so war auch die Benützungsart der Wälder zu den verschiedenen Zeiten eine wesentlich verschiedene. Die ursprünglichste Benützungsart beschränkte sich auf die Jagdnutzung und die Fischerei, später in ausgedehnterem Maße auch auf die Viehweide und die Schweinemast. Die Holznutzung in den schier endlosen Waldungen fiel in Anbetracht der dünnen Bevölkerung und des geringen Holzbedarfs der letzteren ehedem nicht in die Wagschale.

In dem Maße, als mit der Zunahme der Bevölkerung auch die Größe der Bedürfnisse wuchs, als die Bewohner mehr Ackerland, Wiesen und Weiden für ihren Lebensunterhalt brauchten und als noch später Städte und größere Dörfer entstanden, mit denen gleichzeitig Handel und Industrie emporblühten, da trat zugleich auch die Nutzung des Holzes als des jetzigen Hauptproduktes des Waldes immer mehr in den Vordergrund. Man rodete in dieser Zeit einerseits weite Waldstrecken, machte aus ihnen Felder, Wiesen und Weiden oder die Stätten ausgedehnterer Wohnplätze und entnahm anderseits den als Wald belassenen Teilen, soweit das aus den Rodeorten stammende Holzmaterial nicht ausreichte, ganz planlos und verschwenderisch das noch weiterhin erforderliche Holz ohne Rücksicht darauf, ob an Stelle der entnommenen Bäume auch wieder neuer Wald entstand oder nicht.

Solche Maßnahmen riefen die berechtigte Sorge vor zukünftiger Holznot hervor und veranlaßten (insbesondere vom 12. Jahrhundert ab) die Grundherren und teils unmittelbar auch die Regenten, Verordnungen ergehen zu lassen, welche der seitherigen übermäßigen Waldausnützung ein Ziel setzten und einzelne Vorschriften über eine bessere Zugutemachung der Waldungen enthielten. Diese Vorschriften über eine richtige Begründung, Erziehung und Benutzung der Wälder fallen erst in die zweite Hälfte des 16. Jahrhunderts*), weshalb erst diese Zeit so recht eigentlich als der Beginn einer an gewisse Regeln gebundenen Waldbehandlung angesehen werden kann. Für die heutige Wirtschaft haben die damals herrschenden Grundsätze indessen keinen Belang mehr, und wir führen die ersten Lehren für unsere heutige Waldbehandlung erst auf das Ende des 18. und den Beginn des 19. Jahrhunderts zurück.

III. Die Aufgaben der Forstwirtschaft.

Die Aufgaben der Forstwirtschaft ergeben sich aus der Erzeugung aller jener Produkte, welche der Wald zu liefern und nach den Zwecken, denen er sonst zu dienen hat.

*) Als die älteste der sogenannten Forstordnungen wird die im Jahre 1524 vom Erzbischofe Mathäus Lang für das Erzbistum Salzburg in Druck erschienene Forstordnung angesehen.

Der Wald liefert unmittelbar (direkt) eine große Anzahl von Rohstoffen und dient mittelbar (indirekt) durch die Einflüsse, welche er auf das Klima, die Feuchtigkeitsverhältnisse des Bodens und die Wasserabfuhr, die Gesundheitsverhältnisse und das geistige Leben des Menschen ausübt. Die unmittelbaren Vorteile des Waldes kommen in erster Linie dem Waldbesitzer zugute, die mittelbaren hingegen der Allgemeinheit, der Wohlfahrt des Volkes.

1. Unmittelbar liefert der Wald:

a) Als Hauptprodukt das Holz, welches zum Hochbau (Häuserbau), zum Erd-, Wasser- und Brückenbau, zum Schiff- und Maschinenbau, bei den verschiedenen Handwerksbetrieben, wie dem Tischler-, Wagner-, Binder- und Drechslergewerbe, der Holzschnitzerei u. dgl., dann bei den landwirtschaftlichen Betrieben und endlich zur Erwärmung unserer Wohn- und Arbeitsräume, sowie zum Kochen und Backen Verwendung findet. Von den aus dem Holze hervorgehenden Umwandlungsprodukten findet insbesondere die Holzkohle in Eisen- und Hüttenwerken und beim Schmiede- und Spenglergewerbe, der Holzstoff und die Zellulose bei der Papierfabrikation Verwendung u. dgl. m.

b) Als Nebenprodukte die Baumrinde zum Gerben, das Harz und verschiedene andere Holzsäfte, das Laub und die Nadeln als Streumittel und zur Viehfütterung, die Baumfrüchte und Samen, Schwämme und Pilze, Moose und Beeren, die Jagdnutzung u. a. m.

2. Mittelbar beeinflußt der Wald das örtliche Klima und ist insbesondere ein ausgiebiger Schutz gegen zu starke, kalte und austrocknende Winde. Er trägt ferner in den eigentlichen Waldlagen unter Umständen zur dauernden Forterhaltung der Quellen bei und damit zusammenhängend auch zur dauernden Erhaltung des zur Schiffahrt erforderlichen Wasserstandes in den großen Flüssen und Strömen, welche in den meisten Fällen durch Zuflüsse aus waldigen Gebirgsgegenden gespeist werden. Der geschonte Wald verhindert weiters das rasche Abfließen des Wassers nach starken oder andauernden Regen und vermindert so die Gefahren durch Hochwässer und die Schäden durch die letzteren. Durch seine luftverbessernde Wirkung ist der Wald bis zu einem gewissen Grade auch ein Schutzmittel gegen gewisse Krankheiten, und durch seine wohltuenden Eindrücke auf das Gemüts- und Seelenleben des Menschen wirkt er in nicht minderem Grade nützlich. Der Städter findet die ersehnte Erholung im grünen Walde, der Maler und Dichter schöpft aus der Waldnatur immer und immer neue Gestalten, und die ganze fortschreitende Kultur muß zurückgreifen zu den Hintersassen in den Wäldern, um sich bei ihnen neue Kraft im natürlichen, gesunden Volkstume zu holen.

Die vorgenannten, dem Walde zukommenden Aufgaben werden erfüllt:

1. Durch eine dauernde Erhaltung des Waldes insoferne, als die durch die jährliche Entnahme an Holz leer gewordenen Flächen in ehester Bälde wieder mit jungem Nachwuchs versehen werden. Diese Forderung ist um so mehr als wichtig zu erachten, als die Waldwirtschaft im gegenwärtigen Zeitpunkte ohnehin vorwiegend auf die für die Landwirtschaft unbrauchbaren Böden, die sogenannten absoluten Waldböden*), zurückgedrängt ist, welche im Falle ihrer Nichtbestellung mit Wald zumeist als ertragloses Land liegen bleiben müßten.

*) Man nennt solche jetzt mit Wald versehene Böden, welche sich auch gut zur landwirtschaftlichen Kultur eignen würden, relative Waldböden.

2. Durch eine entsprechende Erziehung und Beschützung der neubegründeten Wälder bis zu dem Alter, in welchem das Holz eine brauchbare Handelsware bildet.

3. Durch die vorteilhafteste Ausnutzung der für den Verbrauch jeweilig geeignetsten Waldteile, durch Erzeugung der von den Käufern verlangten Holzsortimente, durch die Heranziehung einer tüchtigen Holzhauerschaft, die Anlage guter Waldwege sowie sonstiger Transportanstalten, durch die vollkommene Ausnutzung der Nebenprodukte des Waldes u. dgl. Endlich gehört zu der vorteilhaftesten Benützung des Waldes auch eine gute Ordnung und Regelung der einzelnen Arbeiten nebst einer buchhaltungsmäßigen Verrechnung der Produkte in ähnlicher Weise, wie dies in jeder größeren Wirtschaft üblich ist.

IV. Die Organe der Forstwirtschaft. Das Forstschutz- und technische Hilfspersonale insbesondere und die für dasselbe notwendigen Kenntnisse.

In jeder größeren Wirtschaft (Landwirtschaft, Fabrikswesen u. dgl.) werden die vorkommenden Dienstverrichtungen, welche durch das Zusammenwirken vieler Personen bewältigt werden müssen, nicht von durchaus gleichstehenden Organen vollzogen, sondern es findet eine Teilung der Arbeit nach der Wichtigkeit und Bedeutung der einzelnen Verrichtungen statt. In derselben Weise wird auch in der Forstwirtschaft in der Hauptsache zwischen solchen Organen unterschieden, welche die Wirtschaft zu führen und zu leiten haben, und zwischen solchen, welche die Forste zu beschützen, untergeordnete Arbeiten zu überwachen und überwiegend nur Hilfsdienste im praktischen Betriebe zu leisten haben. Die erste Gruppe von Organen sind die Forstverwaltungsorgane im weitesten Sinne des Wortes, die letztere Gruppe hingegen die Organe für den Forstschutz- und technischen Hilfsdienst.

Wenn die Ausbildung der Forstverwaltungsbeamten das für den Durchschnitt höchst erreichbare forstliche Wissen und Können in sich begreifen muß, so reicht für die Organe des Forstschutz- und technischen Hilfsdienstes eine Ausbildung hin, welche es ihnen ermöglicht, die übertragenen Hilfsdienste nach der Vorschrift des Verwaltungsbeamten mit Verständnis durchzuführen und anderseits auch den Forstschutz in der durch die Wirtschaft und das Gesetz gegebenen Weise auszuüben.

Der Unterricht des Forstschutzmannes muß sich in erster Linie auf die notwendigen Grundsätze und Lehren der Begründung, Erziehung, des Schutzes und der Benützung des Waldes beziehen, in zweiter Linie auf sonst notwendige Arbeiten im Forstbetriebe, wie die Vermessung von kleineren Waldflächen (Holzschlägen u. dgl.) und die Abmaß des Holzes, ferner auf die Grundzüge der Einrichtung des gesamten Forstdienstes nach seinen einzelnen Gliedern und Zwecken, endlich auf das Wesen der Material- und Geldverrechnung, für welche die technischen Hilfsorgane in den meisten Fällen die ersten Aufschreibungen zu liefern haben. In dritter Linie kommen noch die nötigen forstgesetzlichen Bestimmungen, einiges Verständnis für die im Forstbetriebe vorkommenden kleineren Bauherstellungen, das Zeichnen und Kopieren einfacher Situations- und Baupläne, die Aneignung einer gefälligen Handschrift, endlich die Kenntnis der Jagd- und Fischereikunde in den Wissenskreis des Forstschutzmannes einzubeziehen.

Der vorgeführte Umfang an fachlichen Kenntnissen kann mit Erfolg nur dann erreicht werden, wenn der Darstellung der genannten Lehren eine gute Schulung in den notwendigen Begriffen der Arithmetik und Geometrie, sowie in der Naturlehre und Naturgeschichte vorhergegangen ist. Die in der Bürgerschule erworbenen Vorkenntnisse aus diesen Gegenständen müssen befestigt und in Absicht auf die Vorbereitung für den forstlichen Fachunterricht auch entsprechend erweitert werden.

Mit Rücksicht auf die vorhergegangenen Auseinandersetzungen werden wir die einzelnen Gegenstände in 4 Bänden behandeln und wie folgt gliedern:

I. Band. Die grundlegenden mathematischen Gegenstände.

- I. Teil. Arithmetik.
- II. Teil. Geometrie.
- III. Teil. Praktische Geometrie.

II. Band. Die grundlegenden naturwissenschaftlichen Gegenstände.

I. Hauptabteilung Naturlehre.

- I. Teil. Aus der allgemeinen Naturlehre.
- II. Teil. Wetterlehre und Klimakunde.

II. Hauptabteilung. Naturgeschichte.

- I. Teil. Mineralogie, Gesteins- und Bodenkunde.
- II. Teil. Botanik.
- III. Teil. Zoologie.

III. Band. Die forstlichen Fachgegenstände.

I. Hauptabteilung. Die forstliche Produktionslehre (Erzeugungslehre).

- I. Teil. Waldbau.
- II. Teil. Forstschutz.
- III. Teil. Forstbenutzung, einschließlich der Forsttechnologie.

II. Hauptabteilung. Aus der forstlichen Betriebs- oder Gewerbslehre.

- I. Teil. Holzmeßkunde.
- II. Teil. Die Grundbegriffe der Forsteinrichtung.
- III. Teil. Forstdiensteinrichtung und Rechnungswesen.
  Anhang: Geschäftsstil.

IV. Band: Die forstlichen Hilfsgegenstände (Nebenfächer)

- I. Teil. Forstliche Baukunde.
- II. Teil. Situations- und Bauzeichnen.
- III. Teil. Schreiben.
- IV. Teil. Jagd- und Fischereikunde.
- V. Teil. Gesetzkunde.
- VI. Teil. Erste Hilfe bei Verunglückten.

Die Jagdkunde wird in Anbetracht der vorliegenden sehr brauchbaren Abhandlungen nicht aufgenommen werden.



I. Band.

Die grundlegenden mathematischen Gegenstände.

Einteilung und allgemeine Vorbegriffe.

Jedes einzelne mehrerer gleichartiger Dinge bezeichnet man als Einheit. Mehrere Einheiten bilden eine Mehrheit, und der Ausdruck, welcher angibt, wie oft die Einheit in einer gegebenen Mehrheit vorkommt, heißt Zahl. Zur schriftlichen Bezeichnung der Zahlen dienen die Zahlzeichen oder Ziffern.

Die Zahl benützt man zur Darstellung der Größe und versteht hierunter jedes Ding, welches durch Hinzutun oder Wegnehmen einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist. Man unterscheidet Zahlengrößen und Raum- oder räumliche Größen. Erstere sind durch unsere Sinne nicht wahrnehmbare Größen, von denen uns nur die Zahl als solche eine Vorstellung geben kann; letztere hingegen sind durch die Anschauung direkt wahrnehmbare Größen, nämlich Linien, Flächen und Körper, die sonach auch leichter erfaßt und verständlich werden, als die Zahlengrößen.

Die Wissenschaft, welche sich mit den Eigenschaften der Größen und den Gesetzen, nach welchen dieselben verbunden werden, befaßt, heißt Mathematik oder Größenlehre. Sie zerfällt in die reine und angewandte Mathematik, je nachdem man die Größen allein oder aber in ihrer Anwendung auf andere Wissenschaften und auf das praktische Leben in die Betrachtung zieht.

Die reine Mathematik teilen wir in die Arithmetik, d. i. die Lehre von den Zahlengrößen, und die Geometrie, d. i. die Lehre von den Raumgrößen. Von der angewandten Mathematik kommt als selbständiger Gegenstand für uns nur die praktische Geometrie in Betracht, so daß wir im folgenden die Mathematik nach drei Teilen — Arithmetik, Geometrie und praktische Geometrie — besprechen können.

I. Teil.

Arithmetik.

I. Abschnitt.

Das Rechnen mit besonderen Zahlen.

I. Kapitel.

Das Rechnen mit unbenannten und einnamigen ganzen und Dezimalzahlen.

§ 1. Allgemeine Begriffsfeststellungen.

Wie schon erwähnt, hat man mit unseren arabischen Ziffern (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) für Zahlen, welche eine bestimmte Anzahl von Einheiten enthalten, besondere Zeichen gewählt. Man nennt jede durch diese Ziffern dargestellte Zahl eine besondere Zahl im Gegensatze zu den allgemeinen Zahlen, welche durch Buchstaben bezeichnet werden. Der Wert dieser letzteren Zahlen ist kein bestimmter, sondern ein unbestimmter oder allgemeiner.

Eine Zahl ist unbenannt, wenn sie nur die Menge der Einheiten, nicht aber die Art derselben andeutet. Drückt eine Anzahl hingegen sowohl die Menge, als auch die Art der Einheiten aus, so heißt sie eine benannte Zahl. 5 ist eine unbenannte, 5 Meter eine benannte Zahl.

Die benannten Zahlen werden wieder als einnamige und mehrnamige unterschieden. Einnamig ist eine benannte Zahl, wenn sie nur Einheiten einer einzigen Benennung enthält, z. B. 6 Meter; mehrnamig hingegen, wenn sie aus Einheiten verschiedener Benennung derselben Art besteht, z. B. 5 Meter 3 Dezimeter, 2 Hektar 30 Ar.

Mehrere ein- oder mehrnamige Zahlen sind gleichnamig, wenn sie alle dieselbe Benennung führen; oder ungleichnamig, wenn ihre Benennung eine verschiedene ist.

Gleichgroße Zahlen sind jene, welche dieselbe Menge von Einheiten enthalten; ungleichgroße solche, deren Einheitenmenge verschieden ist.

Als unendlich große Zahlen bezeichnet man solche Zahlen, welche jede vorstellbare Zahl überschreiten; man hat für dieselben das Zeichen ∞ (unendlich) gewählt.

Gegebene Zahlen durch Denkvorgänge so miteinander verbinden, daß hiedurch eine andere Zahl erhalten wird, heißt rechnen. Die erhaltene Zahl heißt das Resultat oder Ergebnis der Rechnung.

Zur Darstellung der Rechnungen, welche mit mehreren Größen ausgeführt werden sollen, bedient man sich bestimmter Zeichen. Sind zwei Größen einander gleichzustellen, so verbindet man sie durch das Gleichheitszeichen =, sprich gleich, ebenso groß wie, ebenso viel wie. Man nennt zwei durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbundene Größen eine Gleichung; 1 Meter = 100 Zentimeter, 1 Krone = 100 Heller sind also Gleichungen. 1 Meter, beziehungsweise 1 Krone bezeichnen die linke, 100 Zentimeter, beziehungsweise 100 Heller die rechte Seite der bezüglichen Gleichung.

Das Zeichen +, sprich „mehr" oder „plus", ist das Zeichen des Zuzählens, das Zeichen —, sprich „weniger" oder „minus", das Zeichen des Hinwegnehmens oder Abziehens; ×, sprich „mal", ist das Zeichen des Vervielfältigens und :, sprich „dividiert durch", ist das Zeichen des Teilens.

§ 2. Die Zahlenbildung im dekadischen Zahlensystem.

1. Ganze Zahlen.

Die Zahlenbildung beginnt mit der Einheit. Geben wir zu dieser fortgesetzt die Einheit hinzu, so entstehen die Zahlen zwei, drei, vier usw. bis ins Unendliche fort.

Man nennt die Zahlenbildung durch fortgesetztes Hinzutun neuer Einheiten das Zählen und die hiedurch erhaltene Reihe von Zahlen die natürliche Zahlenreihe. Jede Zahl der letzteren ist eine ganze Zahl, weil sie nur aus ganzen Einheiten entstanden ist.

Um alle Zahlen einerseits mit wenigen Wortausdrücken benennen und anderseits durch wenige Zahlzeichen (Ziffern) schriftlich darstellen zu können, ist es üblich, die Benennung und Bezeichnung der Zahlen nach dem dekadischen Zahlensysteme*) vorzunehmen.

Es beruht darauf, daß man die Zahlen 1 bis 9 der natürlichen Zahlenreihe mit 9 einzelnen voneinander verschiedenen Zeichen (den arabischen Ziffern) anschreibt, die Zahlen zehn, zwanzig usf. bis neunzig aber durch 1, 2 usf. bis 9 (d. h. bis der Ziffernvorrat erschöpft ist) mit rechts davon stehender Null darstellt. Hiebei hat man sich zu denken, daß die 0 nur ein beliebiges Zeichen ist, welches zum Ausdrucke bringen soll, daß die Zahlen 10, 20, 30 usf. das Zehnfache von 1, 2, 3 usf. vorstellen; 0 bezeichnet also hier den Zehnerwert der links von 0 stehenden Ziffer.

Setzt man in 10 an Stelle der 0 z. B. die Ziffer 3, so hat man sich zu denken, daß hiedurch der Zehnerwert der 1 in dem entstandenen Zahlenbilde 13 ungeändert erhalten bleibt und daß dieses Zahlenbild 10 + 3 oder die Zahl dreizehn bedeutet. Es ist ersichtlich, daß auf diese Art alle Zahlen von 10 bis 99 durch zweizifferige Zahlzeichen dargestellt werden können.

Werden die Hunderter wieder mit den Ziffern von 1 bis 9 gezählt und ihr Hunderterwert (als Zehnfaches der Zehner) mit 2 rechts von der Zählziffer angeschriebenen Nullen bezeichnet, so ergeben sich durch Ausnützung der Stellenwerte**) dieser beiden Nullen ohneweiters alle Zahlen

*) System bedeutet Zusammenstellung; dekadisch heißt hier auf der Zahl 10 beruhend. Man nennt 10 die Grundzahl des dekadischen Systemes.

**) Der Stellenwert einer Ziffer (auch der Null) gibt an, ob diese Ziffer in einer gegebenen Zahl an Stelle der Einer oder Zehner oder Hunderter usf. — also von rechts nach links gezählt an 1. oder 2. oder 3. Stelle usf. — steht und daher Einer oder Zehner oder Hunderter usf. vorstellt.

von 100 bis 999 und ähnlich durch Verwertung der 3 Nullen der Zahl 1000 alle Zahlen von 1000 bis 9999 usw.

Bei der Bezeichnung mehrstelliger Zahlen werden dieselben der Übersichtlichkeit wegen stets in Klassen zu je drei Stellen eingeteilt. Nach den ersten 3 Stellen pflegt man in der Regel einen Punkt in derselben Linie zu machen, auf welcher die Zahl geschrieben steht; nach den zweiten 3 Stellen macht man einen Beistrich, nach den nächstfolgenden 3 Stellen wieder einen Punkt, nach den weiteren 3 Stellen zwei Beistriche usf. Z. B. 1,,357.987,642.103. Die erste dreistellige Klasse von rechts gegen links liest man dann als Einer, die zweite Klasse als Tausender, die dritte Klasse als Millionen usf.

So wird 854, (Millionen) 127. (Tausender) 869 (Einer) gelesen: Achthundertvierundfünfzig Millionen, einhundertsiebenundzwanzig Tausend und achthundertneunundsechzig. Es stellt sonach in dem vorliegenden Beispiele die Zahl 9 gewissermaßen die Einer der Einer, 7 die Einer der Tausender, 4 die Einer der Millionen dar.

Übung.

Lies folgende Zahlen: 3270, 4002, 80022, 174135, 100101, 3470156, 37000003, 488120771, 308472000124. Welcher ist der Stellenwert, welcher der Ziffernwert jeder einzelnen Ziffer?

2. Dezimalzahlen.

Jede Einheit kann man sich in Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. geteilt denken. Das dekadische Zahlensystem erlaubt ohneweiters auch diese Bruchteile (Dezimalen) der Einheit in derselben Form wie die ungebrochenen Zahlen hinzuschreiben, wenn man die Zählung der Stellenwerte von der Einerstelle einer Zahl aus nach rechts fortsetzt und die Scheidung der Einer von den Dezimalen durch einen zwischen beide oben gesetzten Punkt andeutet. Es stehen also an 1. Dezimalstelle die Zehntel, an 2. die Hundertstel, an 3. die Tausendstel usw.

Einer (E), Zehner (Z), Hunderter (H), Tausender (T) usw. werden, weil sie nur aus ganzen Einheiten entstanden sind, ganze Zahlen oder Ganze genannt. Zehntel (z), Hundertstel (h), Tausendstel (t) usw. nennt man Dezimalen (decem ist das lateinische Wort für zehn).

Eine Zahl, welche Ganze und Dezimalen enthält, heißt Dezimalzahl. Man kann zur besseren Unterscheidung der Ganzen von den Dezimalen letztere kleiner schreiben als die ganzen Zahlen.

Daß man bei jeder Dezimalzahl zwischen dem Stellenwerte und dem Zifferwerte strenge unterscheiden muß, ist selbstverständlich. Ziehen wir zur übersichtlichen Darstellung dieser Forderung die Dezimalzahl 14793·049658 heran, so stellt sich die Wertigkeit ihrer Ziffern wie folgt:

1	4	7	9	3·	0	4	9	6	5	8	Zifferwert.
Zt	T	H	Z	E·	z	h	t	zt	ht	m	Stellenwert.

Die Lesart der Dezimalzahlen ergibt sich aus ihrer Bildung. Man liest vorerst die Ganzen, sodann jede Dezimale mit Angabe ihres Stellenwertes, oder alle Dezimalen zusammen in Einheiten der niedrigsten Stelle, oder aber jede Dezimale nur als Ziffer ohne Angabe des Stellenwertes und endlich auch die Dezimalen als ganze Zahl ohne jedweden Beisatz.

Hiernach kann die Zahl 423·50963 gelesen werden:

423 Ganze 5 z 0 h 9 t 6 zt 3 ht
423 „ 50963 ht
423 „ 5 0 9 6 3 (jede der Dezimalzahlen für sich gesprochen)
423 „ 50963 (als ganze Zahl gesprochen).

Übung.

Lies folgende Dezimalzahlen: 1·6, 1·06, 1·006, 1·0006, 274·135, 2383·1004, 0·000007, 0·145009, 3146572·135496, 8473920·00004327. Welcher ist der Stellenwert, welcher der Zifferwert jeder einzelnen Ziffer?

Zusatz. Römische Ziffern. Die Römer gebrauchten nachstehende Zeichen, römische Ziffern genannt, als Zahlgrößen: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

Die dazwischen liegenden Zahlen werden entweder durch das Nebeneinanderstellen gleicher oder größerer und kleinerer Zahlzeichen gebildet, welche dann als Ganzes immer jenen Wert haben, den alle Zeichen zusammengenommen besitzen (Addition). Z. B.: II = 2, III = 3, VI = 6, VII = 7, VIII = 8, XI = 11, XX = 20, LX = 60, CC = 200, MD = 1500 usf.; oder aber man setzt die niederen Zahlen links vor die höheren und deutet damit an, daß die größere Zahl um soviel zu vermindern ist, als die kleinere angibt; z. B. IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, IC = 99.

Man schreibt sonach die Zahl: 1894 = MDCCCXCIV, 1902 = MCMII.

§ 3. Die Addition unbenannter und einnamiger Zahlen.

Die Grundarten des elementaren Rechnens sind: Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Die Addition*) lehrt eine Zahl finden, welche ebensoviele Einheiten enthält, wie gewisse gegebene Zahlen, Addenden, auch Summanden oder Posten genannt, zusammen genommen. Die gesuchte Zahl heißt Summe.

Die Addenden können entweder nebeneinander oder untereinander angeschrieben werden. Im ersteren Falle verbindet man sie durch das Zeichen + und setzt zwischen den letzten Addenden und die Summe das Gleichheitszeichen =; z. B. 5 + 8 = 13. Im letzteren Falle schreibt man die Addenden untereinander und setzt die Summe unter einen unter dem letzten Addenden angebrachten Strich; z. B.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 4 \\ 3 \\ \hline 13 \end{array}$$

1. Die Addition ganzer Zahlen.

Sind zwei oder mehrere Zahlen zu addieren, so muß ihre Summe aus ebensoviel Einern, Zehnern, Hundertern usw. bestehen, als die zu addierenden Zahlen zusammen genommen enthalten. Man wird also zweckmäßig die E, Z, H usw. der einzelnen Summanden untereinander schreiben und je für sich zusammenzählen; enthält eine solche Teilsumme, z. B. jene der E mehr als 9, etwa 12 Einheiten, so trennt man dieselbe im Resultat in die niedrigere und in die nächst höhere Einheit, also in

*) Addition (lat.) bedeutet das Hinzugeben, Zusammenzählen.

unserem Falle 12 E in 2 E und 1 Z, und nimmt die letzteren zur nächsten Teilsumme.

a) 3347 = 3 T + 3 H + 4 Z + 7 E
950 = 9 H + 5 Z + 0 E
Summe 4 T + 2 H + 9 Z + 7 E = 4297.
1 T + 3 T, 12 H = 1 T + 2 H.

b)
42751
103
7218
50072

Regel: Bei der Addition mehrstelliger ganzer Zahlen schreibt man die gegebenen Zahlen derart untereinander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner usf. zu stehen kommen. Sodann addiert man, mit den Einern beginnend, die in jeder Reihe übereinander stehenden Zahlen und schreibt die erhaltenen Teilsummen an, sofern keine mehr als neun beträgt. Enthält aber die Teilsumme einer Reihe einen, zwei oder mehrere Zehner, so werden der nächst höheren (links von ihr stehenden) Reihe ebensoviele Einheiten zugezählt.

Gleichlautend ist auch das Verfahren bei benannten einnamigen Zahlen, wobei dann die Summe dieselbe Benennung erhält wie die Addenden. Z. B.

143 *K*	26 *ha*
916 „	13 „
723 „	101 „
1782 *K*	140 *ha*

2. *Die Addition der Dezimalzahlen.*

Dezimalzahlen werden in derselben Weise addiert wie ganze Zahlen, denn es muß die Summe zweier oder mehrerer Dezimalzahlen ebensoviele Ganze, Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. enthalten, als die einzelnen Summanden zusammengenommen.

a) 3·347 = 3 Ganze + 3 z + 4 h + 7 t
0·950 = 0 Ganze + 9 z + 5 h + 0 t
Summe 4 Ganze + 2 z + 9 h + 7 t
12 z = 1 G + 2 z

b)
724·6149
0·0002
84
808·6151
1 1

Regel: Dezimalzahlen werden addiert, indem man die gleichstelligen Ziffern aller Addenden addiert, also t und t, h und h, z und z, dann ebenso E und E, Z und Z usf. Werden zu diesem Zwecke die Addenden untereinander geschrieben, so hat man darauf zu achten, daß Dezimalpunkt unter Dezimalpunkt zu stehen kommt, z unter z, h unter h, E unter E usf. Hat eine der zu addierenden Dezimalzahlen weniger Stellen als die anderen Summanden, so werden die fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt oder ergänzt gedacht, denn es bleibt der Wert der Dezimalzahl ungeändert, ob man z. B. 0 Hundertstel, 0 Tausendstel usf. addiert oder wegläßt.

§ 4. Die Subtraktion unbenannter und einnamiger Zahlen.

Die Subtraktion*) ist die zweite der vier Grundrechnungsarten. Dieselbe lehrt zu zwei gegebenen Zahlen, dem Minuend und dem Subtrahend, eine dritte, die Differenz, auch Unterschied oder Rest genannt, finden, welche, zu dem Subtrahend addiert, den Minuend gibt. Minuend und Subtrahend werden durch das Zeichen — verbunden.

*) Subtraktion (lat.) bedeutet das Abziehen.

Z. B. 11 — 5 heißt von 11 Einheiten 5 Einheiten abziehen.

11 — 5 = 6; oder 11 . . . . = Minuend
— 5 . . . . = Subtrahend
6 . . . . = Differenz oder Rest (Unterschied).

1. Die Subtraktion ganzer Zahlen.

Das Verfahren bei der Subtraktion mehrzifferiger ganzer Zahlen besteht darin, daß man die einzelnen Ziffern des Subtrahends von den gleichstelligen des Minuends abzieht. Ist eine solche Ziffer des Minuends kleiner als die ihr entsprechende des Subtrahends, so muß erstere um 10 Einheiten, d. i. um eine Einheit der nächst höheren Ordnung vermehrt werden, um die Subtraktion ausführen zu können.

Z. B. 824 — 416. 6 E des Subtrahends kann man von 4 E des Minuends nicht abziehen; man muß also nach obiger Regel eine Einheit der nächst höheren Ordnung, d. i. 1 Z des Minuends in 10 E auflösen und diese zu den 4 E addieren. Von den so erhaltenen 14 E des Minuends werden sodann die 6 E des Subtrahends in Abzug gebracht, wobei man 8 E als Differenz erhält. Die zweite Stelle des Minuends ist auf diese Weise um eine Einheit (1 Z) kleiner geworden; wir sollten also bei der Fortsetzung der Subtraktion nunmehr 1 Z des Subtrahends von 1 Z des Minuends abziehen und erhalten 0 Z als zweite Stelle der Differenz.

Für die zu suchende Differenz ist es nun gleichgiltig, ob wir die eine Einheit des Minuends, welche wir, um die Subtraktion zu ermöglichen, in 10 Einheiten der niederen Ordnung auflösen mußten, entweder von dieser höheren Ordnung des Minuends als abgezogen betrachten, oder ob wir diese Einheit zur nächsten Stelle des Subtrahends addieren und die so erhaltene Summe von der unveränderten gleichstelligen Ziffer des Minuends in Abzug bringen.

Man spricht also unter Einhaltung des letzteren Vorganges in dem Beispiele:

30123	4 und **9** ist 13, bleibt eins
— 17864	und 6 ist 7 und **5** ist 12, bleibt eins
12259	und 8 ist 9 und **2** ist 11, bleibt eins
	und 7 ist 8 und **2** ist 10, bleibt eins
	und 1 ist 2 und **1** ist 3.

2. Die Subtraktion von Dezimalzahlen.

a)	*b)*	*c)*	*d)*
4·832	33·07	$497{\cdot}^{000}$	535·632
— 1·753	— $0{\cdot}3^{0}$	— 0·613	— $44{\cdot}^{000}$
3·079	32·77	496·387	491·632

Dezimalzahlen werden wie ganze Zahlen subtrahiert, nur hat man darauf zu achten, daß Dezimalpunkt unter Dezimalpunkt zu stehen kommt, wenn Minuend und Subtrahend untereinander geschrieben werden. Hat eine der Dezimalzahlen weniger Stellen als die andere oder ist sie überhaupt eine ganze Zahl, so hat man sich die fehlenden Stellen durch Nullen ersetzt zu denken, denn eine Dezimalzahl bleibt ungeändert, wenn man 0 z, 0 h, 0 t usw. zu ihr hinzuzählt.

Sind einnamige benannte Zahlen voneinander abzuziehen, so behält auch der Rest die gleiche Bezeichnung bei.

Z. B.	*a)*	*b)*	*c)*
	24·30 *K*	33·07 *ha*	967·01 *m*
	— 21·07 „	— 0·3 „	— 216·88 „
	3·23 *K*	32·77 *ha*	750·13 *m*

§ 5. Die Multiplikation unbenannter und einnamiger Zahlen.

Die Multiplikation*) ist die dritte der arithmetischen Grundoperationen.

Multiplizieren heißt eine Zahl so oftmal als Addend setzen, als eine zweite Zahl anzeigt. Die Zahl, welche multipliziert, d. i. vervielfacht werden soll, heißt der Multiplikand und jene Zahl, mit welcher multipliziert wird, der Multiplikator. Multiplikand und Multiplikator führen auch den gemeinsamen Namen Faktoren; das Ergebnis der Multiplikation wird Produkt genannt. Als Multiplikationszeichen dient das Zeichen $\times$ oder auch ein Punkt zwischen den Faktoren.

Da jedes Produkt, dem Wesen der Multiplikation entsprechend, eine Summe von soviel gleich großen Summanden ist, als der Multiplikator anzeigt, so ist die Multiplikation eigentlich nichts anderes als eine abgekürzte Addition. In dem speziellen Beispiele $4 \times 6 = 4 . 6$ ist das Resultat gegeben durch $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$.

1. *Die Multiplikation ganzer Zahlen.*

a) $181 \times 4 = 724$.

Um 181 mit 4 zu multiplizieren, muß man, der Zahlenbildung entsprechend, zuerst die E, dann die Z und schließlich die H mit 4 multiplizieren und aus den erhaltenen Teilprodukten die Summe bilden.

Man hat sonach:

$$\begin{aligned} 181 &= \text{Multiplikand} \\ 4 &= \text{Multiplikator} \\ 724 &= \text{Produkt.} \end{aligned}$$

$$181 \times 4 = \begin{cases} 1\,E \times 4 = \;.\;\;.\;\;4 \\ 8\,Z \times 4 = 3\;\;2\;\;. \\ 1\,H \times 4 = 4\;\;.\;\;. \end{cases} \quad (H\;Z\;E)$$

$$181 \times 4 = 7\;\;2\;\;4$$

Daraus ergibt sich die Regel: Eine mehrstellige Zahl wird mit einer einziffrigen Zahl multipliziert, wenn man, bei den Einern beginnend, der Reihe nach zuerst Einer, dann Zehner, Hunderter usf. der mehrstelligen Zahl mit der einziffrigen multipliziert und die erhaltenen Teilprodukte anschreibt, sofern keines mehr als 9 beträgt; enthält aber ein Teilprodukt einen, zwei oder mehrere Zehner, so werden dem nächstfolgenden Teilprodukte ebensoviele Einheiten zugezählt.

b) Sind beide Faktoren mehrstellige Zahlen, so multipliziert man den ganzen Multiplikand der Reihe nach zuerst mit den E, dann mit den Z, dann mit den H des Multiplikators usf. Die erhaltenen Teilprodukte müssen jedoch ihrem Werte entsprechend angeschrieben werden, also das Teilprodukt aus Multiplikand mit den E des Multiplikators an erster Stelle, darunter um eine Stelle gegen links das Teilprodukt aus Multiplikand mit den Z des Multiplikators, darunter um eine Stelle nach links das Teilprodukt aus Multiplikand mit den H des Multiplikators usf.

---

*) Multiplikation (lat.) = Vervielfachung.

Z. B. 3486 × 375

17430 . . . . Teilprodukt aus: Multiplikand mit E des Multiplikators.
24402 . . . . . " " " " Z " "
10458 . . . . . . " " " " H " "
1307250 . . . . Produkt aus 3486 × 375.

Man erhält hiernach so viele Teilprodukte als der Multiplikator Stellen hat. Die Summe aller Teilprodukte gibt das Produkt aus Multiplikand und Multiplikator.

Für die Richtigkeit des Ergebnisses bleibt es gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man die Ziffern des Muliplikators zur Multiplikation mit dem Multiplikand verwendet. Man kann ebensogut mit der höchsten Stelle des Multiplikators beginnen, nur müssen die folgenden Teilprodukte in diesem Falle stets um je eine Stelle gegen rechts untereinander angesetzt werden.

Z. B. 2375 × 348

7125 . . . . . . Teilprodukt aus 2375 × 3 (H des Multiplikators)
9500 . . . . . " " 2375 × 4 (Z " ")
19000 . . . . " " 2375 × 8 (E " ")
826500

Ist eine Zahl mit 0 zu multiplizieren, so ist das Produkt Null, denn nach dem Begriffe der Multiplikation heißt z. B. 5 × 0 die Zahl 5 0 mal, also keinmal als Addend setzen, was offenbar 0 ergibt. Kommt daher unter den Ziffern des Multiplikators 0 vor, so gibt diese mit dem Multiplikand multipliziert, nur Nullen als Teilprodukt. Aus diesem Grunde wird die Multiplikation mit jeder 0 des Multiplikators übergangen, dafür aber das nächste Teilprodukt um zwei Stellen vorgerückt, wenn zwischen zwei Ziffern des Multiplikators eine 0, um drei Stellen, wenn zwischen zwei Ziffern des Multiplikators zwei Nullen stehen usw., weil die Teilprodukte der multiplizierenden Ziffern einen um so höheren oder niedrigeren Rang erhalten, je mehr Nullen zwischen ihnen und der nächst vorhergehenden multiplizierenden Ziffer stehen.

347 × 203	oder	347 × 203
1041		694 . .
694 . .		1041
70441		70441

Aus Vorstehendem folgt die Regel: Zwei mehrstellige Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man den ganzen Multiplikand der Reihe nach mit den E, Z, H usf. des Multiplikators multipliziert, wobei man auch bei der höchsten Stelle beginnen kann. Die einzelnen Teilprodukte werden entsprechend untereinander geschrieben, also jedes folgende entweder um eine Stelle gegen links, oder, wenn man mit der höchsten Stelle des Multiplikators begonnen hat, um eine Stelle gegen rechts. Enthält der Multiplikator Nullen, so übergeht man diese, schreibt aber das nächste Teilprodukt auch dem entsprechend weiter nach links, beziehungsweise nach rechts. Die Summe der Teilprodukte ist das Produkt der beiden Zahlen.

2. *Die Multiplikation von Dezimalzahlen.*

A. Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer ganzen Zahl.

63·296 × 43		T H Z E z h t
189888	3 × 6 t = 18 t =	. . . . . 1 8
253184	3 × 9 h = 27 h =	. . . . 2 7
2721·728	3 × 2 z = 6 z =	. . . . 6 . .
	3 × 3 E = 9 E =	. . . 9 . . .
	3 × 6 Z = 18 Z =	. 1 8 . . . .

Teilprodukt des Multiplikands mit den Einern des Multiplikators = . 1 8 9· 8 8 8 = 189·888

(4 Zehner = 40 Einer);	40 × 6 t = 240 t =	. . . . 2 4 0
	40 × 9 h = 360 h =	. . . 3 6 0 .
	40 × 2 z = 80 z =	. . . 8 0 . .
	40 × 3 E = 120 E =	. 1 2 0 . . .
	40 × 6 Z = 240 Z =	2 4 0 . . . .

Teilprodukt des Multiplikands mit den Zehnern des Multiplikators = 2 5 3 1· 8 4 0 = 2531·840

Die Summe dieser beiden Teilprodukte gibt das ganze Produkt = 2721·728.

Daraus folgt die Regel: Eine Dezimalzahl wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man die erstere als ganze Zahl betrachtet, vom erhaltenen Produkte aber so viele Dezimalen abstreicht, als die Dezimalzahl enthält.

B. Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer Dezimalzahl.

a) 0·1 = 0·1, d. h. 0·1 soll ein Zehntel-mal als Addend gesetzt werden, das gibt ein Zehntel von einem Zehntel = 0·01, sonach: z × z = h.

b) 0·01 × 0·1, d. h. 0·01 soll ein Zehntel-mal als Addend gesetzt werden, das gibt ein Zehntel von einem Hundertstel, also ein Tausendstel = 0·001, sonach: h × z = t.

c) 0·01 · 0·01, d. h. 0·01 soll ein Hundertstel-mal als Addend gesetzt werden, das gibt ein Hundertstel von einem Hundertstel, also ein Zehntausendstel = 0·0001, sonach: h × h = zt usf.

d)

3·45 × 2·14		E· z h t zt	
1380	4 h × 5 h = 20 zt =	. . . . . . 2 0	
345	4 h × 4 z = 16 t =	. . . . . 1 6 .	
690	4 h × 3 E = 12 h =	. . . . 1 2 . .	0· 1 3 8 0
7·3830	1 z × 5 h = 5 t =	. . . . . . 5 .	
	1 z × 4 z = 4 h =	. . . . . 4 . .	
	1 z × 3 E = 3 z =	. . . . 3 . . .	0· 3 4 5
	2 E × 5 h = 10 h =	. . . . 1 0 . .	
	2 E × 4 z = 8 z =	. . . . 8 . . .	
	2 E × 3 E = 6 E =	. . . 6	6· 9 0
		7· 3 8 3 0	= 7· 3 8 3 0

Das ganze Produkt besteht also aus 7 E·, 3 z, 8 h, 3 t, 0 zt = 7· 3 8 3 0

Daraus folgt die Regel: Zwei Dezimalzahlen werden miteinander multipliziert, indem man wie mit ganzen Zahlen verfährt und von dem

Produkte so viele Dezimalen abstreicht, als Multiplikand und Multiplikator zusammengenommen besitzen.

3. Rechnungsvorteile beim Multiplizieren.

1. Enthält der Multiplikator die Ziffer 1, so betrachtet man den Multiplikand schon als Teilprodukt mit dieser Ziffer und schreibt die anderen Teilprodukte in entsprechender Reihenfolge darunter. Z. B.

a) 90361 × 31
271083
―――――
2801191

b) 2348 × 213
 7044
4696
―――――
500124

2. Ist eine Zahl mit 10, 100, 1000 usw. zu multiplizieren, so geschieht dies, indem man der Zahl 1, 2, 3 usf. Nullen anhängt. Ist aber der Multiplikand ein Dezimalbruch, so schiebt man den Dezimalpunkt um 1, 2, 3 usw. Stellen weiter nach rechts.

a) $283 \times 100 = 28300$. *b)* $2{\cdot}3401 \times 1000 = 2340{\cdot}1$.

3. Eine Zahl mit 0·1, 0·01, 0·001 usw. multiplizieren, heißt ihren 10ten, 100sten, 1000sten usw. Teil nehmen, also bei einer ganzen Zahl 1, 2, 3 usf. Dezimalen abstreichen, oder bei einer Dezimalzahl den Dezimalpunkt um 1, 2, 3 usf. Stellen gegen links verschieben.

a) $3846 \times 0{\cdot}01 = 38{\cdot}46$. *b)* $4{\cdot}673 \times 0{\cdot}001 = 0{\cdot}004673$.

§ 6. Die Division unbenannter und einnamiger Zahlen.

Die Division*) ist die vierte der elementaren Rechnungsarten.

Dividieren heißt eine Zahl suchen, welche in einer gegebenen Zahl, dem Dividend, so oftmal enthalten ist, als eine zweite gegebene Zahl, der Divisor, angibt. Die gesuchte Zahl heißt Quotient.

Um anzudeuten, daß eine Zahl durch eine andere dividiert werden soll, setzt man das Divisionszeichen : so dazwischen, daß der Divisor rechts und der Dividend links von demselben zu stehen kommt; z. B. $36 : 9 = 4$. Auch deutet man die Division durch einen Bruchstrich (vgl. § 19) an, und zwar so, daß der Dividend oberhalb und der Divisor unterhalb des Bruchstriches erscheint; z. B. $8 : 4 = \frac{8}{4} = 2$.

1. Die Division ganzer Zahlen.

Bei der Division (Teilung) einer Zahl, z. B. 4240, durch eine zweite Zahl, z. B. 4, geht man in der Weise vor, daß man untersucht, wie oftmal der Divisor 4 in den einzelnen Bestandteilen des Dividends, also in den Tausendern, Hundertern, Zehnern und Einern (bei Dezimalzahlen auch in den Zehnteln, Hundertsteln, Tausendsteln usw.) enthalten ist; die Summe der einzelnen Quotienten muß offenbar den Gesamtquotienten zwischen dem gegebenen Dividend und Divisor ergeben.

a) $28 : 4 = 7$. Zu sprechen ist: 4 in 28 ist 7 mal enthalten; 4 mal 7 gibt 28; 28 vom Dividend 28 abgezogen gibt Null, d. h. es bleibt kein Rest.
28
―
=

28 = Dividend
4 = Divisor
7 = Quotient.

*) Division (lat.) bedeudet Teilung.

b) 297 : 4 = 74.
(4 . 7) = 28
= 17
(4 . 4) = 16
= 1 Rest

29 Z : 4 = 7 Z, 4 × 7 = 28, 29 — 28 = 1; es bleibt daher 1 Z., hiezu 7 E, gibt 17 E, 17 E : 4 = 4 E; 4 × 4 = 16, 17 — 16 = 1, es bleibt daher 1 E als Rest.

c) 165 : 5 = 33.
15
= 15
15

Zu sprechen ist: 5 in 16 **3** mal, 3 mal 5 = 15; 16 — 15 = 1, 5 dazu gibt 15; 5 in 15 **3** mal, 3 mal 5 = 15, 15 von 15 gibt Null.

Die Teilprodukte aus jeder Ziffer des Quotienten mit dem Divisor werden gewöhnlich nicht angeschrieben, sondern s o f o r t während der Multiplikation von dem entsprechenden Teile des Dividends in Abzug gebracht.

d) 64515 : 75 = 860.
= 451
= 15

Man spricht: 75 in 645 8 mal; 8 mal 5 = 40, und **5** gibt 45, bleibt 4, 8 × 7 = 56, und 4 ist 60 und **4** gibt 64. Zu diesem Reste 45 die nächste Ziffer 1 des Dividends dazu, gibt 451; 75 in 451 6 mal; 6 mal 5 = 30, und **1** gibt 31, bleibt 3, 6 × 7 = = 42, und 3 ist 45 und **0** gibt 45; 5 herab gibt 15.
75 in 15, 0 mal; 0 × 5 = 0, und **5** ist 5,
0 × 7 = 0, und **1** ist 1;
es bleibt also der Rest **15**.

Aus diesen Beispielen folgt für die Division mehrstelliger Zahlen die R e g e l: Man beginnt bei der Division mit den höchsten Stellen des Dividends und nimmt als ersten Teildividend ebensoviele Stellen, als der Divisor Stellen hat, oder um eine Stelle mehr, wenn der Divisor größer wäre als der ebenso vielstellige Teildividend und untersucht, wie oft der Divisor in diesem Teildividend enthalten ist. Der erhaltene Quotient wird mit dem Divisor multipliziert und vom ersten Teildividend abgezogen. Zu diesem Reste setzt man die nächste Stelle des Dividends herab und erhält so den zweiten Teildividend. Nun untersucht man abermals, wie oft der Divisor in diesem enthalten ist und zieht das Produkt aus dem Divisor mit der letzterhaltenen Ziffer des Quotienten vom Teildividend ab. Zu dem so erhaltenen Reste die nächste Stelle des Dividends herabgesetzt gibt den dritten Teildividend usf.

Nach Abzug des letzten Teilproduktes vom letzten Teildividend bleibt entweder ein Rest oder „die Division geht auf". Der Stellenwert der ersten Ziffer des Quotienten ist gegeben durch den Stellenwert der niedrigsten Stelle des ersten Teildividends.

Aus dem Begriffe der Division folgt, daß das Produkt aus dem Divisor und dem Quotienten gleich dem Dividenden ist, wenn bei der Division kein Rest geblieben ist. Ist ein solcher geblieben, so ist der Dividend gleich dem Produkte aus Divisor und Quotient vermehrt um den Rest.

Ferner folgt aus dem Begriffe der Division, daß, wenn man den Dividenden durch den Quotienten teilt, der Divisor als Quotient herauskommt.

2. Die Division von Dezimalzahlen.

A. Division einer Dezimalzahl durch eine ganze Zahl.

a) 96·3147 : 3 = 32·1049.
6
3
1
14
27

9 Z : 3 = 3 Z
6 E : 3 = 2 E
3 z : 3 = 1 z
1 h : 3 = 0 h
14 t : 3 = 4 t
27 zt : 3 = 9 zt

b) 0·7764 : 24 = 0·03235.
77
56
84
120

0 E : 24 = 0 E
7 z : 24 = 0 z
77 h : 24 = 3 h
56 t : 24 = 2 t
84 zt : 24 = 3 zt
120 ht : 24 = 5 ht.

Hieraus folgt für die Division von Dezimalzahlen durch ein- oder mehrziffrige ganze Zahlen die Regel: Man dividiert zuerst die ganzen Zahlen durch den Divisor und setzt im Quotienten den Dezimalpunkt an, sobald man Dezimalen des Dividends zur Division verwendet und führt die Division nach der bereits bekannten Weise weiter aus. Sollte nach Herabsetzung der letzten Ziffer des Dividends zum letzten Teildividend noch ein Rest bleiben, dann fügt man zu diesem eine Null hinzu und fährt mit dem Herabsetzen der Nullen so lange fort, bis die Division entweder ohne Rest aufgeht, oder die verlangte Anzahl von Dezimalstellen erscheint. Auch in diesem letzteren Falle berechnet man aber noch die nächstfolgende Stelle und nimmt nach dieser für die letzte geforderte Dezimale die sogenannte Korrektur, d. h. man erhöht diese Stelle um 1, wenn die nächstfolgende, welche bereits wegzulassen ist, größer wäre als 5, oder man läßt die letzte verlangte Dezimale unverändert, wenn die folgende gleich oder kleiner als 5 sein sollte.*) Hiernach lautet z. B. der Quotient aus 3842·7 : 23 = 167·07391 mit der Korrektur auf 2 Dezimalen 167·07 und mit der Korrektur auf 3 Dezimalen 167·074.

154
162
170
90
210
30

Da eine ganze Zahl als eine Dezimalzahl mit beliebig vielen Dezimalen vom Ziffernwerte 0 aufgefaßt werden kann (z. B. 73·000 . . .), läßt sich natürlich auch der Quotient aus einem Dividenden, der eine ganze Zahl ist, nach obiger Regel auf beliebig viele Dezimalen entwickeln, wenn die Division nicht ohne Rest aufgeht.

B. Division einer Dezimalzahl durch eine Dezimalzahl.

a) 8 : 2 = 4
80 : 20 = 4
800 : 200 = 4

(Dividend und Divisor mit 10, 100 usf. multipliziert.)

*) Die Begründung für diese Erhöhung des Quotienten durch die „Korrektur" läßt sich damit erbringen, daß der Fehler, welcher durch die Korrektur begangen wird, kleiner ist, als jener, welchen man begehen würde, wenn man bei einer geforderten Anzahl von Dezimalen alle folgenden Stellen, die größer sind als 0·5 der vorhergehenden Dezimale, unberücksichtigt ließe.

Daraus folgt die Regel: Der Quotient bleibt unverändert, wenn man Dividend und Divisor mit einer und derselben Zahl (10, 100 usf.) multipliziert. Hiernach ist:

b) 7·2 : 2·4 = 72 : 24 = 3. *c)* 1·44 : 1·2 = 14·4 : 12 = 1·2.
24

d) 0·8 : 8·22 = 80 : 822 = 0·0973236 . . . . . .
0
0
6020
2660
1940
2960
4940
.
.
.

Daraus folgt die Regel: Eine Dezimalzahl wird durch eine Dezimalzahl dividiert, indem man Dividend und Divisor, je nachdem der letztere 1, 2, 3 usf. Dezimalen besitzt, mit 10, 100, 1000 usf. multipliziert, d. i. den Divisor in eine ganze Zahl verwandelt und nun die Division auf die bereits bekannte Art weiter ausführt.

3. *Rechnungsvorteile beim Dividieren.*

1. Eine ganze Zahl oder Dezimalzahl wird durch 10, 100, 1000 usf. dividiert, indem man 1, 2, 3 usf. Dezimalstellen abschneidet, beziehungsweise den Dezimalpunkt um 1, 2, 3 usf. Stellen gegen links schiebt.

Z. B. 28 : 10 = 2·8, 3·41 : 100 = 0·0341, 0·2417 : 1000 = 0·0002417 usf.

2. Eine Zahl wird durch 25 dividiert, indem man die Zahl mit 4 multipliziert und das Produkt hierauf durch 100 dividiert.

Z. B. 83 : 25 = { 83 × 4
332 : 100, und ebenso ist
= 3·32 }

83 : 25 = 3·32
80
50

3. Eine Zahl wird durch 125 dividiert, indem man die Zahl mit 8 multipliziert und das Produkt sodann durch 1000 dividiert.

Z. B. 172 : 125 = { 172 × 8
1376 : 1000, und ebenso ist
= 1·376 }

172 : 125 = 1·376
470
950
750

4. Eine Zahl wird mit 25 multipliziert, indem man dieselbe mit 100 multipliziert und dieses Produkt durch 4 dividiert.

Z. B. 63 × 25 = { 63 × 100
6300 : 4, und ebenso ist
= 1575 }

63 × 25
315
126
1575

§ 7. Aufgaben für das Rechnen mit unbenannten und einnamigen Zahlen.

1. Folgende Zahlen sind zu addieren:

a) 3 + 4965 + 243 + 25; *b)* 10002 + 30007 + 5 + 370; *c)* 7483204 + 851 + 1000363 + + 2; *d)* 5·83 + 63·41 + 8421·13; *e)* 1·4 + 93·7414 + 104 + 64732·01; *f)* 0·0000001 + 744·32 + + 649 + 4363100·75196.

2. Folgende Zahlen sind zu subtrahieren:

a) 648 — 79; *b)* 643259 — 49721; *c)* 1000472 — 400; *d)* 743·51 — 615·30; *e)* 517 — — 31·472; *f)* 747·315 — 731; *g)* 0·001459 — 0·00004; *h)* von der Zahl 405631 ist die Gesamtheit der Zahlen 478·32 + 0·715 + 14 + 331 zu subtrahieren.

3. Folgende Multiplikationen sind auszuführen:

a) 785 × 9; *b)* 84169 × 7523; *c)* 7932 × 102; *d)* 8149 × 70043; *e)* 8141976 × 900005; *f)* 44·71 × 13; *g)* 0·5863 × 424; *h)* 0·000041 × 42; *i)* 63 × 0·15; *k)* 3·14876 × 1·83; *l)* 0·00532 × 8·400012; *m)* 20·587 × 38·1149; *n)* 0·013 × 100; *o)* 47·1032 × 10000; *p)* 4173·155 × 5000; *q)* 0·31 × 7000000; *r)* 433 × 0·01; *s)* 743·625 × 0·001; *t)* 0·000132 × × 0·000001; *u)* 433·51 × 11; *v)* 71649·502 × 11; *w)* 0·00512 × 111. Die Aufgaben *n* bis *w* sind mit Rechnungsvorteilen zu lösen.

4. Folgende Zahlen sind zu dividieren:

a) 936 : 3; *b)* 31924 : 92; *c)* 26172 : 727; *d)* 1000230 : 1005; *e)* 152·5 : 5; *f)* 2149·09526 : : 599; *g)* 7·00035 : 6195; *h)* 1 : 2880 mit Korrektur auf 6 Stellen.

In der letzteren Aufgabe behandelt man 1 als Dezimalbruch mit beliebig vielen Stellen mit der Ziffer 0; man hat dann 1 : 2880 = 0·0003472 . , auf 6 Stellen 0·000347.

0000
13600
20800
6400

i) 1 : 5760 wie bei *h*; *k)* mache in den Aufgaben *e* bis *i* die Probe, ob die Division richtig ist; *l)* 5·615 : 0·5; *m)* 5·615 : 0·00005; *n)* 0·01 : 7·2459 mit Korrektur auf 6 Stellen; *o)* 270·2146 : 8·69; *p)* 0·784 : 3·08; *q)* 3·889914 : 0·00917; *r)* 1 : 747·325; *s)* 28 : 10; *t)* 14·37 : : 100; *u)* 0·000125 : 10000; *v)* 1 : 1000000; *w)* 614·5 : 25; *x)* 0·00675 : 25; *y)* 1·759625 : 125; *z)* 1 : 125; *aa)* 614·5 × 25; *bb)* 0·00147 × 125. Die Aufgaben *s)—bb)* sind mit Rechnungsvorteilen zu lösen.

5. Wortaufgaben zur Übung in den vier Grundrechnungsarten an einnamigen Zahlen.

Die folgenden Aufgaben dienen gleichzeitig dazu, Vernunftsschlüsse zu üben und eine notwendige Vorbereitung für die folgenden Kapitel, insbesondere für die Schlußrechnung zu geben.

1. 1 *fm**) Holz kostet 10·5 *K*; wieviel kosten *a)* 2 *fm*, *b)* 4 *fm*, *c)* 19·75 *fm*, *d)* 3·02 *fm*, *e)* 1147·35 *fm*?

2. Ein Holzschlag wurde pro 1 *ha* mit 520 *fm* Holz eingeschätzt; wieviel Holz wird dieser Schlag liefern, wenn er 3·65 *ha* groß ist?

3. Die Aufforstungskosten einer Waldfläche betrugen in früheren Jahren pro *ha* 43·25 *K*; wie hoch stellen sich die Kosten für eine neuerdings aufzuforstende Fläche von 21·08 *ha*?

4. 1 *rm* Scheitholz besitzt durchschnittlich 0·75 m^3 feste Holzmasse, d. i. *fm*; wieviel *fm* sind demnach *a)* 2 *rm*, *b)* 15·5 *rm*, *c)* 21·25 *rm*, *d)* 2000·75 *rm*?

5. Um 1 m^3,**) Bruchsteine zu erzeugen, sind 0·22 Steinbrechertagschichten erforderlich; wie lang muß ein Steinbrecher arbeiten, um *a)* 5 m^3, *b)* 10·5 m^3, *c)* 123·75 m^3 Bruchsteine zu erzeugen?

6. Um 1 Längenmeter Langholz von 0·20 *m* mittlerem Durchmesser 4kantig zu behauen, braucht ein Zimmermann 0·125 Tagschichten; für welche Dauer muß man einen Zimmermann aufnehmen, wenn derselbe 15 Stück 8·5 *m* lange Stammstücke von 0·20 *m* Stärke bezimmern soll?

7. Jemand kauft 318 *ha* Wald à 425 *K*, 121·55 *ha* Wiesen à 715 *K*, 32·07 *ha* Acker à 824·5 *K*; wieviel *ha* hat er gekauft und wieviel hatte er zu zahlen?

8. Für die Ausführung einer Holzsaat im Freien sind pro 1 *ha* erforderlich: *a)* Leichtes Abschälen des Bodenüberzuges mit der Breithaue 30 Tagewerke, *b)* Umhacken des Bodens auf 0·15 *m* Tiefe 65 Tagewerke. Wieviel Tagschichten sind für eine Fläche von 1·05 *ha* erforderlich und wie hoch belaufen sich die Kosten für die Bodenbearbeitung, wenn der Taglohn 1·80 *K* beträgt?

9. Wie hoch sind die Gesamtkosten für die Aussaat auf der Fläche in Aufgabe 8, wenn zur Bodenbearbeitung noch hinzutreten: *c)* Ankauf von pro 1 *ha* 14 *kg* Fichtensamen

*) 1 *fm* (sprich Festmeter), oder kurz das Zeichen *fm* bedeutet soviel wie 1 m^3 fester Holzmasse, zum Unterschiede von 1 *rm* (sprich 1 Raummeter), der wohl auch den äußeren Inhalt eines Kubikmeters besitzt, aber, weil er aufgeschlichtet ist, Zwischenräume zwischen den einzelnen Scheitstücken aufweist und daher an reiner, fester Holzmasse weniger enthält als 1 *fm*.

**) m^3 ist das Zeichen für Kubikmeter, insofern es sich nicht um Holz handelt.

à 1·6 *K*; *d)* Aussaat und Bedeckung des Samens mit dem Rechen mit pro 1 *ha* 10 Weibertagschichten à 1·10 *K*?

10. Zu einer Pflanzung mit 3jährigen Fichtenpflanzen braucht man pro 1 *ha* 4444 Pflanzen. Wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn die Kulturfläche 0·72 *ha* groß ist und folgende Anhaltspunkte gegeben sind: *a)* für das Herstellen der Löcher mit der Haue pro Pflanze 0·002 Tagschichten à 1·60 *K*; *b)* für das Einsetzen einer Pflanze 0·004 Weibertagschichten à 1·10 *K*; *c)* Ankauf pro Pflanze 0·006 *K*.

11. Die Holzabmaß in einem Schlage hat ergeben: 425·35 *fm* Bau- und Klotzholz, 35 Stangen à 0·1131 *fm*, 74·5 *rm* Scheitholz à 0·80 *fm* und 25 *rm* Prügelholz à 0·75 *fm*. Wieviel beträgt die Holzmasse in *fm* und wie hoch ist der Erlös für den genannten Schlag, wenn 1 *fm* Bau- und Klotzholz mit 10·50 *K*, 1 *fm* Stangen mit 9 *K*, 1 *rm* Scheitholz mit 6·20 *K* und 1 *rm* Prügel mit 4·50 *K* bezahlt wird?

12. Wie hoch kommt in dem vorstehenden Beispiele der Holzhauerlohn, wenn derselbe pro *fm* Bau- und Klotzholz mit 0·50 *K*, pro 1 *fm* Stangen mit 0·85 *K*, pro 1 *rm* Scheiter und Prügel mit je 0·82 *K* festgesetzt wurde?

13. Für 8 *fm* Holz wurde ein Erlös von 64 *K* erzielt; wie hoch wurde 1 *fm* bezahlt?

14. 1 *rm* Scheitholz kostet 6·5 *K*; wieviel *rm* erhält man für 99·06 *K*?

Schluß: Für 99·06 *K* erhält man soviel *rm*, als der Preis für 1 *rm*, d. i. 6·5 *K*, in 99·06 *K* enthalten ist.

15. Die Aufforstungskosten eines Schlages von 1·95 *ha* Größe stellten sich auf 86·10 *K*; wie hoch sind die Kosten pro 1 *ha*?

16. Nach vorgenommenen Untersuchungen enthielt 1 *rm* 1 *m* langes Fichtenscheitholz 0·77 *fm*, 1 *rm* Prügel 0·81 *fm* und 1 *rm* Stockholz 0·57 *fm*; wie viel *rm* Scheiter, Prügel und Stockholz gehen auf je 1 *fm* des zu den genannten Sortimenten aufzuarbeitenden Holzes? Wieviel *rm* geben 257·55 *fm* zu Scheitern aufzuarbeitenden Holzes?

17. Aus einem 1·55 *ha* großen Schlage wurden gewonnen 524·35 *fm* Nutzholz und 429·5 *rm* à 0·7 *fm* Brennholz. Wieviel Nutzholz in *fm* und Brennholz in *rm* sind pro 1 *ha* aus einem unter gleichen Verhältnissen befindlichen neuen Schlage zu gewärtigen und wieviel macht der pro 1 *ha* zu gewärtigende Holzanfall in *fm* aus?

18. Ein Jagdsteig von 525·5 *m* Länge hat zu seiner Herstellung einen Aufwand von 105·10 *K* verursacht. Wie hoch kommt 1 *m* des Jagdsteiges zu stehen und welche Kosten wird ein noch weiter herzustellendes Wegstück von 735 *m* erfordern?

19. Aus einem Forstkalender oder nach verläßlichen eigenen Erfahrungen ist bekannt, daß die Kulturkosten (Löchermachen und Setzen) für 1000 Stück Pflanzen 4·5 Tagwerke à 1·20 *K* betragen. Welche Kosten sind für eine Kulturfläche, auf welche 5200 Pflanzen kommen, zu veranschlagen, wenn man das Tausend Pflanzen mit 6 *K* käuflich erwerben muß?

20. Aus ämtlichen Rechnungen ist zu entnehmen, daß die Holzhauer in einem Schlage bei der Aufarbeitung von 734·05 *fm* Bauholz 491·81 *K* in einer Zeit ins Verdienen gebracht haben, in welcher jeder auf einen gebührenden Taglohn gekommen ist. Um welchen Betrag pro 1 *fm* kann das Bauholz in einem weiteren gleichen Schlage an die Holzhauer vergeben werden?

21. Für eine sogenannte Plätzesaat wären pro 1 *ha* 10·5 *kg* (Kilogramm) Fichtensamen erforderlich. Welche Fläche kann man ansäen, wenn der Samenvorrat *a)* 45·05 *kg*, *b)* 7·35 *kg* beträgt?

22. Eine Baustelle hat 2352·60 *K* gekostet, wenn 1 m^2 (Quadratmeter) mit 0·36 *K* bezahlt wurde; wieviel m^2 hat die Baustelle?

Weitere Aufgaben siehe beim Rechnen mit mehrnamigen Zahlen, Seite 25.

II. Kapitel.

Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

§ 8. Vorführung der Zahlenbenennungen: Maße, Gewichte und Münzen.

1. Allgemeines.

Wir unterscheiden Längen-, Flächen-, Körper- und Hohlmaße, dann Gewichte, ferner Zählmaße, dann die Zeit- und Bogenmaße und schließlich die Münzen.

Mit dem Gesetze vom 23. Juli 1871 wurde in Österreich eine neue Maß- und Gewichtsordnung eingeführt, deren ausschließliche Anwendung im öffentlichen Verkehre seit dem 1. Jänner 1876 vorgeschrieben ist. Die Grundlage dieses gesetzlichen Maßes und Gewichtes bildet das Meter. Dasselbe stellt den 40,000.000sten Teil der Länge eines Erdmeridians dar. Nach dem Meter wird die neue Maß- und Gewichtsordnung das metrische System genannt. Die Unterabteilungen der Maß- und Gewichtseinheiten sowie deren Vielfache werden nach dem dekadischen Zahlensysteme gebildet.

2. Längenmaße.

Nachdem, wie bereits erwähnt, der Bildung des metrischen Maßes das Zehnersystem zugrunde liegt, sind die Vielfachen entweder das 10-, 100-, 1000- oder 10.000fache. und die Unterabteilungen entweder der 10-, 100- oder 1000ste Teil der Einheit.

Die Vielfachen und Unterabteilungen aller metrischen Maße und Gewichte werden dadurch zum Ausdrucke gebracht, daß man für die betreffenden Vielfachen die entsprechenden griechischen Wörter, und für die Unterabteilungen die bezüglichen lateinischen Übersetzungen den Bezeichnungen für die Grundeinheiten voransetzt. Man sagt also für:

das 10fache der Einheit	Deka,	den 10. Teil der Einheit	deci,
100- „ „ „	Hekto,	100. „ „ „	centi,
1000- „ „ „	Kilo	1000. „ „ „	milli.
10.000- „ „ „	Myria, und für		

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter; die Vielfachen und Unterabteilungen lassen sich wie folgt darstellen:

Vielfache				Einheit	Unterabteilungen		
Myriameter	Kilometer	Hektometer	Dekameter	Meter	Dezimeter	Zentimeter	Millimeter
μm	*km*	*hm*	*dkm*	*m* *)	*dm*	*cm*	*mm*
1	10	100	1.000	10.000			
	1	10	100	1.000			
		1	10	100			
			1	10			
				1	10	100	1.000
				0·1	1	10	100
				0·01	0·1	1	10
				0.001	0·01	0·1	1

Jedes höhere Längenmaß enthält demnach 10 Einheiten des nächstniedrigen Maßes.

Das frühere Längenmaß, das sogenannte Wiener Maß, war folgendes: 1 Klafter (⁰) = 6 Fuß ('); 1' = 12 Zoll ("); 1" = 12 Linien (‴).

Bei Vermessungen galt als Einheit 1 Feldmeßkette (Kettenzug), 1 Kettenzug = 10⁰ = 100 Dezimal '**) = 1000 Dezimal " = 10.000 Dezimal ‴.

Beim Straßenmaß war die Einheit 1 Postmeile = 4000⁰; 1 geographische Meile = $^1/_{15}$ eines Äquatorgrades = 3912·74⁰.

Weitere Längenmaße haben bestanden: Für Kurzwaren mit der Elle als Einheit; 1 Elle = 29" und $6^1/_4$‴. Beim Pferdemaß mit einer Faust als Einheit; 1 Faust = 4" oder 16 Strich. Beim Schiffahrtsmaß mit der Seemeile als Einheit; 1 Seemeile = 976·3982⁰.

*) Die Buchstaben bedeuten die gesetzlich eingeführten Abkürzungen.
**) 1 Dezimalfuß = $^1/_{10}$ Klafter, 1 Dezimal" = $^1/_{10}$ Fuß, 1 Dezimal‴ = $^1/_{10}$ Zoll.

3. Flächenmaße.

Als allgemeine Flächenmaße gelten die Quadrate der Längenmaße. Die Einheit ist das Quadratmeter, das ist ein Quadrat, dessen Seite 1 *m* lang ist.

Vielfache				Einheit	Unterabteilungen		
Quadrat-myriameter	Quadrat-kilometer	Quadrat-hektometer	Quadrat-dekameter	Quadratmeter	Quadrat-dezimeter	Quadrat-zentimeter	Quadrat-millimeter
μm^2	km^2	hm^2 (ha)	dkm^2 (a)	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 =	100 =	10.000 =	1,000.000 =	100,000.000 =			
	1 =	100 =	10.000 =	1 000.000 =			
		1 =	100 =	10.000 =			
			1 =	100 =			
				1 =	100 =	10.000 =	1,000.000
				0·01 =	1 =	100 =	10.000
				0·0001 =	0·01 =	1 =	100
				0·000001 =	0·0001 =	0·01 =	1

Jedes höhere Flächenmaß enthält demnach 100 Einheiten des nächstniedrigeren Maßes.

Besondere Flächenmaße sind die Bodenflächenmaße, deren Einheit teils das Ar *(a)*, teils das Hektar *(ha)* bildet. Das Ar ist ein Quadrat von 10 *m*, das Hektar ein solches von 100 *m* Seitenlänge. Es ist demnach:

$$1\,a = 100\,m^2\ (1\,dkm^2),\ 1\,ha = 10.000\,m^2 = 100\,a\ (1\,hm^2).$$

Für forstliche Zwecke dient das Hektar als Bodenflächenmaß.

Das alte Flächenmaß (Wiener Maß) war folgendes:

1 Quadratklafter (□⁰) = 36□′; 1□′ = 144□″; 1□″ = 144‴. Das alte Bodenflächenmaß ist 1 niederösterreichisches Joch (J) = 1600□⁰; 1 Quadrat-Meile = 10 000 Joch.

4. Körpermaße.

Die allgemeinen Körpermaße sind die Würfel der Längenmaße. Als Einheit dient ein Würfel von 1 *m* Seitenlänge, ein Kubikmeter genannt.

Vielfache				Einheit	Unterabteilungen		
Kubik-myria-meter	Kubik-kilo-meter	Kubik-hekta-meter*)	Kubik-dekameter*)	Kubikmeter	Kubik-dezimeter	Kubik-zentimeter	Kubik-millimeter
μm^3	km^3	hm^3	dkm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1	1.000	1,000.000	1.000,000.000	1,,000.000,000.000			
	1	1.000	1,000.000	1.000,000.000			
		1	1.000	1,000.000			
			1	1.000			
				1	1.000	1,000.000	1.000,000.000
				0·001	1	1.000	1,000.000
				0·000001	0·001	1	1.000
				0·000000001	0·000001	0·001	1

Jedes höhere Körpermaß enthält demnach 1000 Einheiten des nächstniedrigeren Maßes.

Bei dem alten Körpermaße war die Einheit die Kubikklafter (☒⁰ oder C⁰) = 216 Kubikfuß; die Unterabteilungen waren folgende: 1 Kubikfuß *(c′)* = 1728 Kubikzoll *(c″)*; 1 Kubikzoll = 1728 Kubiklinien *(c‴)*; 1 Kubiklinie = 1728 Kubikpunkte *(c⁗)*.

Besondere Körpermaße sind:

---

*) Das hm^3 und dkm^3 entfallen in der österr. Maß- und Gewichtsordnung und sind deshalb nur zur Vervollständigung des Systems hier aufgenommen worden.

5. Hohlmaße.

Bei diesen ist sowohl für trockene als auch für flüssige Stoffe die **Einheit** das **Liter** *(l)*, d. i. der Rauminhalt eines Kubikdezimeters.

1 *l* = 1 dm^3; und weil 1000 dm^3 = 1 m^3, so sind 1000 *l* = 1 m^3.

Vielfache		Einheit	Unterabteilungen		
Kiloliter	Hektoliter	Liter	Deziliter	Zentiliter	Milliliter
kl	*hl*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*
1	10	1.000			
	1	100			
		1	10	100	1.000
		0·1	1	10	100
		0·01	0·1	1	10
		0·001	0·01	0·1	1

Für **größere Mengen fester Stoffe** gilt als **Einheit** das **Hektoliter** *(hl)* = 100 *l*; z. B. für manche Waldsamen, Getreide u. dgl.

6. Gewichte.

Die **Einheit** für die Gewichte bildet das **Kilogramm**, d. i. das Gewicht eines Kubikdezimeters (1 *l*) destillierten Wassers im luftleeren Raume bei der Temperatur von + 4° Celsius.

Vielfache		Einheit	Unterabteilungen				
Tonne	Meterzentner	Kilogramm	Dekagramm	Gramm	Dezigramm	Zentigramm	Milligramm
t	*q*	*kg*	*dkg*	*g*	*dg*	*cg*	*mg*
1	10	1.000					
	1	100					
		1	100	1.000	10.000	100.000	1,000.000
		0·01	1	10	100	1.000	10.000
		0·001	0·1	1	10	100	1.000
		0·0001	0·01	0·1	1	10	100
		0·00001	0·001	0·01	0·1	1	10
		0·000001	0·0001	0·001	0·01	0·1	1

Es verdient hier besonders festgehalten zu werden:

1 *q* = 100 *kg*, 1 *t* = 10 *q* = 1000 *kg*. Nachdem 1 m^3 = 1000 dm^3, so kann das Gewicht eines 1 m^3 Wasser unter gewöhnlichen Verhältnissen mit 1000 *kg* = 1 *t* angenommen werden.

7. Zählmaße.

a) Auf dem dekadischen Zahlensysteme beruhen folgende Zählmaße: 1 **Ballen** Papier hat 10 **Ries**, 1 Ries 10 **Buch**, 1 Buch 10 **Lagen**, 1 Lage 10 **Bogen**. Es hat also ein Ballen 10 . 10 . 10 . 10 = 10.000 Bogen.

b) Nicht nach der dekadischen Einteilung sind gebildet: 1 **Schock** hat 2 **Schilling**, 1 Schilling 2 **Mandel**, 1 Mandel 15 **Stück**. Es hat demnach 1 Schock 2 × 2 × 15 = 60 Stück.

1 **Gros** hat 12 **Dutzend**, 1 Dutzend 12 **Stück**. Es hat also 1 Gros 12 × 12 = 144 Stück.

8. Zeitmaße.

1 Jahr hat 12 Monate, oder 52 Wochen (und einen Tag), oder 365 Tage.*) 1 Woche hat 7 Tage, 1 Tag 24 Stunden (^{h}), 1 Stunde 60 Minuten (^{m}), 1 Minute 60 Sekunden. In der Rechnung nimmt man den Monat oft zu 4 Wochen oder auch zu 30 Tagen an.

9. Bogenmaße.

Bei den Bogenmaßen unterscheidet man zwei verschiedene Einteilungen, nämlich die alte Teilung oder Sexagesimalteilung und die neue oder Zentesimalteilung.

Nach der alten Teilung wird der Kreisumfang in 360 Teile oder Grade (^{0}), der Grad in 60 Minuten (′) und die Minute in 60 Sekunden (″) geteilt. Es ist sonach $1^0 = 60'$, $1' = 60''$.

Bei der neuen Teilung teilt man den Kreisumfang in 400 Grade (^{0}), den Grad in 100 Minuten (′) und die Minute in 100 Sekunden (″). Es ist somit $1^0 = 100'$, $1' = 100''$. Dieser 100ter Teilung hat den Vorteil, daß man sämtliche Bogenmaße als Dezimalzahlen anschreiben kann.

10. Das Münzsystem.

Durch die Gesetze vom 2. August 1892 wurde für Österreich-Ungarn die Kronenwährung vorgeschrieben.

Einheit dieser Währung ist die Krone *(K)* zu 100 Heller *(h)*.

An Münzen bestehen: Goldmünzen zu 20 und 10 Kronen, dann Dukaten; an Silbermünzen Fünfkronenstücke und Einkronenstücke; an Nickelmünzen 20- und 10-Hellerstücke; an Bronzemünzen 2- und 1-Hellerstücke. Die Einkronenstücke, sowie die Nickel- und Bronzemünzen sind Scheidemünzen. An Papiergeld bestehen: Banknoten zu 10, 20, 50, 100 und 1000 Kronen.

Bis zur Einführung der Kronenwährung galt in Österreich-Ungarn die österreichische Währung. Die Einheit dieser Währung war der Gulden (fl.) zu 100 Kreuzern (kr.) An geprägten Münzen der österreichischen Währung bestehen dermalen noch: In Silber: 1-Guldenstücke.

Bis zur gänzlichen Einziehung der alten Münzen haben zu gelten: 42 fl. Gold = 100 *K*, 1 fl. (Silber) = 2 Kronen.

§ 9. Das Resolvieren.

Resolvieren oder Auflösen nennt man das Verwandeln von Einheiten höherer Benennung in Einheiten niederer Benennung.

Wenn z. B. $2\,m$ in dm aufzulösen sind, so schließt man: $1\,m = 10\,dm$, folglich $2\,m = 2 \times 10\,dm = 20\,dm$.

Die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten niederer Benennung eine Einheit höherer Benennung enthält, heißt Verwandlungszahl. In unserem Beispiele ist 10 die Verwandlungszahl.

Das Resolvieren geschieht, wenn man die Zahl der höheren Benennung mit der Verwandlungszahl multipliziert.

Beispiele. Es sind aufzulösen:

a) $3{\cdot}5\,ha$ in m^2; $1\,ha = 10.000\,m^2$, $3{\cdot}5\,ha = 3{\cdot}5\,.\,10.000\,m^2 = 35.000\,m^2$.

b) $5{\cdot}35\,m^3$ in dm^3; $1\,m^3 = 1000\,dm^3$, $5{\cdot}35\,m^3 = 5{\cdot}35\,.\,1000\,dm^3 = 5350\,dm^3$.

c) $8{\cdot}055\,t$ in kg; $1\,t = 1000\,kg$, $8{\cdot}055\,t = 8{\cdot}055\,.\,1000\,kg = 8055\,kg$.

d) 12 Ries in Lagen; 1 Ries = 100 Lagen, 12 Ries = 12 . 100 Lagen = 1200 Lagen.

e) $36\,K\;55\,h$ in h; $1\,K = 100\,h$, $36\,K = 36\,.\,100\,h = 3600\,h$,
dazu $55\,h$ = ... $55\,h$
ergibt $36\,K\,55\,h$ = $3655\,h$.

---

*) Ein Schaltjahr hat 366 Tage.

f) $35^0\,32'\,36''$ alter Teilung (a. T.) in $''$; $1^0 = 3600''$, $35^0 = 35 \,.\, 3600'' =$
$= 126000''$
$1' = 60''$, $32' = 32 \,.\, 60'' = 1920''$
dazu $36'' = 36''$

ergibt $35^0\,32'\,36'' = 127956''$.

g) Wieviel *m*, *dm*, *cm* und *mm* sind: 319·645 *m*? 1 *m* = 10 *dm* = 100 *cm* = 1000 *mm*; es erscheinen daher in dem Dezimalbruche durch Multiplikation mit 10 die *dm*, mit 100 die *cm* und mit 1000 die *mm*, so daß 319·654 *m* = 319 *m* 6 *dm* 4 *cm* 5 *mm*.

h) Wieviel *ha*, *a* und m^2 sind 4·93705 *ha*? 1 *ha* = 100 *a* = 10.000 m^2; wird demnach der Dezimalbruch mit 100 multipliziert, so erscheinen 93 ganze *a* und durch Multiplikation mit 10.000 noch 70·5 m^2. Es sind daher 4·93705 *ha* = 4 *ha* 93 *a* 70·5 m^2.

i) Wieviel J und □° sind 4·75 J? 1 J = 1600 □°, daher 0·75 J = 0·75 . 1600 □° = = 1200 □°, 4·75 J = 4 J 1200 □°.

§ 10. Das Reduzieren.

1. Das Reduzieren als Zurückführen oder Verkleinern.

Reduzieren als Zurückführen, auch **Verkleinern**, heißt Einheiten niederer Benennung durch Einheiten höherer Benennung ausdrücken.

Sollen z. B. 124 *cm* auf *m* zurückgeführt werden, so schließt man: 100 *cm* = 1 *m*, folglich sind 124 *cm* so viele *m*, als 100 *cm* in 124 *cm* enthalten sind und hat 124 : 100 = = 1·24mal, also 1·24 *m*.

Die Zahl, welche angibt, wieviel Einheiten niederer Benennung eine Einheit höherer Benennung enthält, heißt **Reduktionszahl**. In obigem Beispiele ist 100 die Reduktionszahl.

Das **Reduzieren als Zurückführen** geschieht, indem man die Zahl der niederen Benennung durch die Reduktionszahl dividiert.

Beispiele: A. Es sind zu reduzieren auf höhere Benennungen:

a) 3345 m^2 auf *ha*; 10.000 m^2 = 1 *ha*, 3345 m^2 = 3345 : 10.000 = 0·3345 *ha*.

b) 7325 cm^3 auf m^3; 1,000.000 cm^3 = 1 m^3, 7325 cm^3 = 7325 : 1,000.000 = 0.007325 m^3.

c) 8745·5 *kg* auf *q*; 100 *kg* = 1 *q*, 8745·5 *kg* = 8745·5 : 100 = 87·455 *q*.

d) 972 ⊠′ auf ⊠°; 216 ⊠′ = 1 ⊠°, 972 ⊠′ = 972 : 216 = 4·5 ⊠°.

B. Es sind auf einen Dezimalbruch der höchsten Benennung zu reduzieren:

e) 5 *ha* 57 *a* 32 m^2; 100 *a* = 1 *ha*, 10.000 m^2 = 1 *ha*; um daher *a* und m^2 auf *ha* zurückzuführen, müssen die *a* durch 100, die m^2 durch 10.000 dividiert werden. Man hat also 5 *ha* 57 *a* 32 m^2 = 5·5732 *ha*.

f) 9 m^3 524 dm^3 80 cm^3; 1000 dm^3 = 1 m^3, 1,000.000 cm^3 = 1 m^3; zwecks Zurückführung von dm^3 und cm^3 auf m^3 müssen die ersteren demnach durch 1000, die letzteren durch 1,000.000 dividiert werden. Sonach sind also 9 m^3 524 dm^3 80 cm^3 = = 9·524080 m^3.

C. Es sind auf höhere Benennungen ohne Ausscheidung von Dezimalbrüchen zurückzuführen.

g) 7845 □° in J und □°; 1600 □° = 1 J, 7845 □° = 7845 : 1600 = 4 J 1445 □°.

h) 748325 Bogensekunden neuer Teilung (n. T.) in ^{0}, $'$ u. $''$. Wir führen in solchen Fällen vorerst auf die nächsthöhere, dann die zweithöhere, sodann die dritthöhere usw. Benennung zurück und haben
$100'' = 1'$, folglich $748325'' = 748325 : 100 = 7483'$ und $25''$ (als Rest); $100' =$ $= 1^0$, folglich $7483' = 7483 : 100 = 74^0$ und $83'$ (als Rest). $748325''$ sind also $7483' + 25'' = 74^0 83' 25''$. Da $100' = 1^0$ und $10.000'' = 1^0$, so lautet der Bogen als Dezimalbruch $74·8325^0$.

2. Das Reduzieren als Umwandeln oder Überführen.

Mit dem Ausdrucke **Reduzieren** bezeichnet man in der Rechnung mit Maßen, Gewichten und Münzen auch das **Überführen** oder **Umwandeln** einer nach einem Maße gemessenen Größe in ein anderes Maß, z. B. das Umwandeln alten Maßes in neues Maß u. dgl.

Ist beispielsweise zu berechnen, wie viele Einheiten in Jochen eine in Hektaren mit 4·5320 *ha* gegebene Fläche besitzt, wenn 1 *ha* = 1·737727 J, so schließt man wie folgt: 1 *ha* = 1·737727 J, daher sind 4·5320 *ha* = 4·5320 . 1·737727 J = 7·875379 J.

Die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten eines Maßes eine Einheit eines anderen Maßes enthält, heißt **Reduktionszahl** oder häufiger auch **Reduktionsfaktor**. Bei der Umwandlung von *ha* in J ist 1·737727 der Reduktionsfaktor.

Das Umwandeln geschieht, wenn man die umzuwandelnde Zahl mit dem entsprechenden Reduktionsfaktor multipliziert.

Das Reduzieren als Umwandeln ist für die forstliche Praxis, in der es sich häufig um Überführungen von *m* in ^{0}, J in *ha*, *fm* in *rm* u. dgl. handelt, von besonders großer Bedeutung. Wir beziehen deshalb im folgenden eine Zusammenstellung der vorkommenden Reduktionsfaktoren für die Umwandlung des metrischen Maßes in Wiener Maß und umgekehrt ein, worin die wichtigsten fett gedruckt erscheinen.

a) Längenmaß.

1^0	= **1·896484** *m*	1 *m*	= **0·527292** ^{0}
$1'$	= 0·316081 *m*	1 *m*	= 3′ 1″ 11·58‴
$1''$	= 0·026340 *m*	1 *m*	= 1·286077 Ellen
$1'''$	= 0·002195 *m*	1 *km*	= 0·131823 Postmeilen
1 Elle	= 0·777558 *m*	1 *μm*	= 1·318229 Postmeilen
1 Faust	= 10·53602 *cm*	1 *dm*	= 0·316375′
1 Postmeile	= 7·585936 *km*	1 *cm*	= 0·37965″
1 Geogr. Meile	= 7·420439 *km*	1 *mm*	= 0·45558‴

b) Flächenmaß

1 $\square^0$	= 3·596652 m^2	1 m^2	= 0·278036 $\square^0$
1 $\square'$	= 0·099907 m^2	1 *a*	= 27·80364 $\square^0$
1 $\square''$	= 6·937987 cm^2	1 *ha*	= **1·737727** Joch
1 $\square'''$	= 0·048180 cm^2	1 dm^2	= 0·100093 $\square'$
1 Joch	= **0·575464** *ha*	1 cm^2	= 0·144134 $\square''$
1 □ Meile	= 0·575464 μm^2	1 mm^2	= 0·207553 $\square'''$

c) Körpermaß.

1 c^0	= 6·820992 m^3	1 m^3	= **0·146606** c^0
1 c'	= **0·031579** m^3	1 dm^3	= 0·031667 c'
1 c''	= 18·274699 cm^3	1 cm^3	= 0·054721 c''
1 c'''	= 10·575636 mm^3	1 mm^3	= 0·094557 c'''

d) Hohlmaß.

1 Maß	= **1·414724** *l*	1 *l*	= **0·706852** Maß
1 Seitel	= 0·353681 *l*	1 *l*	= 0·016264 Metzen
1 Eimer	= 0·565890 *hl*	1 *hl*	= 1·767129 Eimer
1 Metzen	= 0·614868 *hl*	1 *hl*	= 70·68515 Maß

Nebst den in der Tabelle angegebenen Reduktionsfaktoren ist noch Erwähnung zu tun *a)* der Umwandlung des Bogenmaßes alter Teilung (a. T.) in solches neuer Teilung (n. T.). Es sind 90^0 a. T. = 100^0 n. T., daher 1^0 a. T. $= \frac{100^0}{90}$ n. T. $= \frac{10}{9} = 1·111111^0$ n. T., und umgekehrt 100 n. T. = 90^0 a. T., daher 1^0 n. T. $= \frac{90^0}{100}$ a. T. $= 0·9^0$ a. T.; *b)* der Umwandlung von Graden des 100-teiligen (Celsius-) Thermometers in solche des 80-teiligen (Reaumur-) Thermometers. Da der Abstand zwischen Eis- und Siedepunkt bei beiden Thermometern gleich ist, so haben wir $100^0\,C = 80^0\,R$, daher $1^0\,C = \frac{80^0}{100}\,R = 0·8^0 = \frac{4}{5}{}^0\,R$, und umgekehrt $80^0\,R = 100^0\,C$, daher $1^0\,R = \frac{100^0}{80}\,C = 1·25^0 = \frac{5}{4}{}^0\,C$; *c)* der Umwandlung von Kronen in Gulden und umgekehrt. Man rechnet 1 fl. (in Silber) = 2 *K*, daher auch $1\,K = 0·5\,\left(\frac{1}{2}\right)$ fl.

Für die Umwandlung von Goldgulden (insbesondere bei Zollzahlungen) werden 42 Goldgulden = 100 *K* gerechnet. Es ist daher 1 fl in Gold = 100 *K* : 42 = 2·38095 *K*, und 1 *K* = 42 fl. in Gold : 100 = 0·42 fl. in Gold.

Als für alle Umwandlungen besonders wichtig ist folgendes zu bemerken: Im praktischen Leben kommt es nur zu oft vor, daß man ohne ein Nachschlagebuch mannigfache Umwandlungen vornehmen muß. Da nun eine größere Anzahl von Reduktionsfaktoren immer nur dem Geübteren geläufig bleibt, so wird man gewöhnlich nur einige Faktoren sicher im Kopfe haben und die gerade erforderlichen sich an Ort und Stelle selbst errechnen müssen.

Nehmen wir an, es sei *a)* der Reduktionsfaktor von Klaftern in Meter, also $1^0 = 1·896484\,m$ gegeben. Verlangt wird *aa)* Fuße in Meter. Man hat, da $1^0 =$ $= 6'$, auch $6' = 1·896484\,m$, daher $1' = 1·896484\,m : 6 =$ **0·316081** *m*. *bb)* Meter in Klafter.

Es ist 1·896484 *m* = 1^0, daher 1 *m* = 1^0: 1·896484 = 0·527292^0. *b)* Es sei der Reduktionsfaktor von Jochen in Hektare, also 1 J = 0·575464 *ha* gegeben. Verlangt wird *aa)* Quadratklafter in Quadratmeter. Die Gleichung 1 J = 0·575464 *ha* bleibt auch richtig, wenn wir 1 J in $\square^0$ und 0·575464 *ha* in m^2 auflösen. Es sind dann 1600 $\square^0$ = 5754·64 m^2 und 1 $\square^0$ = 5754·64 m^2: 1600 = **3·596652** m^2. *bb) ha* in Joche. Es sind 0·575464 *ha* = 1 J, folglich ist 1 *ha* = 1 J: 0·575464 = **1·737727** J.

Durch ähnliche Vernunftschlüsse kann man viele andere Reduktionsfaktoren ableiten. Für gewöhnliche Reduktionen nimmt man jedoch nicht so viele Dezimalen, ja es ist für manche Fälle schon genügend, wenn man die Korrektur auf 2 Stellen, also z. B. 1^0 = 1·90 *m* statt 1·896484 m, nimmt.

Beispiele: Es sind zu reduzieren:

1. 27·3^0 in *m*; 1^0 = 1·896484 *m*, 27·3^0 = 27·3 . 1·896484 *m* = 51·77 *m*.

2. 53·1 *ha* in J und $\square^0$; 1 *ha* = 1·737727 J, 53·1 *ha* = 53·1 . 1·737727 J = 92·273 J, 0·273 J in $\square^0$ aufgelöst gibt 0·273 × 1600 $\square^0$ = 437 $\square^0$; also 53·1 *ha* = 92 J 437 $\square^0$.

3. 44 J 1395 $\square^0$ in *ha*. In solchen Fällen wird alles auf dieselbe Benennung gebracht, und zwar entweder auf J oder auf $\square^0$. *a)* Alles auf Joche gebracht. 1600 $\square^0$ = 1 J, folglich 1 $\square^0$ = 1 J : 1600 = 0·000625 J, daher 1395 $\square^0$ = 1395. 0·000625 J = 0·872 J, und 44 J 1395 $\square^0$ = 44·872 J. Nun ist 1 J = 0·575464 *ha*, daher 44·872 J = 44·872 . 0·575464 *ha* = 25·8322 *ha*. *b)* Alles auf $\square^0$ gebracht. 44 J 1395 $\square^0$ = 44 × 1600 $\square^0$ + 1395 $\square^0$ = 71795 $\square^0$. Nun ist 1 $\square^0$ = 3·596652 m^2 = 0·0003596652 *ha*, daher 71795 $\square^0$ = 71795 . 0·0003596652 *ha* = 25·8322 *ha*.

4. 21·8 m^3 in c^0 und c'; *a)* 1 m^3 = 0·146606 c^0, 21·8 m^3 = 21·8 . 0·146606 c^0 = 3·196 c^0; 0·196 c^0 in c' aufgelöst gibt 0·196 × 216 c' = 42·3 c'; also 21·8 m^3 = 3 c^0 42·3 c'. *b)* 1 m^3 = 31·667 c', also 21·8 m^3 = 21·8 × 31·667 c' = 690·34 c'. Letztere Zahl auf c^0 und c' zurückgeführt ergibt: 690·34 c' : 216 = 3 c^0 und 42·34 c' als Rest, = 3 c^0 42·3 c'.

5. 340 *fm* in *rm*, wenn 1 *rm* = 0·8 *fm*. In diesem Falle muß gemäß der Ausführungen auf der vorhergehenden Seite vorerst der Reduktionsfaktor von *fm* in *rm* gesucht werden. Wenn 0·8 *fm* = 1 *rm*, so ist 1 *fm* = 1 *rm* : 0·8 = 1·25 *rm*; also 340 *fm* = 340 . 1·25 *rm* = 425 *rm*.

6. 45^0 26′ 30″ a. T. in n. T. *a)* Alles auf Grade gebracht. 26′ = 26 : 60 = 0·4333^0; 30″ = 30 : 3600 = 0·0083^0; 45^0 26′ 30″ = 45^0 + 0·4333^0 + 0·0083^0 = 45·4416^0 a. T. Nun ist 1^0 a. T. = 1·111111^0 n. T., 45·4416^0 a. T. = 45·4416 . 1·111111^0 n. T. = 50·4907^0 n. T. = 50^0 49′ 07″. *b)* Alles auf Sekunden gebracht. 45^0 26′ 30″ = 45 . 3600″ + 26 . 60″ + 30″ = = 163590″ a. T. Nun ist 1^0 a. T. = 1·111111^0 n. T., daher beide Seiten der Gleichung in Sekunden aufgelöst, 3600″ a. T. = 11111·11″ n. T., und daraus 1″ a. T. = 11111·11″ n. T.: 3600 = 3·086417″ n. T. Sonach sind 163590″ a. T. = 163590 . 3·086417 n. T. = = 504907″ n. T., oder aufgelöst 50^0 49′ 07″ n. T.

§ 11. Die Addition mehrnamiger Zahlen.

a)	
12 *m* 8 *dm* 7 *cm* 5 *mm*	
6 *m* 9 *dm* 8 *cm* 2 *mm*	
19 *m* 8 *dm* 5 *cm* 7 *mm*	

Man spricht: 2 + 5 = 7; 7 *mm* werden angeschrieben. 8 + 7 = 15 *cm* = 1 *dm*, 5 *cm*; 5 *cm* werden angeschrieben und 1 *dm* zu den *dm* addiert. 1 + 9 + 8 = 18, 18 *dm* = 1 *m* und 8 *dm*; 8 *dm* werden angeschrieben und 1 *m* zu den *m* addiert. 1 + 6 + 12 = 19, welche als 19 *m* angeschrieben werden.

b)	
36^0 18′ 46″ a. T.	46″ + 37″ = 83″ = 23″ und 1′,
42^0 58′ 37″ a. T.	1′ + 58′ + 18′ = 77′ = 17′ und 1^0;
79^0 17′ 23″ a. T.	1^0 + 42^0 + 36^0 = 79^0.

Regel: Mehrnamige Zahlen werden, ihrer Zusammensetzung entsprechend, wie unbenannte Zahlen addiert, indem man bei der niedrigsten Benennung beginnt und die Summe dieser sowie jeder folgenden, soferne sie nicht schon eine oder mehrere Einheiten der nächst höheren Benennung ausmacht, anschreibt. Gibt die Summe einer Benennung aber schon eine Einheit der nächst höheren Benennung, so wird dieselbe zur letzteren hinzugezählt.

Können die einzelnen Benennungen als Dezimalzahl dargestellt werden, so ist es am einfachsten, die mehrnamigen Zahlen als Dezimal-

brüche der höchsten Benennung anzuschreiben, diese zu addieren und die Summe nun wieder als mehrnamige Zahl zu bezeichnen.

Im Beispiele *a)* hätten wir $12·875\ m + 6·982\ m = 19·857 = 19\ m\ 8\ dm\ 5\ cm\ 7\ mm$.

§ 12. Die Subtraktion mehrnamiger Zahlen.

$$\begin{array}{rrr} 12^0 & 18' & 46'' \\ -\ 9^0 & 8' & 57'' \\ \hline 3^0 & 9' & 49'' \end{array}$$

Man spricht: Um 57″ des Subtrahends von 46″ des Minuends subtrahieren zu können, muß der Minuend um 1 Einheit höherer Benennung (1′ = 60″) vermehrt werden, also 46″ + 60″ = 106″. 7 + **9** gibt 16; 9 wird angeschrieben, 1 bleibt, 1 + 5 = 6, 6 + **4** gibt 10; 4 wird angeschrieben, 1 bleibt. Diese 1 Einheit wird als Ersatz für jene Einheit höherer Ordnung, welche im Minuend in Einheiten niederer Benennung aufgelöst werden mußte, um die Subtraktion zu ermöglichen, zu der nächsten Benennung des Subtrahends addiert. 1 + 8 = 9 und **9** gibt 18: 9 wird angeschrieben; 9 und **3** gibt 12; 3 wird angeschrieben.

Regel: Mehrnamige Zahlen werden subtrahiert, indem man, bei der niedrigsten Benennung beginnend, wie mit unbenannten Zahlen verfährt. Ist die Zahl des Minuends bei einer Benennung kleiner als jene des Subtrahends derselben Benennung, so wird eine Einheit der nächst höheren Benennung des Minuends in Einheiten der niederen Benennung aufgelöst, um die Subtraktion ausführen zu können. Diese 1 Einheit höherer Benennung wird aber dann im Subtrahend zu derselben Benennung hinzugezählt.

Sind die Benennungen nach dem dekadischen Zahlensystem aufgebaut, so verfährt man bei der Subtraktion wie mit Dezimalzahlen und löst erst das Resultat in eine mehrnamige Zahl auf.

§ 13. Die Multiplikation mehrnamiger Zahlen.

a) $47^0\ 5'\ 11'' \times 5$
$239^0\ 5'\ 7''$
$\widehat{4^0}\ \ \widehat{4'}$

Man spricht: 11″ . 5 = 55″ = 4′ 7″; 7″ werden angeschrieben, 4′ zu dem Produkte der Fuße hinzugezählt. 5′ . 5 = 25′; 25′ + 4′ = 29′ = 4⁰ 5′; 5′ werden angeschrieben, 4⁰ zu dem Produkte der Klafter hinzugezählt. 47⁰ . 5 = 235⁰; 235⁰ + 4⁰ = 239⁰, welche angeschrieben werden.

b) $32\ m\ 5\ dm\ 7\ cm \times 3 = 32·57\ m \times 3 = 97·71\ m = 97\ m\ 7\ dm\ 1\ cm$.

Regel: Eine mehrnamige Zahl wird mit einer unbenannten Zahl multipliziert, indem man vorerst die Zahl der niedrigsten Benennung mit der unbenannten Zahl multipliziert, das erhaltene Produkt, wenn es bereits Einheiten der nächst höheren Benennung enthalten sollte, um diese vermindert und den Rest als Teilprodukt der niedrigsten Benennung anschreibt. Auf gleiche Weise verfährt man mit den Zahlen der nächsten Benennungen, doch muß man die beim vorangehenden Teilprodukte erhaltenen Einheiten der höheren Benennung immer zuzählen.

Wesentlich vereinfacht wird die Multiplikation, wenn man die mehrnamige Zahl des Multiplikands in eine einnamige verwandelt, d. i. entweder resolviert oder reduziert. Ist der Multiplikator ebenfalls mehrnamig, so werden Multiplikand und Multiplikator erst einnamig gemacht und dann multipliziert.

§ 14. Die Division mehrnamiger Zahlen.

1. Die Division einer mehrnamigen Zahl durch eine unbenannte Zahl.

a) $36^0 \quad 48' \quad 18'' : 5 = 7^0\,21'\,39{\cdot}6''$
$1^0 = 60'$
$108'$
$3' = 180''$
$198''$

Man spricht: $36^0 : 5 = 7^0$ bleibt 1^0; 7^0 werden angeschrieben, der Rest 1^0 in $'$ aufgelöst und den $'$ zugezählt. $60' + 48' = 108'$; $108' : 5 = 21'$, bleiben $3'$; $21'$ werden angeschrieben und $3'$ in $''$ aufgelöst und den $''$ zugezählt. $180'' + 18'' = 198''$; $198'' : 5 = 39{\cdot}6''$, welche angeschrieben werden.

b) $224\,ha\;\;61\,a\;\;25\,m^2 : 35$
$224{\cdot}6125\,ha : 35 = 6{\cdot}4175\,ha = 6\,ha\;\;41\,a\;\;75\,m^2.$

Regel: Eine mehrnamige Zahl wird durch eine unbenannte Zahl dividiert, indem man, bei der höchsten Benennung beginnend, die Zahl jeder Benennung durch die unbenannte Zahl dividiert: bleibt hiebei ein Rest, so wird derselbe in Einheiten der nächst niederen Benennung verwandelt und letzterer zugezählt.

Wesentlich vereinfacht wird die Division (in erster Linie bei auf der Dezimalteilung beruhenden Zahlen), wenn man die mehrnamige Zahl in eine einnamige verwandelt, sonach dividiert, und den Quotienten wieder als mehrnamige Zahl anschreibt.

2. Die Division mehrnamiger Zahlen durch eine mehrnamige Zahl.

Wenn eine mehrnamige Zahl durch eine gleichnamige mehrnamige zu dividieren ist, so heißt das untersuchen, wie oft der Divisor als Maß im Dividend enthalten ist. Der Quotient ist dann selbstredend eine unbenannte Zahl.*)

a) $11\,c^0 \quad 25\,c' \quad 44\,c'' : \quad 2\,c^0 \quad 44\,c' \quad 147\,c''$
$44\,c''; \qquad 147\,c''$
$25\,c' = 25 \times 1728\,c'' = 43.200\,c''; \quad 44\,c' = 44 \times 1728\,c'' = 76.032\,c''$
$11\,c^0 = 11 \times 373.248\,c'' = 4,105.728\,c''; \quad 2\,c^0 = 2 \times 373.248\,c'' = 746.496\,c''$
$4,148.972\,c'' : \quad 822.675\,c'' = 5{\cdot}043270,$

also auch

$11\,c^0\;25\,c'\;44\,c'' : 2\,c^0\;44\,c'\;147\,c'' = 5{\cdot}043270.$

b) $199\,m\;4\,dm\;2\,cm\;4\,mm : 26\,m\;2\,dm\;4\,cm$
$199.424\,m : 26{\cdot}24\,m = 7{\cdot}6$, also auch
$199\,m\;4\,dm\;2\,cm\;4\,mm : 26\,m\;2\,dm\;4\,cm = 7{\cdot}6.$

Regel: Eine mehrnamige Zahl wird durch eine andere mehrnamige Zahl dividiert, indem man beide Zahlen durch Auflösen oder Zurückführen auf einnamige Benennungen bringt und nun die Division ausführt.

§ 15. Aufgaben über das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

1. Wie viele mm sind: $8\,m\;5\,dm$; $9\,dkm\;12\,cm$; $9\,km\;3\,m$; $7\,dm\;8\,mm$; $16\,cm\;5\,mm$?
2. Wie viele m^2 sind: $13\,ha\;5\,a$; $15\,a\;6\,m^2$; $3\,\mu m^2$; $19\,km^2$; $37\,ha\;10\,a$?
3. Wie viele cm^3 sind: $5\,m^3$; $6\,m^3\;15\,dm^3$; $33\,m^3\;27\,dm^3\;26\,cm^3$; $27\,dm^3$; $5\,m^3\;39\,cm^3$; $16\,m^3\;4\,dm^3$?

*) Diese Erklärung gilt für die Division jeder benannten Zahl durch eine gleichnamige Zahl überhaupt.

4. Wie viele *kg* sind: 3 *t*; 4 *q*; 6 *t* 5 *q* 3 *kg*; 35 *q* 48 *kg*?
5. Wie viele *l* sind: 3 *hl* 15 *l*; 21 *hl* 3 *l*; 7 *hl* 96 *l*?
6. Wie viele Bogen sind: 3 Ballen 16 Lagen; 22 Ries 5 Bogen; 6 Buch 9 Bogen?
7. Wie viele Stück sind: 6 Schock; 13 Mandel; 2 Gros 3 Dutzend?
8. Wie viele Stunden hat ein gemeines, wie viele ein Schaltjahr?

Es sind zu reduzieren:

9. auf *m*: 3 *dm* 7 *cm*; 48 *dm* 56 *mm*; 348 *mm*; 2355 *dm*.
10. auf *km*: 243 *m*; 3749 *dm*; 14483 *dm*; 333 *m* 47 *dm* 36 *cm*.
11. auf m^2: 39 dm^2; 347 mm^2; 58 dm^2 46 cm^2; 5780934 dm^2.
12. auf *a*: 348 dm^2; 2759 m^2; 3441 cm^2; 35801432 mm^2.
13. auf *ha*: 224251 mm^2; 345178 cm^2; 218943 dm^2; 47·34112 *a*; 35766·881 m^2.
14. auf m^3: 0·03 dm^3; 2431 cm^3; 74839 mm^3; 83·411 dm^3; 33343·511 cm^3; 647801·441 mm^3.
15. Wie viele Tage, Stunden, Minuten und Sekunden sind 218304 Sekunden?
16. Wie viele Tage, Stuuden und Minuten sind 344803 Minuten?
17. Wie viele Grade, Minuten und Sekunden (a. T.) sind 550843·2 Sekunden; 28470 Sekunden?
18. Wie viele Grade, Minuten, Sekunden (n. T.) sind 324768 Sekunden; 87543 Sekunden?
19. Wie viele Grade, Minuten und Sekunden alter Teilung sind 39·4592^0 neuer Teilung?
20. Wie viele Grade und Dezimalen neuer Teilung sind 47^0 15′ 26″ alter Teilung?
21. Wie viele Klafter sind 384·5 *m*; 27·5 *km*; 385 *m* 8 *dm* 7 *cm* 4 *mm*?
22. Es sind in Meter zu verwandeln 287′; 1245·7^0; 44^0 5′ 7″ 9‴?
23. Wie viele Kubikfuß sind 122·5 m^3; 356·8 dm^3; 857 m^3 25 dm^3?
24. Wie viele m^3 geben 796·8 *c*′; 324 c^0; 953 c^0; 72 *c*′?
25. Das Ergebnis eines Holzschlages besteht aus: 132·8 *fm* Nutzholz, 210 *rm* Scheitholz und 300 *rm* Prügelholz. Wie groß ist das Gesamtergebnis in *fm*, wenn 1 *rm* Scheitholz mit 0·80 *fm* und 1 *rm* Prügelholz mit 0·70 *fm* angenommen werden kann?

Zu addieren sind nachstehende mehrnamige Zahlen:

26.
36 *m* 4 *dm* 8 *cm* 7 *mm*
18 *m* 9 *dm* 6 *cm* 8 *mm*
27 *m* 6 *dm* 7 *cm* 1 *mm*
132 *m* 1 *dm* 0 *cm* 3 *mm*

27.
7 *km* 3 *hm* 5 *dkm* 7·6 *m*
36 *km* 0 *hm* 9 *dkm* 6·0 *m*
17 *km* 1 *hm* 3 *dkm* 2·6 *m*
151 *km* 6 *hm* 5 *dkm* 7·7 *m*

28.
47 *ha* 16 *a*
19 *ha* 2 *a*
36 *ha* 75 *a*
29 *ha* 37 *a*

29.
16 m^2 29 dm^2 16 cm^2 7 mm^2
1 m^2 28 dm^2 15 cm^2 6 mm^2
39 m^2 2 dm^2 11 cm^2 87 mm^2
101 m^2 97 dm^2 1 cm^2 32 mm^2

30.
6 J 1143 $\square^0$
17 J 945 $\square^0$
35 J 1209 $\square^0$
7 J 21 $\square^0$

31.
356 *hl* 5 *l*
23 *hl* 8 *l*
57 *hl* 82 *l*
46 *hl* 25 *l*
15 *hl* 92 *l*

32.
121 m^3 743 dm^3
5 m^3 26 dm^3
246 m^3 349 dm^3
29 m^3 5 dm^3
123 m^3 902 dm^3

33.
47^0 16′ 48″ a. T.
97^0 47′ 24″ „ „

34.
96^0 57′ 26″ n. T.
16^0 55′ 49″ „ „

Zu subtrahieren sind nachstehende mehrnamige Zahlen:

35.
48 *m* 7 *dm* 8 *cm* 6 *mm*
36 *m* 9 *dm* 6 *cm* 7 *mm*

36.
36 *ha* 48 *a*
27 *ha* 59 *a*

37.
15 Tage 18^h 8^m 6″
9 „ 12^h 36^m 42″

38.
127^0 16′ 27″ a. T.
16^0 45′ 36″ „ „

39.
257^0 16′ 87″ n. T.
115^0 53′ 16″ „ „

40.
16 m^3 57 dm^3
3 m^3 320 dm^3

Folgende mehrnamige Zahlen sind mit unbenannten Zahlen zu multiplizieren:

41. 48 m^2 16 dm^2 $\times$ 19;
42. 9 m^3 327 dm^3 $\times$ 203;
43. 7 *ha* 19 *a* $\times$ 32;
44. 32^0 27′ 18″ a. T. $\times$ 46;
45. 7 *hl* 13 *l* $\times$ 52;
46. 42 J 1384 $\square^0$ $\times$ 17.

47. Bei einer Forstkasse gelangen folgende Beträge zur Ausbezahlung: Für Gehalte 471 *K* 67 *h*, für Taglohnarbeiten 86 *K* 49 *h*, für Professionistenarbeiten 132 *K* 35 *h* und für Holzhauerlöhne 58 *K* 17 *h*. Wie groß ist die verbleibende Kassabarschaft, wenn dieselbe vor der Ausbezahlung 3221 *K* 05 *h* betrug?

48. Ein Baumstamm hat 2 m^3 145 dm^3 236 cm^3 Inhalt, ein zweiter 1 m^3 354 cm^3, ein dritter 0·847 m^3 und ein vierter 1275 dm^3. Welchen Festgehalt haben alle 4 Bäume zusammen?

49. Eine Depesche wird nachmittags um 2 Uhr 43 Minuten in Berlin aufgegeben. Wann trifft dieselbe in Wien ein, wenn sie 4 Stunden 34 Minuten 36 Sekunden unterwegs ist, und die Uhr in Wien gegen Berlin um 12 Minuten vorausgeht?

50. Die Fläche eines Revieres, dessen Bestände 1 bis 100 Jahre alt sind, beträgt 657 *ha* 59 *a* 50 m^2. Hievon entfallen auf 1- bis 20jähr. Bestände 129 *ha* 86 *a* 20 m^2; auf 21- bis 40jähr. Bestände 132 *ha* 50 *a* 80 m^2; auf 41- bis 60jähr. Bestände 135 *ha* 23 *a* 10 m^2; und

auf 61- bis 80jähr. Bestände 140 *ha* 19 *a* 50 m^2; wie groß ist die Fläche der 81- bis 100jähr. Bestände?

51. Ein Gut besteht aus 784 *ha* 73 *a* 25 m^2 Wald, 63 *ha* 80 *a* 37 m^2 Feld, 94 *ha* 16 *a* 92 m^2 Wiese. Wie groß ist das ganze Gut und wieviel ist dasselbe wert, wenn 1 *ha* im Durchschnitt mit 336 *K* 40 *h* angenommen wird?

52. Eine bestehende Waldstraße ist mit 123 m^3 500 dm^3 Schlägelschotter zu beschottern. Wie groß wird der Kostenaufwand sein, wenn für die Gewinnung von 1 m^3 Schlägelschotter 0·7 und für das Zuführen und Ausbreiten desselben pro 1 m^3 0·2 Erdarbeitertagschichten à 1 *K* 90 *h* erforderlich sind?

53. Eine Waldfläche von 2 *ha* 25 *a* ist zu roden; pro m^2 dieser Arbeit rechnet man 0·075 Handlangertagschichten à 2 *K*; was kostet die ganze Rodung?

54. Wieviel muß man für die Aufführung von 39 m^3 700 dm^3 geraden Bruchsteinmauerwerkes zahlen, wenn die Herstellung von 1 m^3 solchen Mauerwerkes in Weißkalkmörtel Nachstehendes erfordert: 1 m^3 200 dm^3 Bruchsteine à 5 *K* 30 *h*, 100 dm^3 Weißkalk à m^3 13 *K* 50 *h*, 250 dm^3 trockenen Bergsand à m^3 3 *K*, 0·85 Maurertagschichten à 2 *K* 80 *h*, 1·15 Handlangertagschichten à 2 *K* 20 *h* und 0·1 vom Arbeitslohne für Requisiten und Aufsicht?

55. Bei der Durchforstung eines Bestandes wurde nachstehendes Bauholz mit den angegebenen Längen erzeugt: 96 *m* 5 *dm* mit 10 *cm*, 145 *m* 8 *dm* mit 13 *cm*, 243 *m* 1 *dm* mit 15 *cm*, 286 *m* 9 *dm* mit 16 *cm* und 210 *m* 7 *dm* mit 18 *cm* Stärke. Wieviel müßte für die Bezimmerung des Bauholzes bezahlt werden, wenn dieselbe pro Längenmeter für die Stärke von 10 *cm* 0·085, von 13 *cm* 0·1, von 15 *cm* 0·12, von 16 *cm* 0·15 und von 18 *cm* 0·16 Zimmermannstagschichten à 2 *K* 50 *h* erfordert?

56. Für das Zerkleinern (Sägen und Spalten) von 1 *rm* Brennholz werden 1 *K* 60 *h* bezahlt; wieviel *rm* wurden zerkleinert, wenn den Holzhauern 71 *K* 52 *h* ausbezahlt wurden?

57. Auf einer Kulturfläche von 2 *ha* 32 *a* 16 m^2 stehen 1943 Pflanzen; wie groß ist der Wachsraum für eine Pflanze?

58. Eine Gewehrkugel hat pro Sekunde eine Geschwindigkeit von 470 *m*. Nach welcher Zeit hört man den Kugelschlag an einer 339 *m* 5 *dm* entfernt aufgestellten Scheibe, wenn die Geschwindigkeit (die Fortpflanzung) des Schalles pro Sekunde 330 *m* 8 *dm* beträgt?

59. Ein flüchtiger Hirsch bewegt sich pro Sekunde mit einer Geschwindigkeit von 11 *m* 6 *dm*. Um wieviel Meter muß ein auf 105 *m* 8 *dm* aufgestellter Schütze vor dem Blatte des letzteren abkommen, wenn die Geschwindigkeit seines Geschosses 450 *m* pro Sekunde beträgt?

60. Ein Holzhaufen hat 27 m^3 218 dm^3 Brennholz; wie oft muß ein Fuhrmann fahren, um den Vorrat nach Hause zu schaffen, wenn er jedesmal 2 m^3 96 dm^3 aufladet?

61. Nach früheren Erfahrungen hat ein Stangenzaun um eine Pflanzenschule von 180 *m* 6 *dm* Umfang 64 *K* 98 *h* an Zimmermannsarbeit beansprucht. Welchen Betrag muß man für einen ähnlichen Zaun veranschlagen, dessen Umfang 204 *m* 6 *dm* 5 *cm* ist?

Übung: Betrachte durch Umwandlung in Dezimalzahlen die Aufgaben als solche mit einnamigen Zahlen und führe sie als Rechnungen mit einnamigen Zahlen durch!

III. Kapitel.

Die Teilbarkeit der Zahlen.

§ 16. Begriffsfeststellung und Kennzeichen der Teilbarkeit.

Eine Zahl heißt teilbar, wenn in derselben eine andere Zahl ohne Rest enthalten ist. Die Zahl 32 ist teilbar durch 8, weil 8 in 32 4mal ohne Rest enthalten ist. Die Zahl 23 ist nicht teilbar, weil in derselben keine Zahl ohne Rest enthalten ist. 23 : 2 = 11, Rest = **1**, 23 : 3 = 7, Rest = **2**, 23 : 4 = 5, Rest = **3** us

In dem Beispiele 32 teilbar durch 8 heißt die Zahl 8 ein Maß der Zahl 32, die Zahl 32 aber ein Vielfaches der Zahl 8.

Primzahlen sind jene Zahlen, welche nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 usf. Alle anderen Zahlen nennt man zusammengesetzte Zahlen, z. B. 4, 6, 8, 9, 10 usf.

Zahlen, welche an Stelle der Einer eine 0, 2, 4, 6, 8 haben, heißen gerade Zahlen; Zahlen mit 1, 3, 5, 7, 9 an Stelle der Einer heißen

ungerade Zahlen. Um von einer Zahl, namentlich einer mehrstelligen schon im vorhinein sagen zu können, durch welche Zahlen dieselbe teilbar ist, hat man folgende Kennzeichen der Teilbarkeit:

1. Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie eine gerade Zahl ist. Z. B. 4, 8, 16, 28, 32, 44 usf.

2. Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist. Z. B. 32562; die Ziffernsumme $3 + 2 + 5 + 6 + 2 = 18$; 18 ist durch 3 teilbar, folglich ist es auch 32562; $32562 : 3 = 10854$.

3. Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre 2 letzten Stellen als Zahl betrachtet durch 4 teilbar sind. Z. B. 679648; die 2 letzten Stellen sind 4 und 8, als Zahl betrachtet 48; 48 ist durch 4 teilbar, folglich ist es auch 679648; $679648 : 4 = 169912$.

4. Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn sie an der Stelle der Einer eine 5 oder 0 hat. Z. B. $5760 : 5 = 1152$.

5. Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie eine gerade Zahl ist und ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist. Z. B. 27264; an Stelle der Einer steht die gerade Zahl 4; die Ziffernsumme $= 2 + 7 + 2 + 6 + + 4 = 21$; 21 ist durch 3 teilbar, folglich ist die Zahl 27264 durch 6 teilbar; $27264 : 6 = 4544$.

6. Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre 3 letzten Stellen als Zahl betrachtet durch 8 teilbar sind. Z. B. 32576; die 3 letzten Stellen 5, 7, 6 als Zahl betrachtet ergeben 576; 576 ist durch 8 teilbar, folglich ist auch 32576 durch 8 teilbar; $32576 : 8 = 4072$.

7. Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme 9 oder ein Vielfaches von 9 ist. Z. B. 8769582; die Ziffernsumme $= 45$; 45 ist das 5fache von 9, folglich ist 8769582 durch 9 teilbar; $8769582 : 9 = = 974398$.

8. Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn sie an Stelle der Einer eine 0 hat; z. B. $5760 : 10 = 576$.

9. Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz der Ziffernsumme der geraden und ungeraden Stellen gleich 0, 11, oder ein Vielfaches von 11 ist. Z. B 6879136; die Ziffernsumme der geraden Stellen $3 + 9 + 8 = 20$, die Ziffernsumme der ungeraden Stellen $6 + 1 + 7 + + 6 = 20$; die Differenz $20 - 20 = 0$, folglich ist 6879136 durch 11 teilbar; $6879136 : 11 = 625376$.

10. Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie gleichzeitig durch 3 und 4 teilbar ist. Z. B. 2293584; die Ziffernsumme $= 33$; die 2 letzten Ziffern der Zahl ergeben 84; nachdem sonach die Kennzeichen der Teilbarkeit durch 3 und 4 zutreffen, so ist 2293584 auch durch 12 teilbar: $2293584 : 12 = 191132$.

11. Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn ihre 2 letzten Stellen als Zahl betrachtet durch 25 teilbar sind. Z. B. 69875; die 2 letzten Stellen als Zahl betrachtet sind 75; $75 : 25 = 3$, folglich ist auch 69875 durch 25 teilbar; $69875 : 25 = 2795$.

12. Eine Zahl ist durch 125 teilbar, wenn ihre 3 letzten Stellen als Zahl betrachtet durch 125 teilbar sind. Z. B. 3948625; $625 : 125 = 5$; $3948625 : 125 = 31589$.

§ 17. Anwendungen von der Teilbarkeit der Zahlen.

1. Die Zerlegung einer Zahl in Faktoren.

Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich in jene Zahlen, Faktoren, zerlegen, als deren Produkt sie erscheint. Z. B. die Zahl 4 besteht aus den Faktoren 2 und 2; $2 \times 2 = 4$.

Sind diese Faktoren Primzahlen, so werden sie die einfachsten Faktoren oder Primfaktoren einer Zahl genannt. In dem Beispiele $15 = 3 \times 5$ sind 3 und 5 Primfaktoren von 15, denn 3 und 5 sind Primzahlen.

Wird eine zusammengesetzte Zahl durch die kleinste Primzahl, durch welche sie teilbar ist, dividiert, so ist nach dem Begriffe der Division das Produkt aus der verwendeten Primzahl und dem Quotienten gleich der ursprünglichen Zahl. Dividiert man den erhaltenen Quotienten abermals durch die entsprechende kleinste Primzahl, so ist derselbe gleich dem Produkte aus der nun verwendeten Primzahl und dem erhaltenen zweiten Quotienten, so daß, wenn der jeweilig erhaltene Quotient ein drittes, viertes usw. mal durch die jeweilig entsprechende kleinste Primzahl dividiert wird, die ursprüngliche Zahl gleich wird dem Produkte aus sämtlichen verwendeten Primzahlen und dem letzten Quotienten, der schließlich selbst eine Primzahl ist.

Z. B. Es ist die Zahl 496 in Primfaktoren zu zerlegen:

496 : 2 = 248	oder, was einfacher ist,	496	2
248 : 2 = 124		248	2
124 : 2 = 62		124	2
62 : 2 = 31		62	2
31 Primzahl		31	31

Die Primfaktoren der Zahl 496 sind 2, 2, 2, 2, 31,
$496 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31.$

Die Regel für die Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren lautet daher: Man dividiere die Zahl, beziehungsweise die entsprechenden Quotienten fortgesetzt solange durch die jeweilig kleinste Primzahl, bis der letzte Quotient selbst eine Primzahl ist. Das Produkt aus dem letzteren und sämtlichen verwendeten Primzahlen ist der gegebenen Zahl gleich.

2. Das größte gemeinsame Maß.

Schon bei der Teilbarkeit der Zahlen wurde hervorgehoben, daß jene Zahl, welche in einer anderen gegebenen Zahl ohne Rest enthalten ist, ein Maß dieser Zahl genannt wird. Haben wir nun zwei oder mehrere Zahlen gegeben, welche durch eine und dieselbe Zahl teilbar sind, so heißt diese Zahl ein gemeinsames Maß aller gegebenen Zahlen; dasselbe wird zum größten gemeinsamen Maße, wenn es die größte Zahl ist, durch welche zwei oder mehrere gegebene Zahlen teilbar sind. Man bezeichnet das letztere entweder mit g. g. M. oder kurz M. Da jede Zahl sich als ein Produkt von Faktoren darstellen läßt, so muß der größte Faktor, den mehrere Zahlen gemeinsam haben, auch das größte gemeinsame Maß dieser Zahlen sein. Weil sich nun dieser Faktor gewöhnlich noch in kleinere Faktoren zerlegen läßt, so erhellt, daß das größte gemeinsame Maß zweier oder mehrerer Zahlen auch durch das Produkt aller Primfaktoren gegeben sein muß, welche den gegebenen Zahlen gemein sind.

Beispiele: *a)* Wie groß ist M (24, 32) = ?

24	2	32	2
12	2	16	2
6	2	8	2
3	3	4	2
		2	2

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$ Den beiden Produkten gemeinsame Faktoren sind $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; es ist daher M (24, 32) = 8.

b) M (5022, 6075, 7533) = ?

5022	2	6075	3	7533	3
2511	3	2025	3	2511	3
837	3	675	3	837	3
279	3	225	3	279	3
93	3	75	3	93	3
31	31	25	5	31	31
		5	5		

(Die gemeinsamen Primfaktoren sind schief durchstrichen.)

M (5022, 6075, 7533) = 3 . 3 . 3 . 3 = **81.**

Regel: Das größte gemeinsame Maß mehrerer Zahlen wird gefunden, indem man dieselben in ihre Primfaktoren zerlegt und das Produkt aus den gemeinsamen Primfaktoren aller Zahlen bildet.

3. Das kleinste gemeinsame Vielfache.

Bei der Teilbarkeit der Zahlen wurde darauf hingewiesen, daß eine Zahl, welche durch eine andere teilbar ist, ein Vielfaches der letzteren genannt wird. Z. B. 15 ist teilbar durch 3; die Zahl 15 ist also ein Vielfaches von 3. Ist eine Zahl aber durch 2 oder mehrere andere Zahlen gleichzeitig teilbar, z. B. 36 teilbar durch 9, 12 und 18, so ist diese Zahl (36) ein gemeinsames Vielfaches der anderen Zahlen (9, 12 und 18). Ist das gemeinsame Vielfache bestimmter Zahlen endlich auch die kleinste Zahl, in welcher alle gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten sind, dann wird dasselbe zum kleinsten gemeinsamen Vielfachen dieser Zahlen. Man bezeichnet dasselbe entweder mit k. g. V. oder kurzweg mit v.

Nach den Grundbegriffen der Division ist eine Zahl in einer anderen ohne Rest enthalten, wenn sie ein Faktor der letzteren ist Sollen daher mehrere Zahlen gleichzeitig in einer und derselben Zahl enthalten sein, so muß diese Zahl sämtliche Faktoren enthalten, aus denen die gegebenen Zahlen bestehen. Wo indessen eine größere Anzahl von gleichen Faktoren in jeder der gegebenen Zahlen vorkommt, wird es behufs Auffindung der kleinsten Zahl (d. i. des kleinsten Vielfachen), in welcher die gegebenen Zahlen enthalten sind, nur notwendig sein, solche Faktoren so oft zu nehmen, als sie in einer der gegebenen Zahlen am meisten vorkommen.

Beispiel: v (54, 72, 126) = ?

54	2	72	2	126	2
27	3	36	2	63	3
9	3	18	2	21	3
3	3	9	3	7	7
		3	3		

Der Faktor 2 ist 3mal zu nehmen, weil er in derselben Zahl (72) 3mal, d. i. am öftesten, vorkommt . . . . 2 . 2 . 2

Der Faktor 3 ist 3mal zu nehmen, weil er in einer der gegebenen Zahlen (54) 3mal (am öftesten) vorkommt . . . . 3 . 3 . 3

Der Faktor 7 kommt nur 1mal vor 7

Es ist daher v (54, 72, 126) = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 7 = **1512.**

Einfacher ist folgende Schreibweise:

54, 72, 126,	2
27, 36, 63,	2
27, 18, 63,	2
27, 9, 63,	3
9, 3, 21,	3
3, 1, 7,	3
1, 1, 7,	7
1, 1, 1,	-

v (54, 72, 126) = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 7 = **1512.**

Regel: Das k. g. V. mehrerer Zahlen wird gefunden, indem man die Zahlen in Primfaktoren zerlegt und das Produkt bildet aus allen nicht gemeinsamen und gemeinsamen Primfaktoren, wobei die letzteren aber nicht zur Gänze, sondern nur so oft als Faktoren angesetzt werden, als sie in einer der gegebenen Zahlen am meisten vorkommen.

§ 18. Aufgaben über die Teilbarkeit der Zahlen.

1. Nenne in der Zahlenreihe von 1 bis 100 *a)* alle Primzahlen, *b)* alle zusammengesetzten Zahlen, *c)* alle geraden Zahlen und *d)* alle ungeraden Zahlen.

2. Nenne in der Zahlenreihe von 1 bis 100 alle Zahlen, welche teilbar sind durch: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 25.

3. Welche von den Zahlen: 926013, 624197, 624507, 908765, 4218301, 57402358, 82888351, 6758304, 555686, 57897855, 2358725, 6543290, 13753125, 10987650, 48210250, sind durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 25, 125 teilbar?

Nachfolgende Zahlen sind in ihre Primfaktoren zu zerlegen:

4. 8, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30.
5. 4, 40, 42, 49, 54, 58, 100, 111, 32751, 6780, 55512.
6. 57, 106, 214, 315, 450, 5211, 367851, 69432012, 254.

Für nachstehende Zahlen ist das größte gemeinsame Maß zu suchen:

7. M (8, 14); (12, 18); (16, 28); (18, 30); (21, 35); (24, 56).
8. M (18, 72); (10, 30); (33, 121); (36, 60, 84); (39, 65, 117).
9. M (45, 75, 120); (36, 162, 1701); (63, 189, 231); (99, 264, 495).

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist zu suchen von:

10. v (36, 42); (44, 66); (105, 115); (120, 160); (224, 368).
11. v (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19).
12. v (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20).
13. v (21, 23, 25, 27, 29, 31).
14. v (22, 24, 26, 28, 30, 32).
15. v (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90).
16. v (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50).

IV. Kapitel.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

§ 19. Begriff und Arten der gemeinen Brüche.

Eine gebrochene Zahl oder ein Bruch ist eine Zahl, welche aus einer bestimmten Anzahl gleicher Teile der Einheit besteht. $\frac{3}{5}$ ist ein Bruch, welcher anzeigt, daß die Einheit in 5 gleiche Teile zerlegt wurde, und daß 3 solcher Teile genommen wurden.

Die Zahl, welche angibt, in wie viele Teile die Einheit zerlegt wurde, heißt der Nenner, weil nach ihr der Bruch benannt wird; die Zahl hingegen, welche anzeigt, wie viele Teile des Nenners ein Bruch enthält, wird Zähler des Bruches genannt. In dem Bruche $\frac{3}{5}$ ist 3 der Zähler und 5 der Nenner des Bruches. Beim Anschreiben eines Bruches setzt man den Nenner unter den Zähler und trennt beide durch einen Strich, den sogenannten Bruchstrich.

Ein Bruch, dessen Name das 1-, 10-, 100- oder 1000- usw. fache von 10 ist, heißt ein Dezimalbruch, z. B. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{1000}$. Man schreibt solche Brüche indessen nicht in Bruchform, sondern nach Ganzen und Dezimalen an, z. B. $\frac{1}{10} = 0{\cdot}1$, $\frac{1}{100} = 0{\cdot}01$, $\frac{1}{1000} = 0{\cdot}001$ usw., und rechnet mit denselben in der in den vorhergehenden Paragraphen gezeigten Weise. Zum Unterschiede von den Dezimalbrüchen nennt man Brüche mit beliebig großen Nennern gemeine Brüche und unterscheidet dieselben wieder als echte Brüche, wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner, z. B.

$\frac{5}{7}$, und *unechte Brüche*, wenn der Zähler größer als der Nenner ist, z. B. $\frac{7}{5}$.

Jeder gemeine Bruch kann als eine angezeigte Division betrachtet werden, deren Dividend als Zähler und deren Divisor als Nenner des Bruches erscheint. Es folgt hieraus, daß jeder echte Bruch kleiner und jeder unechte Bruch größer ist als 1. So ist der echte Bruch $\frac{3}{5}$ kleiner als 1, weil ihm auf die Einheit, die aus 5 Fünfteln besteht, noch 2 Fünftel fehlen, und der Bruch $\frac{5}{3}$ größer als 1, weil er gegenüber der Einheit, die 3 Drittel besitzt, 2 Drittel mehr enthält. Aus der Auffassung eines Bruches als angezeigte Division folgt aber auch weiter, daß sich jeder unechte Bruch in eine ganze Zahl und einen echten Bruch zerlegen läßt; hienach ist beispielsweise der Bruch $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$. Man nennt die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche eine *gemischte Zahl* und schreibt dieselbe anstatt $1 + \frac{2}{3}$ kurz $1\frac{2}{3}$, anstatt $4 + \frac{5}{6}$ kurz $4\frac{5}{6}$ usw.

Mehrere gemeine Brüche, welche durchaus gleiche Nenner haben, nennt man *gleichnamig*, z. B. $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$; zum Unterschiede hievon heißen mehrere Brüche, deren Nenner verschieden sind, *ungleichnamig*, z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$. Erstere werden auch *Brüche mit gleichem Nenner*, letztere Brüche mit *ungleichem Nenner* genannt.

Soll ein Bruch noch einmal geteilt, also etwa der Bruch $\frac{3}{4}$ in 5 Teile geteilt werden, so entsteht ein *Doppelbruch*. Man schreibt den Bruchstrich zwischen $\frac{3}{4}$ und 5, den sogenannten *Hauptbruchstrich*, stärker, also $\frac{\frac{3}{4}}{5}$, weil bei gleicher Stärke des Hauptbruchstriches so gelesen werden könnte, als wäre die Zahl 3 durch $\frac{4}{5}$ zu dividieren, also $\frac{3}{\frac{4}{5}}$.

§ 20. Verwandlung unechter Brüche und gemischter Zahlen.

1. *Der unechte Bruch $\frac{37}{8}$ ist in eine gemischte Zahl zu verwandeln.*

$\frac{37}{8} = 37 : 8 = 4$, Rest 5. Da nun ein Ganzes acht Achtel hat und 4mal 8 Achtel 4mal soviel, also 32 Achtel sind, so muß der Rest 5 *Achtel* sein, denn 32 Achtel und 5 Achtel sind 37 Achtel. Es ist demnach $\frac{37}{8} = 4\frac{5}{8}$.

Regel: Ein unechter Bruch wird in eine gemischte Zahl verwandelt, indem man den Zähler des unechten Bruches durch dessen Nenner dividiert, d. i. die angezeigte Division wirklich vollführt; der etwa bleibende Rest ist der Zähler eines echten Bruches, dessen Nenner gleich ist dem Nenner des unechten Bruches. Die erhaltene ganze Zahl mit dem echten Bruche zusammengenommen bildet die gesuchte gemischte Zahl.

2. *Die gemischte Zahl $5\frac{3}{7}$ ist in einen unechten Bruch zu verwandeln.*

Die Einheit enthält 7 Siebentel, 5 Einheiten haben 5mal 7 Siebentel, also 35 Siebentel, hiezu noch 3 Siebentel gibt 38 Siebentel. Es sind demnach $5\frac{3}{7} = \frac{38}{7}$.

Regel: Eine gemischte Zahl wird in einen unechten Bruch verwandelt, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner des echten Bruches multipliziert und zu dem erhaltenen Produkte den Zähler des echten Bruches addiert. Die erhaltene Summe ist der Zähler des gesuchten unechten Bruches, dessen Nenner gleich ist dem Nenner des echten Bruches der gemischten Zahl.

§ 21. Das Erweitern und Abkürzen der Brüche.

1. Bei der Division unbenannter und einnamiger Zahlen (§ 6, 2. *B*) wurde hervorgehoben, daß Dividend und Divisor mit einer Zahl multipliziert werden können, ohne daß der Wert des Quotienten geändert wird. Da nun ein gemeiner Bruch als eine angezeigte Division betrachtet werden kann, worin der Dividend als Zähler und der Divisor als Nenner erscheint, so gilt die oben angeführte Regel offenbar sinngemäß auch für gemeine Brüche. Hiernach ist z. B.

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} = \frac{9}{21}; \qquad \frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}; \qquad \frac{3}{7} = \frac{9}{21}; \qquad \frac{5}{6} = \frac{25}{30}.$$

Man kann demnach einen Bruch in einen anderen Bruch verwandeln, dessen Nenner ein Vielfaches des Nenners vom ersten Bruche ist, indem man Zähler und Nenner des ersten Bruches mit derselben Zahl multipliziert. Man nennt diese Formveränderung das Erweitern eines Bruches.

2. Wenn nach den vorhergehenden Beispielen $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$, so muß auch $\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ sein. Aus $\frac{9}{21}$ erhält man $\frac{3}{7}$, wenn Zähler und Nenner des Bruches $\frac{9}{21}$ durch 3 dividiert werden.

Es kann also auch umgekehrt ein Bruch mit einem kleineren Nenner dargestellt werden, wenn man Nenner und Zähler des Bruches durch eine Zahl dividiert, durch welche beide teilbar sind. Dieser Vorgang heißt das Abkürzen oder das Kürzen des Bruches und wird wie folgt dargestellt:

$$\frac{6}{8} \overset{2}{=} \frac{3}{4}; \qquad \frac{12}{36} \overset{12}{=} \frac{1}{3}; \qquad \frac{15}{25} \overset{5}{=} \frac{3}{5}.$$

Die oberhalb des Gleichheitszeichens angesetzte Ziffer bedeutet die Zahl, durch welche gekürzt wird.

Aus 1. und 2. folgt die allgemeine Regel: Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner desselben mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl dividiert.

§ 22. Das Gleichnamigmachen der Brüche.

Mehrere Brüche gleichnamig machen, heißt dieselben auf einen gemeinsamen Nenner bringen. Dieser Nenner muß ein Vielfaches der Nenner der gegebenen Brüche sein und wird der Einfachheit wegen als deren kleinstes gemeinsame Vielfache gewählt und als kleinster gemeinsamer Nenner (kl. g. N.) bezeichnet.

Beim Gleichnamigmachen mehrerer Brüche sind zwei Operationen notwendig, nämlich das Aufsuchen des kleinsten gemeinsamen Nenners (Vielfachen) und das Erweitern aller gegebenen Brüche auf diesen Nenner. Der erstere Vorgang ist bereits im § 17 erklärt worden. Das Erweitern eines Bruches besteht nach der obigen Erklärung in der Multiplikation des Nenners und Zählers mit einer und derselben Zahl. Um aber

durch diese Multiplikation einen Bruch, z. B. $\frac{5}{6}$, auf den gegebenen Nenner 30 zu erweitern, muß die Zahl, mit welcher erweitert wird, so groß sein, daß sie mit dem Nenner 6 multipliziert, den Nenner 30 gibt, d. h. sie muß $30 : 6 = 5$ sein. Der Bruch $\frac{5}{6}$ mit 5 erweitert gibt $\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$.

Beispiele: 1. Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ sind gleichnamig zu machen:

a) Aufsuchen des kl. g. N.

2	3*	4	5	6	2
		2	5	3	2
		1	5	3	5
		1	1	3	3
		1	1	1	

v. $(2, 3, 4, 5, 6) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$.

b) Erweitern aller Brüche auf den Nenner 60.

$\frac{1}{2}$ wird erweitert mit $60 : 2 = 30$; $\frac{1.30}{2.30} = \frac{30}{60}$

$\frac{2}{3}$ „ „ „ $60 : 3 = 20$; $\frac{2.20}{3.20} = \frac{40}{60}$

$\frac{3}{4}$ „ „ „ $60 : 4 = 15$; $\frac{3.15}{4.15} = \frac{45}{60}$

$\frac{4}{5}$ „ „ „ $60 : 5 = 12$; $\frac{4.12}{5.12} = \frac{48}{60}$

$\frac{5}{6}$ „ „ „ $60 : 6 = 10$; $\frac{5.10}{6.10} = \frac{50}{60}$

Regel: Mehrere Brüche werden gleichnamig gemacht, indem man das kleinste gemeinsame Vielfache für alle vorhandenen Nenner aufsucht und dieses der Reihe nach durch alle Nenner dividiert. Die erhaltenen Quotienten mit den Zählern multipliziert, ergeben die Zähler der erweiterten Brüche, als deren Nenner der gesuchte kl. g. N. erscheint.

§ 23. Die Addition und Subtraktion gemeiner Brüche.

1. Die Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche.

a) $\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3+5}{11} = \frac{8}{11}$; sprich: 3 Elftel und 5 Elftel gibt 8 Elftel

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{1+3+5+4}{6} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}.$$

b) $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{7-5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

$$\frac{12}{13} - \frac{10}{13} = \frac{12-10}{13} = \frac{2}{13}.$$

Regel: Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man deren Zähler addiert und den gleichnamigen Nenner beibehält.

Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man den Zähler des Subtrahends vom Zähler des Minuends in Abzug bringt und der Differenz den gleichnamigen Nenner gibt.

2. Die Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche.

Ebenso wie nur gleichnamige Zahlen addiert oder subtrahiert werden können, kann man auch nur gleichnamige gemeine Brüche zusammenzählen oder voneinander abziehen. Sind daher ungleichnamige Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, so müssen dieselben vorher gleichnamig gemacht, d. i. auf gleichen Nenner gebracht werden.

Beispiele: 1. $\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$.

5	6	8	2
5	3	4	2
5	3	2	2
5	3	1	5
1	3	1	3
1	1	1	

v $(5, 6, 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 120$.

$\frac{3}{5}$ wird erweitert mit $120 : 5 = 24$; $\frac{3 \cdot 24}{5 \cdot 24} = \frac{72}{120}$

$\frac{5}{6}$ „ „ „ $120 : 6 = 20$; $\frac{5 \cdot 20}{6 \cdot 20} = \frac{100}{120}$

$\frac{7}{8}$ „ „ „ $120 : 8 = 15$; $\frac{7 \cdot 15}{8 \cdot 15} = \frac{105}{120}$

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{72}{120} + \frac{100}{120} + \frac{105}{120} = \frac{72 + 100 + 105}{120} = \frac{277}{120} = 2\frac{37}{120}.$$

*) Die Zahl 2 ist in 4 und 3 in 6 enthalten; 2 und 3 können daher als Faktoren der übrigen Zahlen im vorhinein gestrichen werden.

Nach Auffindung des kl. g. N. ist beim praktischen Rechnen folgende kurze Anschreibweise gebräuchlich:

v (5, 6, 8) = 120

$\frac{3}{5}$	24	72
$\frac{5}{6}$	20	100
$\frac{7}{8}$	15	105

$\frac{277}{120} = 2\frac{37}{120}$.

2. $\frac{15}{64} - \frac{13}{88}$.

64	88	2
32	44	2
16	22	2
8	11	2
4	11	2
2	11	2
1	11	11
1	1	

v (64, 88) = 704

$\frac{15}{64}$	11	165
$\frac{13}{88}$	8	104

$\frac{61}{704}$.

v (64, 88) = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 11 = 704.

Regel: Ungleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man sie vorher auf gemeinsamen Nenner bringt und dann wie mit gleichnamigen Brüchen verfährt.

Zusatz. Gemischte Zahlen werden addiert oder subtrahiert, indem man sie zuerst in unechte Brüche verwandelt und letztere dann wie gemeine Brüche addiert oder subtrahiert. Z. B.

a) $8\frac{5}{6} + 7\frac{3}{4} = \frac{53}{6} + \frac{31}{4} = \frac{106}{12} + \frac{93}{12} = \frac{199}{12} = 16\frac{7}{12}$.

b) $9\frac{3}{4} - 6\frac{1}{3} = \frac{39}{4} - \frac{19}{3} = \frac{117}{12} - \frac{76}{12} = \frac{41}{12} = 3\frac{5}{12}$.

§ 24. Die Multiplikation und Division gemeiner Brüche.

1. Die Multiplikation eines gemeinen Bruches mit einer ganzen Zahl.

Nach der bei der Multiplikation unbenannter und einnamiger ganzer Zahlen gegebenen Erklärung (§ 5) bedeutet $\frac{3}{13} \times 4$, oder was dasselbe ist, $4 \times \frac{3}{13}$, daß der Bruch $\frac{3}{13}$ 4mal als Addend zu setzen ist. Wir erhalten also:

$\frac{3}{13} . 4 = 4 . \frac{3}{13} = \frac{3}{13} + \frac{3}{13} + \frac{3}{13} + \frac{3}{13} = \frac{3+3+3+3}{13} = \frac{3 . 4}{13} = \frac{12}{13}$. Es ist somit $\frac{3}{13} \times 4 = \frac{3 . 4}{13} = \frac{12}{13}$.

Hieraus folgt die allgemeine Regel: Ein gemeiner Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler desselben mit der ganzen Zahl multipliziert und den Nenner unverändert beibehält.

Diese allgemeine Regel kann für bestimmte Fälle eine Erweiterung erfahren. *a)* Die ganze Zahl (der Multiplikator) ist in dem Nenner ohne Rest enthalten. In diesem Falle dividiert man den Nenner des Bruches durch dieselbe Zahl, anstatt den Zähler mit der letzteren zu multiplizieren, denn es ist in dem speziellen Beispiele:

$\frac{3}{8} . 2 = \frac{3}{8 : 2}$ = ebenso $\frac{3}{4}$, wie $\frac{3}{8} . 2 = \frac{3 . 2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

b) Der Nenner des Bruches (des Multiplikands) und die ganze Zahl sind durch dieselbe Zahl teilbar. In diesem Falle wird der Nenner

und die ganze Zahl gekürzt, bevor die allgemeine Multiplikationsregel Anwendung findet, denn es ist in dem Beispiele

$$\frac{2}{35} \cdot \overset{5}{\overbrace{15}} = \frac{2}{7} \cdot 3 = \text{ebenso } \frac{6}{7}, \text{ wie } \frac{2}{35} \cdot 15 = \frac{2 \cdot 15}{35} = \overset{5}{\overbrace{\frac{30}{35}}} = \frac{6}{7}.$$

Zusatz. Eine gemischte Zahl wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man dieselbe in einen unechten Bruch verwandelt und diesen dann mit der ganzen Zahl multipliziert.

$$\text{Z. B. } 8\tfrac{1}{4} \times 5 = \frac{33}{4} \times 5 = \frac{165}{4} = 41\tfrac{1}{4}.$$

2. Die Division eines gemeinen Bruches durch eine ganze Zahl.

Nach der Addition gleichnamiger gemeiner Brüche ist $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Es ist also auch $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Hätten wir nun $\frac{1}{2}$ in 2 gleiche Teile zu teilen, so erhalten wir $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ ist aber auch gleich $\frac{1}{2 \cdot 2}$; es ist also $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$.

Daraus folgt die allgemeine Regel: Ein gemeiner Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler unverändert läßt und den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert.

Auch diese Regel erfährt in bestimmten Fällen eine Erweiterung, und zwar:

a) Die ganze Zahl ist in dem Zähler des gemeinen Bruches ohne Rest enthalten. In diesem Falle dividiert man den Zähler des gemeinen Bruches durch die ganze Zahl, anstatt den Nenner mit der letzteren zu multiplizieren, denn es ist in dem Beispiele

$$\frac{6}{11} : 3 = \frac{6 : 3}{11} = \text{ebenso } \frac{2}{11}, \text{ wie } \frac{6}{11} : 3 = \frac{6}{11 \cdot 3} = \overset{3}{\overbrace{\frac{6}{33}}} = \frac{2}{11}.$$

b) Die ganze Zahl und der Zähler des Bruches sind durch dieselbe Zahl teilbar. In diesem Falle wird der Zähler und die ganze Zahl durch das betreffende Maß gekürzt, bevor die allgemeine Divisionsregel angewendet wird, denn es ist in dem Beispiele

$$\frac{10}{13} : \overset{5}{\overbrace{25}} = \frac{2}{13} : 5 = \frac{2}{13 \cdot 5} = \text{ebenso } \frac{2}{65}, \text{ wie } \frac{10}{13} : 25 = \overset{5}{\overbrace{\frac{10}{13 \cdot 25}}} = \frac{2}{13 \cdot 5} = \frac{2}{65}.$$

Zusatz. Eine gemischte Zahl wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man dieselbe in einen unechten Bruch verwandelt und diesen dann durch die ganze Zahl dividiert.

$$\text{Z. B. } 12\tfrac{6}{7} : 3 = \frac{90}{7} : 3 = \frac{30}{7} = 4\tfrac{2}{7}.$$

3. Die Multiplikation eines gemeinen Bruches mit einem gemeinen Bruche.

Es sei der gemeine Bruch $\frac{2}{3}$ mit dem gemeinen Bruche $\frac{5}{7}$ zu multiplizieren, oder, was dasselbe ist, es soll der gemeine Bruch $\frac{5}{7}$ $\frac{2}{3}$ mal als Addend gesetzt werden.

Wäre $\frac{5}{7}$ zweimal als Addend zu setzen, so gäbe dies $\frac{5}{7} + \frac{5}{7} = 2 \cdot \frac{5}{7}$; soll $\frac{5}{7}$ aber nur $\frac{2}{3}$ mal als Addend gesetzt werden, so ergibt dies, da $\frac{2}{3}$ der dritte Teil von 2 ist, auch nur den dritten Teil von $2 \cdot \frac{5}{7} = \frac{\frac{2 \cdot 5}{7}}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$. Es ist daher $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$.

Es lautet daher die allgemeine Regel: Gemeine Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Nenner mit Nenner und Zähler mit Zähler multipliziert und den Bruchstrich unverändert beibehält.

Man pflegt die Multiplikation in diesem Sinne in den meisten Fällen nicht gleich auszuführen, sondern vorerst anzuzeigen, um hiedurch das Kürzen des Produktes leichter vornehmen zu können. In diesen Fällen wird immer in nachstehender Weise gekürzt:

$$\frac{3}{10} \times \frac{15}{27} = \frac{\overset{1}{3} \cdot \overset{\overset{1^{*)}}{3}}{15}}{\underset{2}{10} \cdot \underset{\underset{3}{9}}{27}} = \frac{1}{6}, \text{ anstatt } \frac{3 \cdot 15}{10 \cdot 27} = \frac{1 \cdot 15}{10 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

Zusatz. Gemischte Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man dieselben vorerst in unechte Brüche verwandelt und sodann die Multiplikation wie mit diesen ausführt.

$$\text{Z. B. } 8\frac{3}{4} \times 7\frac{1}{5} = \frac{35}{4} \cdot \frac{36}{5} = \frac{\overset{7}{35} \cdot \overset{9}{36}}{\underset{1}{4} \cdot \underset{1}{5}} = 63.$$

4. Die Division eines gemeinen Bruches durch einen gemeinen Bruch.

Nach dem bei der Division eines gemeinen Bruches durch eine ganze Zahl angegebenen Verfahren erhalten wir: $\frac{1}{4} : 1 = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$; $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$; $\frac{1}{4} : 4 = \frac{1}{16}$ usw., d. h. der Quotient wird um so kleiner, je größer der Divisor ist, und zwar doppelt so klein, wenn der Divisor um das Doppelte, 3mal so klein, wenn der Divisor um das 3fache größer ist usw. Man kann deshalb auch umgekehrt schließen, daß der Quotient um so größer werden wird, je kleiner der Divisor ist, und zwar um das Doppelte größer, wenn der Divisor um die Hälfte, um das 3fache größer, wenn der Divisor um das 3fache kleiner gemacht wird usf. Ist hiernach $\frac{1}{4} : 1 = \frac{1}{4}$, so ist $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{4}$, ferner $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{1 \cdot 3}{4}$ usf. Wenn nun z. B. der Divisor anstatt $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ ist, so kann der Quotient, weil $\frac{2}{3}$ 2mal so groß als $\frac{1}{3}$ ist, nur halb so groß sein; es ist also, wenn

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4}, \quad \frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}.$$

Mit Hilfe der vorhergehenden Schlußfolgerungen haben wir die Division $\frac{1}{4} : \frac{2}{3}$ in eine Multiplikation umgewandelt, in welcher als Multiplikand der Dividend und als Multiplikator der umgekehrte Divisor auftritt. Man bezeichnet einen Bruch, welcher durch Vertauschung des Zählers und Nenners eines zweiten Bruches gebildet wurde, wie $\frac{3}{2}$ gegenüber $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ gegenüber $\frac{3}{4}$, als den umgekehrten oder reziproken Wert des ersten Bruches und hat unter Anwendung dieses Begriffes für die Division zweier gemeiner Brüche folgende Regel:

*) Diese Art der Kürzung von Brüchen beruht auf dem Satze, daß ein Produkt durch eine Zahl dividiert wird, wenn man einen Faktor durch diese Zahl dividiert. Z. B. $24 : 6 = 4$ und ebenso $4 \times 6 : 6 = 4 \cdot 1 = 4$.

Ein gemeiner Bruch wird durch einen gemeinen Bruch dividiert, wenn man den Dividend mit dem reziproken Werte des Divisors multipliziert.

Auch hier zeigt man die vorzunehmende Multiplikation vorerst an und nimmt die Kürzungen in derselben Weise vor, wie es bei der Multiplikation gemeiner Brüche angegeben wurde. Sollte die Division zweier gemeiner Brüche in Form eines Doppelbruches gegeben sein, so ist die Division eben auch nach der aufgestellten Regel vorzunehmen. In dem speziellen Beispiele $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$

haben wir $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{\underset{2}{\not 4}} \cdot \frac{\overset{3}{\not 6}}{5} = \frac{9}{10}$.

Es ist wohl selbstverständlich, daß unter die allgemeine Regel über die Division zweier gemeiner Brüche auch jene Fälle zu rechnen sind, in welchen Ganze oder Dezimalzahlen durch einen gemeinen Bruch zu dividieren kommen, denn jede ganze Zahl, sowie jede Dezimalzahl kann als gemeiner Bruch mit dem Nenner 1 dargestellt werden, so daß z. B. $2 : \frac{1}{3} = \frac{2}{1} : \frac{1}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} = 6$; $7{\cdot}65 : \frac{3}{5} = \frac{\overset{2{\cdot}55}{\not 7{\cdot}\not 65}}{1} \times \frac{5}{\underset{1}{\not 3}} = 12{\cdot}75$ usw.

Zusatz. Eine gemischte Zahl wird durch eine zweite gemischte Zahl dividiert, indem man beide auf unechte Brüche bringt und dann wie mit gemeinen Brüchen verfährt.

Z. B. $8\frac{3}{7} : 3\frac{1}{5} = \frac{59}{7} : \frac{16}{5} = \frac{59}{7} \cdot \frac{5}{16} = \frac{295}{112} = 2\frac{71}{112}$.

§ 25. Die Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch.

Jeder gemeine Bruch kann, wie bereits hervorgehoben, als eine angezeigte Division betrachtet werden. Wird diese Division ausgeführt, so erhält man, wenn die Division nicht in ganzen Zahlen aufgeht, als Quotienten einen Dezimalbruch. Z. B. $\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{\cdot}25$.

Regel: Ein gemeiner Bruch wird in einen Dezimalbruch verwandelt, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.

Bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch sind 3 Fälle möglich:

a) $\frac{1}{5} = 1 : 5 = 0{\cdot}2$, die Division „geht ohne Rest auf".

b) $\frac{5}{9} = 5 : 9 = 0{\cdot}555 \ldots$,
50
50
50

c) $\frac{1}{6} = 1 : 6 = 0{\cdot}166 \ldots$,
10
40
40

(b und c:) d. h. die Division ist endlos.

„Geht die Division ohne Rest auf", so heißt der Dezimalbruch ein geschlossener oder endlicher, z. B. $\frac{1}{5} = 0{\cdot}2$; bleibt dagegen ein Rest,

so wird der Dezimalbruch ein unendlicher genannt, z. B. $\frac{5}{9} = 0{\cdot}5555\ldots$, oder $\frac{1}{6} = 0{\cdot}1666\ldots$

Bei einem unendlichen Dezimalbruche wiederholen sich die Dezimalstellen entweder von der ersten oder von einer höheren Stelle an. oder sie bilden eine unendlich mannigfaltige Folge ohne regelmäßige Wiederholungen. Man nennt die sich wiederholenden Dezimalen die Periode und den Dezimalbruch einen periodischen Dezimalbruch. Die Periode schreibt man stets nur einmal an. macht sie jedoch dadurch kenntlich, daß man die erste und letzte Stelle derselben mit einem über die erste und letzte Ziffer gesetzten Punkte bezeichnet. Z. B. $0{\cdot}\dot{5}$ zeigt an, daß sich die Zahl 5 fortwährend wiederholt, und $0{\cdot}1\dot{6}$ bedeutet, daß sich nur die Zahl 6 wiederholt.

Ein periodischer Dezimalbruch heißt ein rein periodischer. wenn die aus einer oder mehreren Ziffern bestehende Periode gleich mit der ersten Dezimale beginnt, wie $0{\cdot}5555\ldots = 0{\cdot}\dot{5}$, oder $0{\cdot}2727\ldots = 0{\cdot}\dot{2}\dot{7}$, und ein gemischtperiodischer, wenn die Periode erst mit einer späteren Stelle anfängt, wie $0{\cdot}5333\ldots = 0{\cdot}5\dot{3}$, oder $1{\cdot}45272727\ldots = 1{\cdot}45\dot{2}\dot{7}$.

§ 26. Die Verwandlung eines Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch.

1. Geschlossene Dezimalbrüche.

Nach dem Aufbaue der Dezimalzahlen ist:

$$0{\cdot}5 = \frac{5}{10};\ 0{\cdot}03 = \frac{3}{100};\ 0{\cdot}025 = \frac{25}{1000}.$$

Regel: Ein geschlossener Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die Dezimalen als Zähler und als Nenner eine Zahl, die an höchster Stelle 1 und dann soviele Nullen als der Dezimalbruch Stellen hat, anschreibt.

2. Reinperiodische Dezimalbrüche.

Der reinperiodische Dezimalbruch $0{\cdot}\dot{4}\dot{2}$ ist in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Der 100fache Wert von $0{\cdot}\dot{4}\dot{2}$ ist . . . . $42{\cdot}\dot{4}\dot{2}$; wird hievon der einfache Wert des Bruches $0{\cdot}\dot{4}\dot{2}$ . . . . $0{\cdot}\dot{4}\dot{2}$ in Abzug gebracht, so erhält man für den
99-fachen Wert von $0{\cdot}\dot{4}\dot{2}$ die Zahl . . . . $42{\cdot}00$, also für den einfachen Wert von $0{\cdot}\dot{4}\dot{2}$ den 99. Teil von $42{\cdot}00$, d. i. $0{\cdot}\dot{4}\dot{2} = \frac{42}{99}$.

Hieraus folgt die Regel:

Ein reinperiodischer Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die Periode als Zähler und soviele Neuner als Nenner des gemeinen Bruches anschreibt, als die Periode Ziffern hat.

3. Gemischtperiodische Dezimalbrüche.

Der gemischtperiodische Dezimalbruch $0{\cdot}12\dot{5}\dot{6}$ ist in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Der 10.000fache Wert von $0{\cdot}12\dot{5}\dot{6}$ ist . . $1256{\cdot}\dot{5}\dot{6}$;
wird davon der 100fache Wert von $0{\cdot}12\dot{5}\dot{6}$ mit . . $12{\cdot}\dot{5}\dot{6}$ abgezogen,
so bleibt für den 9900fachen Wert von $0{\cdot}12\dot{5}\dot{6}$ . . . . . 1244 ,
daher für den 1fachen Wert von $0{\cdot}12\dot{5}\dot{6}$ . . . . . $\frac{1244}{9900}$. Es ist sonach $0{\cdot}12\dot{5}\dot{6} = \frac{1244}{9900}$.

Regel: Ein gemischtperiodischer Dezimalbruch ist gleich einem gemeinen Bruche, der als Zähler die Differenz aus allen Dezimalen und den der Periode vorangehenden Ziffern, und als Nenner soviele Neuner hat, als die Periode Stellen besitzt, und soviele Nullen, als der Periode Dezimalstellen vorangehen.

§ 27. Aufgaben über das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

Verwandle in gemischte Zahlen:

1. $\frac{23}{9}$, $\frac{33}{12}$, $\frac{133}{72}$, $\frac{180}{64}$, $\frac{232}{60}$, $\frac{543}{42}$, $\frac{1038}{315}$, $\frac{71459}{348}$.

Verwandle in unechte Brüche:

2. 3[illegible], $7\frac{5}{9}$, $13\frac{5}{11}$, $23\frac{9}{13}$, $102\frac{35}{64}$, $101\frac{97}{111}$, $10003\frac{417}{1597}$.

Erweitere die Brüche:

3. $\frac{1}{2}$, [illegible], $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{23}{[illegible]}$ auf den Nenner 60;

4. $\frac{91}{120}$, $\frac{147}{264}$, $\frac{103}{198}$, $\frac{211}{495}$ auf einen Nenner, der gleich ist dem kl. g. V. aller Nenner;

5. $\frac{17}{44}$, $\frac{31}{125}$, $\frac{17}{930}$, $\frac{49}{1570}$ auf einen Nenner wie bei Aufgabe 4.

Kürze folgende Brüche:

6. $\frac{4}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{27}{72}$, $\frac{36}{93}$, $\frac{14}{56}$, $\frac{10}{150}$, $\frac{33}{132}$, $\frac{75}{225}$, $\frac{375}{1375}$.

Folgende Brüche sind gleichnamig zu machen:

7. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{1[illegible]}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{13}{[illegible]}$; 8. $\frac{7}{1[illegible]}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{13}{14}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{11}{24}$; 9. $\frac{15}{16}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{21}{4[illegible]}$, $\frac{46}{93}$;

10. $\frac{115}{183}$, $\frac{211}{381}$; 11. $\frac{81}{82}$, $\frac{415}{51}$.

Folgende Brüche sind zu addieren und zu subtrahieren:

12. $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{8}$; 13. $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{8}{9}$; 14. $\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{11}{12}$;

15. $\frac{5}{13}+\frac{7}{15}+\frac{16}{17}+\frac{15}{19}$; 16. $\frac{31}{55}+\frac{106}{201}+\frac{112}{118}$; 17. $\frac{36}{63}+\frac{63}{93}$;

18. $8\frac{2}{3}+12\frac{5}{8}+21\frac{1}{2}+36\frac{5}{6}$; 19. $185\frac{7}{8}+230\frac{5}{12}$; 20. $107\frac{1}{12}+4\frac{1}{3}$;

21. $97\frac{88}{91}+93\frac{1}{3}$; 22. $14\frac{1}{30}+19\frac{1}{66}+23\frac{1}{88}$; 23. $6\frac{1}{99}+7\frac{6}{90}$; 24. $\frac{10}{24}-\frac{3}{24}$;

25. $\frac{115}{311}-\frac{17}{311}$; 26. $\frac{857}{1054}-\frac{354}{1054}$; 27. $3\frac{1}{4}-1\frac{3}{4}$; 28. $88\frac{5}{8}-12\frac{29}{30}$; 29. $901\frac{1}{5}-805\frac{37}{48}$;

30. $201\frac{36}{55}-201\frac{147}{555}$; 31. $38-14\frac{3}{811}$; 32. $57-48\frac{4}{13}$; 33. [illegible]$8\frac{3}{8}-57$;

34. $99\frac{5}{17}-14\frac{5}{171}$; 35. $25\frac{104}{164}-23\frac{401}{461}$.

Es sind folgende Multiplikationen und Divisionen auszuführen:

36. $\frac{1}{3}\times 2$; $\frac{2}{5}\times 10$; $\frac{3}{8}\times 11$; $\frac{5}{9}\times 36$; $\frac{11}{26}\times 13$.

37. $35\frac{5}{18}\times 16$; $139\frac{1}{3}\times 87$; $2011\frac{57}{73}\times 114$.

38. $\frac{114}{385}\times 13$; $\frac{211}{50}\times 86$; $\frac{3204}{5001}\times 294$.

39. $$13{\cdot}5\times\frac{1}{5}=\frac{13{\cdot}5}{5}=2{\cdot}7;\qquad \frac{3}{20}\times 0{\cdot}1675=\frac{3\times \overset{0\cdot0335}{\not{0}{\cdot}1675}}{\underset{4}{2\not{0}}}=\frac{0{\cdot}1005}{4}=0{\cdot}025125.$$

40. 1 ha = 10.000 m^2; wieviel m^2 sind $\frac{5}{8}$ ha?

41. 1 c^0 = 6·821 m^3; wieviel m^3 sind $24\frac{1}{4}$ c^0?

42. $\frac{1}{3}:2$; $\frac{2}{7}:8$; $\frac{15}{31}:16$; $\frac{51}{83}:11$. 43. $3\frac{1}{5}:6$; $14\frac{21}{36}:15$; $39\frac{5}{7}:12$; $112\frac{1}{4}:19$.

44. $\frac{36}{63}:39$; $\frac{72}{113}:81$; $\frac{201}{303}:87$; $\frac{1005}{3045}:115$. 45. $344\frac{1}{8}:9$; $271\frac{7}{13}:26$; $251\frac{13}{15}:45$.

46. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$; $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$; $\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7}$; $\frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{10}{11}$.

47. $\frac{13}{24} \times \frac{36}{52}$; $\frac{72}{85} \times \frac{95}{102}$; $\frac{305}{702} \times \frac{816}{410}$; $\frac{3857}{7583} \times \frac{4738}{8573}$.

48. $\frac{1315}{3952} \times \frac{7108}{8452}$; $\frac{3}{501} \times \frac{3}{18}$; $\frac{783}{903} \times \frac{5111}{6006}$; $\frac{71}{85} \times \frac{93}{101} \times \frac{117}{205}$.

49. $\frac{8}{15} \times \frac{9}{25} \times \frac{10}{35}$; $\frac{11}{45} \times \frac{12}{55} \times \frac{13}{65}$; $\frac{14}{75} \times \frac{16}{85} \times \frac{16}{95}$.

50. $6\frac{3}{4} \times 7\frac{6}{9}$; $13\frac{17}{21} \times 39\frac{17}{23}$; $103\frac{6}{17} \times 112\frac{8}{19}$; $3\frac{5}{29} \times 6\frac{[illegible]}{58}$.

51. $273\frac{53}{102} \times 222\frac{22}{23}$; $1015\frac{7}{15} \times 203\frac{1}{17}$.

52. Ein Arbeiter verdient in einem Tage 1·8 *K*; wieviel verdient er in $1\frac{3}{4}$ Tagen?
Wenn ein Arbeiter in einem Tage 1·8 *K* verdient, so verdient er in $\frac{1}{4}$ Tag $\frac{1·80}{4}$ *K*, und in $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ Tagen 7mal $\frac{1·80}{4} = \frac{7}{4} \times 1·80\ K = 3·15\ K$.

53. Für eine sogenannte Plätzesaat mit Fichte braucht man pro 1 *ha* $9\frac{2}{5}$ *kg* Samen; wieviel Kilogramm sind für 0·75 *ha*, 1·35 *ha*, $1\frac{1}{3}$ *ha*, $2\frac{3}{5}$ *ha* erforderlich?

54. $\frac{3}{4} : \frac{7}{9}$; $\frac{6}{13} : \frac{15}{81}$; $\frac{101}{305} : \frac{185}{201}$; $\frac{1041}{2111} : \frac{2}{99}$; 55. $\frac{286}{957} : \frac{396}{627}$; $\frac{1254}{3405} : \frac{1932}{2100}$; $\frac{24891}{32481} : \frac{312}{501}$.

56. $9\frac{3}{11} : 5\frac{4}{9}$; $16\frac{43}{51} : 9\frac{16}{83}$; $103\frac{5}{27} : 101\frac{83}{108}$.

57. $\dfrac{\frac{11}{13}}{8}$; $\dfrac{\frac{15}{17}}{13}$; $\dfrac{\frac{19}{21}}{25}$; $\dfrac{\frac{23}{29}}{\frac{31}{37}}$; $\dfrac{\frac{39}{41}}{\frac{43}{47}}$; $\dfrac{\frac{51}{53}}{\frac{57}{59}}$; $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$.

58. $25·65 : \frac{3}{4} = \frac{25·65}{1} : \frac{3}{4} = \frac{\overset{8·55}{25·65} \times 4}{\underset{1}{3}} = 34·20$; $0·56 : \frac{7}{13}$.

59. Aus einem Schlage hat ein Fuhrmann $253\frac{1}{2}$ *rm* Scheitholz nach einer Holzlegstätte zu verfrachten; wie oft muß er fahren, wenn er jedesmal $3\frac{1}{4}$ *rm* verladet?

60. $152\frac{3}{4}$ Längenmeter eines Stangenzaunes kosten an Zimmermannsarbeit $54\frac{1}{2}$ *K*; wie hoch kommt 1 Längenmeter?

Verwandle folgende gemeine Brüche in Dezimalbrüche:

61. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{18}{41}$, $\frac{87}{96}$, $\frac{73}{115}$, $\frac{118}{1001}$, $\frac{57}{205}$. 62. $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{19}$, $\frac{27}{83}$, $\frac{56}{189}$, $\frac{201}{503}$, $\frac{81}{99}$, $\frac{105}{999}$.

Verwandle folgende reinperiodische Dezimalbrüche in gemeine Brüche:

63. $0·\dot{6}$, $0·\dot{6}\dot{7}$, $0·\dot{3}4\dot{8}$, $0·\dot{5}00\dot{1}$, $0·\dot{6}8490\dot{3}$.

64. $3·\dot{7} = 3\frac{7}{9}$, $5·\dot{8}8\dot{9}$, $17·\dot{4}\dot{1}$, $151·\dot{3}2\dot{8}$, $2·\dot{5}0013\dot{2}$.

Verwandle folgende gemischtperiodische Dezimalbrüche in gemeine Brüche:

65. $0·3\dot{4}7\dot{8}$, $0·51\dot{1}\dot{2}$, $0·342\dot{7}$, $0·87\dot{1}4\dot{8}$.

66. $3·487\dot{0}\dot{1} = 3\frac{48701 - 487}{99000} = 3\frac{48214}{99000} = 3\frac{24107}{49500}$.

67. $51·4\dot{3}2\dot{8}$, $103·5160\dot{8}$, $153·21\dot{6}73\dot{8}$.

Führe folgende Rechnungen durch:

68. $3·25 + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}$; $0·0015 + \frac{7}{125} + \frac{1}{75}$.

69. $0·75 - \frac{1}{5}$; $\frac{3}{4} - 0·35$; $5·35 - \frac{2}{25}$.

70. $0·\dot{6} \times \frac{3}{5}$; $0·51\dot{1}\dot{2} \times \frac{1}{20}$; $7·\dot{5}00\dot{5} : \frac{1}{5}$

In allen diesen Aufgaben verwandelt man die vorkommenden Dezimalbrüche in gemeine Brüche, führt dann die Rechnungsoperation durch und bringt das Resultat erforderlichen Falles wieder auf einen Dezimalbruch.

V. Kapitel.

Das Potenzieren.

§. 28. Das Potenzieren.

Eine gegebene Zahl einmal oder mehreremale mit sich selbst multiplizieren heißt diese Zahl potenzieren,*) oder zu einer Potenz erheben, oder die Potenz dieser Zahl bilden. Eine Potenz ist also ein Produkt aus einer Anzahl gleichgroßer Faktoren. Die Zahl, welche potenziert werden soll, wird Grundzahl oder Basis und die Zahl, welche angibt, aus wie vielen gleichen Faktoren die Potenz zu bilden ist, Potenzexponent oder kurz Exponent genannt. Der Exponent wird rechts oben an die Basis angesetzt. Z. B. ist die

zweite Potenz von $7 = 7^2 = 7 \times 7 = 49$;
dritte „ „ $7 = 7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$;
fünfte „ „ $3 = 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$.

Eine Zahl zweimal als Faktor setzen (also einmal mit sich selbst multiplizieren) nennt man diese Zahl quadrieren oder zum Quadrat erheben. Das erhaltene Produkt heißt das Quadrat dieser Zahl. Die Quadrate der ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind z. B. $1^2 = 1 \times 1 = 1$, $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $3^2 = 3 \times 3 = 9$, $4^2 = 4 \times 4 = 16$, $5^2 = 5 \times 5 = 25$, $6^2 = 6 \times 6 = 36$ usw.

Das Quadrat von z. B. 307 ist $307^2 = 307 \times 307 = 94.249$.
„ „ „ „ „ 30·7 „ $30{\cdot}7^2 = 30{\cdot}7 \times 30{\cdot}7 = 942{\cdot}49$.
„ „ „ „ „ $\frac{7}{12}$ „ $\frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{7 \times 7}{12 \times 12} = \frac{7^2}{12^2} = \frac{49}{144}$ **) usw.

Eine Zahl dreimal als Faktor setzen (also zweimal mit sich selbst multiplizieren) nennt man diese Zahl kubieren oder zum Kubus (Würfel) erheben. Das erhaltene Endprodukt heißt der Kubus dieser Zahl. Die Kubusse der ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind z B. $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$, $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ usw.

Der Kubus von z. B. 307 ist $307^3 = 307 \times 307 \times 307 = 28{,}934{,}443$
„ „ „ „ „ 30·7 „ $30{\cdot}7^3 = 30{\cdot}7 \times 30{\cdot}7 \times 30{\cdot}7 = 28.934{\cdot}443$
„ „ „ „ „ $\frac{7}{12}$ „ $\frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{7 \times 7 \times 7}{12 \times 12 \times 12} = \frac{7^3}{12^3} = \frac{343}{1728}$ **)
usw.

Regel: Die Bildung der Quadrate, der Kubusse und der höheren Potenzen der ganzen Zahlen, der Dezimalzahlen und der gemeinen Brüche erfolgt genau nach den Regeln der einmaligen oder mehrmaligen Multiplikation dieser Zahlen.

Es gibt noch andere Rechnungsverfahren, um die Potenzen verschiedener Zahlengrößen zu finden; dieselben sind in der Regel komplizierter und zeitraubender als die einfache Multiplikation und werden in den §§ 67 und 69 angedeutet werden.

---

*) Potenzieren (lat.) = verstärken.

**) Es steht selbstverständlich nichts im Wege, einen zu potenzierenden gemeinen Bruch vor der Potenzierung in einen Dezimalbruch zu verwandeln und letzteren zu potenzieren. Die Resultate müssen gleich sein.

§ 29. Aufgaben über das Potenzieren.

Es sind die folgenden angedeuteten Quadrate auszurechnen:

1. $14^2, 22^2, 24^2, 28^2, 30^2, 37^2, 41^2, 87^2, 99^2.$
2. $318^2, 512^2, 645^2, 787^2, 984^2.$
3. $2847^2, 6551^2, 7673^2, 7888^2, 9009^2, 9091^2.$
4. $1{\cdot}42^2, 0{\cdot}563^2, 0{\cdot}6738^2, 1{\cdot}45396^2, 2{\cdot}576894^2.$
5. $47{\cdot}02^2, 0{\cdot}003801^2, 0{\cdot}00015^2, 30{\cdot}001^2, 29{\cdot}00019^2.$
6. $\left(\frac{5}{6}\right)^2, \left(\frac{7}{8}\right)^2, \left(\frac{87}{93}\right)^2, \left(\frac{105}{207}\right)^2, \left(\frac{16}{45}\right)^2, \left(\frac{17}{53}\right)^2, \left(\frac{301}{[illegible]}\right)^2.$

Es sind die folgenden angedeuteten Kubusse auszurechnen:

7. $12^3, 18^3, 27^3, 36^3, 47^3, 69^3, 78^3, 95^3.$
8. $243^3, 587^3, 396^3, 595^3, 301^3, 202^3.$
9. $3245^3, 1002^3, 3084^3, 5001^3, 7910^3.$
10. $76580432^3, 651800043^3, 1765000210^3.$
11. $0{\cdot}0125^3, 0{\cdot}34^3, 0{\cdot}9501^3, 17{\cdot}001^3, 41{\cdot}0234^3, 0{\cdot}01^3.$
12. $\left(\frac{7}{8}\right)^3, \left(\frac{17}{19}\right)^3, \left(\frac{16}{48}\right)^3, \left(\frac{41}{54}\right)^3, \left(\frac{67}{76}\right)^3, \left(\frac{84}{97}\right)^3.$

Wortaufgaben über das Quadrieren und Kubieren können erst in der Geometrie behandelt werden.

VI. Kapitel.

Das Wurzelziehen (Radizieren).

§ 30. Allgemeines.

Wurzelziehen oder Radizieren heißt aus einer gegebenen Zahl eine neue Zahl suchen, welche zu einer gegebenen (2. oder 3. oder 4. usw.) Potenz erhoben die gegebene Zahl liefert. Beim Wurzelziehen wird also eine gegebene Zahl in eine gegebene Anzahl von gleichgroßen Faktoren zerlegt. Die gegebene Zahl heißt Radikand. Die gesuchte Zahl, welche zu einer gegebenen Potenz erhoben den Radikand ergibt, heißt Wurzel (des Radikanden). Die Anzahl der Wurzeln, in welche der Radikand zu zerlegen ist, heißt Wurzelexponent.

Das Wurzelzeichen,*) d. h. jenes Zeichen, welches bedeutet, daß aus einer Zahl die Wurzel gezogen werden soll, hat man zu schreiben $\sqrt{\ }$. Der Wurzelexponent wird in die obere Öffnung des Wurzelzeichens gesetzt. Um also anzudeuten, daß z. B. aus der Zahl 243 die 5. Wurzel gezogen werden soll, schreibt man $\sqrt[5]{243}$.

Die zweite Wurzel aus einer Zahl heißt Quadratwurzel, die dritte Wurzel aus einer Zahl Kubikwurzel. Bei der Quadratwurzel wird der Wurzelexponent 2 als überflüssig weggelassen, so daß z. B. unter $\sqrt{64}$ stets $\sqrt[2]{64}$ zu verstehen ist.

Aus dem Begriffe des Radizierens folgt z. B., daß $\left(\sqrt[5]{243}\right)^5 = 243$, daß $\left(\sqrt{64}\right)^2 = 64$ ist.

Das Potenzieren und das Radizieren sind einander ebenso entgegengesetzte Rechnungsarten, wie das Multiplizieren und das Dividieren.

*) Entstanden aus dem Buchstaben „r" der Lateinschrift (r für radix = Wurzel).

Wird demnach eine gegebene Zahl z. B. zum Quadrat erhoben und aus derselben die Quadratwurzel gezogen, so erhält man als Wurzel die gegebene Zahl. Es ist also z. B.

$$\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8, \text{ weil } 8^2 = 64 \text{ ist. Ebenso ist}$$

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7, \text{ weil } 7^3 = 343 \text{ ist.}$$

Beim Ausziehen der Quadratwurzel (beziehungsweise Kubikwurzel) ist aus dem Radikanden eine Zahl zu suchen, welche zum Quadrat (beziehungsweise Kubus) erhoben, den Radikand gibt, z. B.:

$$\sqrt{25} = 5, \text{ denn } 5^2 = 25 \text{ oder } \sqrt[3]{125} = 5, \text{ denn } 5^3 = 125.$$

Die Quadratwurzeln aus den Quadraten der einzifferigen Zahlen sind:

$$\sqrt{0} = 0,\ \sqrt{1} = 1,\ \sqrt{4} = 2,\ \sqrt{9} = 3,\ \sqrt{16} = 4,\ \sqrt{25} = 5,$$
$$\sqrt{36} = 6,\ \sqrt{49} = 7,\ \sqrt{64} = 8,\ \sqrt{81} = 9.$$

Die Kubikwurzeln aus den Kubussen der einzifferigen Zahlen sind:

$$\sqrt[3]{0} = 0,\ \sqrt[3]{1} = 1,\ \sqrt[3]{8} = 2,\ \sqrt[3]{27} = 3,\ \sqrt[3]{64} = 4,\ \sqrt[3]{125} = 5,$$
$$\sqrt[3]{216} = 6,\ \sqrt[3]{343} = 7,\ \sqrt[3]{512} = 8,\ \sqrt[3]{729} = 9.$$

Aus diesen Wurzeln ist ersichtlich, daß es z. B. unter den ganzen Zahlen von 1 bis 100 nur wenige gibt, deren Quadrat- oder Kubikwurzeln ganze Zahlen sind. Hieraus folgt, daß die Quadrat- und Kubikwurzeln der übrigen ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 gebrochene Zahlen sein müssen. Dasselbe gilt von den Wurzeln der ganzen Zahlen über 100. Alle Wurzeln aus ganzen Zahlen lassen sich, soweit sie nicht selbst ganzzahlig sind, durch Dezimalzahlen darstellen. Es ist z. B. klar, daß $\sqrt{70}$ zwischen 8 und 9 liegen muß, da 70 zwischen 8^2 und 9^2 liegt. $\sqrt{70}$ muß also ein Dezimalbruch sein, dessen Ganze 8 betragen und dessen Dezimalstellen vorläufig unbekannt sind. Ebenso wird z. B. die Quadratwurzel aus einer dreistelligen (oder mehrstelligen) ganzen Zahl eine Zahl sein, die außer den Einern und Zehnern (eventuell Hundertern, Tausendern etc.) in der Regel noch Dezimalstellen enthält. Die Wurzeln aus Dezimalzahlen oder gemeinen Brüchen müssen selbstverständlich jederzeit wieder Dezimalzahlen, beziehungsweise gemeine Brüche sein.

Das Rechnungsverfahren, nach welchem die Quadratwurzel und die Kubikwurzel aus beliebigen ganzen Zahlen, aus Dezimalzahlen sowie aus Brüchen gezogen wird, soll in den §§ 68 und 70 näher begründet werden. An dieser Stelle finden vorläufig die Ausführungsregeln für das Quadratwurzel- und Kubikwurzelziehen Platz.

§ 31. Das Ausziehen der Quadratwurzel.

a) Die Quadratwurzel aus ganzen Zahlen.

Regel (und Beispiel): Die Quadratwurzel aus einer gegebenen ganzen Zahl (z. B. 5,654.895) wird auf folgende Art gefunden:

1. Die gegebene Zahl, der Radikand, wird von rechts nach links in Abteilungen von 2 Ziffern geteilt (also 5 65 48 95). Die erste Abteilung links kann allenfalls auch nur eine Ziffer (5) enthalten. Sodann wird das größte Quadrat (4) jener ganzen, stets einzifferigen, Zahl (2)

gesucht, das in der ersten Abteilung links (5) enthalten ist. Jene ganze Zahl (2) wird als erste, den höchsten Stellenwert besitzende Ziffer der gesuchten Wurzel angeschrieben und deren Quadrat (4) von der ersten Abteilung links (5) subtrahiert.

2. Zu dem Subtraktionsreste (1), der manchmal auch gleich Null ist, wird die nächste zweizifferige Abteilung des Radikanden (65) herabgesetzt. Aus der so entstandenen Zahl (165) wird durch Hinweglassung der Einerstelle (5) ein Wurzeldividend (16) und aus dem Doppelten des bereits gefundenen Wurzelteiles (2) ein Wurzeldivisor (4) gebildet. Der Quotient 3 (der Quotient 4 wäre zu groß, ähnlich wie manchmal bei der gewöhnlichen Division) aus Wurzeldividend und Wurzeldivisor ist die nächste Wurzelziffer (3) und wird daher dem bereits gefundenen Wurzelteile (2) rechterhand zugeschrieben (also 23).

3. Nun wird eine Zahl (43) gebildet, deren Einerstelle (3) die zuletzt gefundene Wurzelziffer (3) ist und deren höhere Stellen der Wurzeldivisor (4) des Punktes 2 der Regel bildet. Diese Zahl (43) wird mit der zuletzt gefundenen Wurzelziffer (3) multipliziert und das Produkt (129) von jener bereits nach dem Punkte 2 der Regel gefundenen Zahl (165) subtrahiert, aus welcher der Wurzeldividend (16) gebildet worden war.

4. Zu diesem neuen Subtraktionsreste (36) wird die nun folgende Abteilung (48) des Radikanden herabgesetzt und diese Regel von Punkt 2 an solange wiederholt angewendet, bis alle Abteilungen des Radikanden in Rechnung gezogen sind. Jede zweizifferige Abteilung liefert eine Ziffer des ganzzahligen Wurzelteiles (2378). Es ist zu beachten, daß der jeweilige Wurzeldivisor stets aus dem Doppelten aller jeweils gefundenen Wurzelziffern als Zahl genommen zu bilden ist.

5. Aus dem nach Herabsetzung der letzten rechten Abteilung des Radikanden allenfalls verbleibenden Reste (11) lassen sich durch beliebig oft wiederholtes Anhängen von je 2 Nullen an diesen Rest und jedesmalige Anwendung der Regel von Punkt 2 an beliebig viele Dezimalen (00231) in der Wurzel entwickeln.

In der obigen Regel erscheint gleichzeitig folgendes Beispiel durchgeführt:

$$\sqrt{5{,}654.895} = ?$$

$\sqrt{5 \mid 65 \mid 48 \mid 95 \mid} = 2378{\cdot}00231 \ldots\ldots\ldots$

$2 \times 2 = 4$

165 : 4 . . . . (= 2 × 2)

$43 \times 3 = 129$

3648 : 46 . . . . (= 2 × 23)

$467 \times 7 = 3269$

37995 : 474 . . . . (= 2 × 237)

$4748 \times 8 = 37984$

1100 : 4756 . . . . (= 2 × 2378)

$47560 \times 0 = 0$

110000 : 47560 . . . . (= 2 × 23780)

$475600 \times 0 = 0$

11000000 : 475600 . . . . (= 2 × 237800)

$4756002 \times 2 = 9512004$

148799600 : 4756004 . . . . (= 2 × 2378002)

$47560043 \times 3 = 142680129$

611947100 : 47560046 usw.

Die Quadratwurzel aus 5,654.895 ist also auf Dezimalen genau 2378·00231. Diese Wurzel zum Quadrat erhoben ergibt: 5654894·9863653361, also nicht ganz genau den Radikanden. Um den Radikanden genauer zu erhalten, müßten noch mehr Dezimalen entwickelt werden. Es liegt in der Natur der Quadratwurzeln (beziehungsweise aller Wurzeln), aus solchen ganzen Zahlen, welche keine Quadrate (beziehungsweise keine Potenzgrößen) aus ganzzahligen Grundzahlen sind, daß diese Wurzeln Dezimalbrüche mit unendlich vielen Stellen (irrationale Zahlen) sein müssen, welche niemals periodisch werden können und daher auch durch einen endlichen gemeinen Bruch niemals völlig genau dargestellt werden können. Ganzzahlige Wurzeln können nur aus den entsprechenden ganzzahligen Potenzen erhalten werden.

b) Die Quadratwurzel aus Dezimalbrüchen.

Aus Dezimalzahlen wird die Quadratwurzel in der gleichen Art wie aus ganzen Zahlen gezogen; jedoch ist hiebei zu beachten, daß die Bildung der zweizifferigen Abteilungen bei den Dezimalen vom Dezimalpunkte aus nach rechts vorzunehmen ist und daß bei einer ungeraden Anzahl von Dezimalstellen der letzten Dezimalstelle rechts noch eine Null (zur Bildung einer zweizifferigen Abteilung) anzuhängen ist. Die Abteilung der Ganzen des Radikanden geschieht von links nach rechts, wie vorhin.

Für die Berechnung der Quadratwurzel aus Dezimalzahlen, an deren Einerstelle eine Null steht, mögen folgende Beispiele dienen:

$$\sqrt{0\cdot1} = \sqrt{0\cdot|10} = 0\cdot316228\ldots, \sqrt{0\cdot01} = \sqrt{0\cdot|01} = 0\cdot1,$$
$$\sqrt{0\cdot001} = \sqrt{0\cdot|00|10} = 0\cdot0316228\ldots, \sqrt{0\cdot0001} = 0\cdot01 \text{ usw.}$$

c) Die Quadratwurzel aus gemeinen Brüchen.

Aus dem Begriffe des Radizierens (§ 30) folgt, daß z. B. $\left(\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2 = \frac{7}{12}$ ist. Anderseits ergibt der Bruch $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$ zum Quadrat erhoben ebenfalls: $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{7})^2}{(\sqrt{12})^2} = \frac{7}{12}$ (§ 28). Es ist also $\left(\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\right)^2$ und somit auch $\sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.

Daraus folgt die Regel: Aus einem gemeinen Bruche wird die Quadratwurzel gezogen, entweder, indem man sie aus dem Zähler für sich und aus dem Nenner für sich zieht, oder, indem man den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt und aus diesem die Quadratwurzel zieht.

§ 32. Das Ausziehen der Kubikwurzel.

a) Die Kubikwurzel aus ganzen Zahlen.

Regel (und Beispiel): Die Kubikwurzel aus einer gegebenen ganzen Zahl (z. B. 176.750,380.928) wird auf folgende Art gefunden:

1. Der Radikand wird von rechts nach links in Abteilungen von je 3 Ziffern geteilt (also 176 750 380 928). Die erste Abteilung links kann 1, 2 oder 3 Ziffern enthalten. Sodann wird der größte Kubus (125) jener ganzen, stets einzifferigen Zahl (5) gesucht, der in der ersten Abteilung links (176) enthalten ist. Jene ganze Zahl (5) wird als erste, den höchsten Stellenwert besitzende Ziffer der gesuchten Wurzel angeschrieben und deren Kubus (125) von der ersten Abteilung links (176) subtrahiert.

2. Zu dem Subtraktionsreste (51), der manchmal auch gleich Null ist, wird die nächste 3zifferige Abteilung des Radikanden (750) herabgesetzt. Aus der so entstandenen Zahl (51750) wird durch Hinweglassung der Einer- und Zehnerstelle (50) ein Wurzeldividend (517) und aus dem dreifachen Quadrate des bereits gefundenen Wurzelteiles (5) ein Wurzeldivisor ($3 \times 5^2 = 75$) gebildet. Der Quotient (6) aus Wurzeldividend und Wurzeldivisor ist die nächste Wurzelziffer (6) und wird daher dem bereits gefundenen Wurzelteile (5) rechterhand zugeschrieben (also 56).

3. Nun werden folgende 3 Zahlen gebildet. Die erste Zahl ist das dreifache Produkt ($3 \times 5^2 \times 6 = 450$) aus dem Quadrate des der zuletzt gefundenen Wurzelziffer (6) vorangehenden Wurzelteiles (5) und der zuletzt gefundenen Wurzelziffer (6). Die zweite Zahl ist das dreifache Produkt ($3 \times 5 \times 6^2 = 540$) aus dem der zuletzt gefundenen Wurzelziffer (6) vorangehenden Wurzelteile (5) und dem Quadrate der zuletzt gefundenen Wurzelziffer (6). Die dritte Zahl ist der Kubus ($6^3 = 216$) der zuletzt gefundenen Wurzelziffer (6). Die erste Zahl (450) wird nun subtraktionsgerecht unter den Wurzeldividenden (517), die zweite Zahl (540) um eine Stelle rechts unter die erste und die dritte Zahl (216) um eine Stelle rechts unter die zweite geschrieben. Dann werden diese 3 Zahlen in einem Rechnungsvorgange von der darüber stehenden Zahl (51750), aus welcher der Wurzeldividend gebildet worden war, subtrahiert.

4. Zu diesem neuen Subtraktionsreste (1134) wird die nun folgende Abteilung (380) des Radikanden herabgesetzt und diese Regel von Punkt 2 an solange wiederholt angewendet, bis alle Abteilungen des Radikanden in Rechnung gezogen sind. Jede 3zifferige Abteilung liefert eine Ziffer des ganzzahligen Wurzelteiles (5612). Es ist zu beachten, daß der jeweilige Wurzeldivisor stets aus dem dreifachen Quadrate aller jeweils gefundenen Wurzelziffern als Zahl genommen zu bilden ist.

5. Aus dem nach Herabsetzung der letzten rechten Abteilung des Radikanden allenfalls verbleibenden Reste (3,000.000) lassen sich durch beliebig oft wiederholtes Anhängen von je 3 Nullen an diesen Rest und jedesmalige Anwendung der Regel von Punkt 2 an beliebig viele Dezimalen (03 . . .) in der Wurzel entwickeln.

In der obigen Regel erscheint gleichzeitig folgendes Beispiel durchgeführt:

$$\sqrt[3]{176.750{,}380.928} = ?$$

$$\sqrt[3]{176 \mid 750 \mid 380 \mid 928 \mid} = 5612{\cdot}03 \ldots .$$

125

$517\underline{50} : 75 \ldots\ldots (= 3 \times 5^2)$

$3 \times 5^2 \times 6 = 450$

$3 \times 5 \times 6^2 = 540$

$6^3 = 216$

$113438\underline{0} : 9408 \ldots\ldots (= 3 \times 56^2)$

$3 \times 56^2 \times 1 = 9408$

$3 \times 56 \times 1^2 = 168$

$1^3 = 1$

$191899928 : 944163 \ldots\ldots (= 3 \times 561^2)$

$3 \times 561^2 \times 2 = 1888326$

$3 \times 561 \times 2^2 = 6732$

$2^3 = 8$

$3000000000 : 94483632 \ldots\ldots (= 3 \times 5612^2)$

$3 \times 5612^2 \times 0 = 0$

$3 \times 5612 \times 0^2 = 0$

$0^3 = 0$

$300000000000\underline{0} : 9448363200$ usw.

Die Kubikwurzel aus 176.750,380.928 ist also auf 2 Dezimalstellen genau 5612·03. So wie die Quadratwurzeln sind auch die Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen entweder wieder ganze Zahlen oder aber irrational.

b) Die Kubikwurzel aus Dezimalbrüchen.

Aus Dezimalbrüchen wird die Kubikwurzel in der gleichen Art wie aus ganzen Zahlen gezogen; jedoch ist hiebei zu beachten, daß die Bildung der dreizifferigen Abteilungen bei den Dezimalen vom Dezimalpunkte aus nach rechts vorzunehmen ist. Bleiben für die letzte Abteilung rechts weniger als 3 Dezimalstellen, so sind dieselben durch eine oder zwei angehängte Nullen zu einer dreizifferigen Abteilung zu ergänzen.

c) Die Kubikwurzel aus gemeinen Brüchen.

Aus einem gemeinen Bruche wird die Kubikwurzel gezogen, entweder, indem man sie aus dem Zähler für sich und aus dem Nenner für sich zieht, oder, indem man den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt und aus diesem die Kubikwurzel zieht.

§ 33. Aufgaben über das Wurzelziehen.

1. $\sqrt{625}$, $\sqrt{2209}$, $\sqrt{9604}$, $\sqrt{811801}$, $\sqrt{88209}$, $\sqrt{485809}$, $\sqrt{387420489}$.
2. $\sqrt{0{\cdot}8281}$, $\sqrt{1{\cdot}4641}$, $\sqrt{0{\cdot}0256}$, $\sqrt{0{\cdot}5}$, $\sqrt{8{\cdot}41}$, $\sqrt{10{\cdot}3684}$, $\sqrt{0{\cdot}344569}$.
3. $\sqrt{\frac{1}{5}}$, $\sqrt{\frac{6}{13}}$, $\sqrt{\frac{7}{11}}$, $\sqrt{3\frac{3}{4}}$, $\sqrt{2\frac{1}{15}}$, $\sqrt{\frac{576}{625}}$.
4. $\sqrt[3]{218167208}$, $\sqrt[3]{953897931}$, $\sqrt[3]{84268333}$, $\sqrt[3]{4831037}$, $\sqrt[3]{578124}$.

5. $\sqrt[3]{91{\cdot}557005892911}$, $\sqrt[3]{0{\cdot}914367667816}$, $\sqrt[3]{12{\cdot}167}$, $\sqrt[3]{0{\cdot}002651}$, $\sqrt[3]{0{\cdot}3145}$.

6. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{\frac{9}{17}}$, $\sqrt[3]{\frac{17}{84}}$, $\sqrt{9\frac{7}{15}}$, $\sqrt{\frac{5832}{592704}}$.

VII. Kapitel.

Die Verhältnisse und Proportionen.

§ 34. Die Verhältnisse.

Durch die Vergleichung zweier gleichartiger Größen entsteht ein Verhältnis. Die beiden verglichenen Größen werden die Glieder des Verhältnisses genannt.

Gibt ein Verhältnis Aufschluß über die Frage, um wie viel das eine Glied größer ist als das andere, so haben wir ein arithmetisches Verhältnis (die Differenz) vor uns, z. B. 3—2; ist aber die Frage, wie vielmal ein Glied größer ist als das andere, zulässig, dann liegt ein geometrisches Verhältnis (der Quotient) vor, z. B. $12:3 \left(=\frac{12}{3}=4\right)$.

Die Glieder eines Verhältnisses sind entweder unbenannt und geben als solche ein Zahlenverhältnis, oder es sind beide Glieder benannt und bilden dann ein Größenverhältnis.

Gewöhnlich versteht man unter einem Verhältnisse schlechtweg ein geometrisches Verhältnis, und es soll im Nachstehenden auch nur von den geometrischen Verhältnissen die Rede sein.

Ein geometrisches Verhältnis wird angeschrieben, indem man die zu vergleichenden Zahlen mit dem Divisionszeichen verbunden nebeneinandersetzt, z. B. 12:3, gelesen 12 verhält sich zu 3, oder kurz 12 zu 3. Die Zahl 12 dieses Verhältnisses heißt das Vorderglied, die Zahl 3 das Hinterglied, und der Quotient (also $12:3=$) $\frac{12}{3}$ oder 4 der Exponent des Verhältnisses.

Da jedes Verhältnis eine angezeigte Division vorstellt, so gelten für alle Verhältnisse folgende Regeln:

1. Der Exponent eines Verhältnisses ist gleich dem Vordergliede dividiert durch das Hinterglied. Z. B. 12 : 3; Exponent $=\frac{12}{3}=4$.

2. Das Vorderglied eines Verhältnisses ist gleich dem Hintergliede multipliziert mit dem Exponenten. Z. B. $12 : 3 = 4$; es ist daher das Vorderglied $12 = 3 \cdot 4$.

3. Das Hinterglied ist gleich dem Quotienten aus dem Vordergliede und dem Exponenten. Z. B. $12 : 3 = 4$; Hinterglied $3 = 12 : 4$.

4. Zwei oder mehrere Verhältnisse sind gleich, wenn sie gleiche Exponenten haben. Z. B. 20 : 5, 28 : 7, 32 : 8 usf.

5. Verhältnisse bleiben unverändert, wenn man beide Glieder mit der gleichen Zahl multipliziert, oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Auf die letzte Regel gestützt, ist es möglich, ein Verhältnis, dessen Glieder Brüche enthalten, in ganzen Zahlen darzustellen, oder ein Verhältnis, dessen Glieder ein gemeinsames Maß besitzen, durch die kleinsten Zahlen auszudrücken, d. i. zu kürzen.

Z. B. *a)* $\frac{5}{6}:\frac{7}{8}=\frac{20}{24}:\frac{21}{24}=\mathbf{20:21}$; *b)* $48:36 \overset{12}{\smile} \mathbf{4:3}$;

c) $3{\cdot}35:7{\cdot}65 = 335:765 \overset{5}{\smile} \mathbf{67:153}$.

Multipliziert man von zwei oder mehreren Verhältnissen die Vorder- und Hinterglieder je für sich miteinander, so entsteht ein zusammengesetztes Verhältnis. Ein solches lautet für die einfachen Verhältnisse:

1 3 : 4 3 . 5 . 7 : 4 . 6 . 8 oder 105 : 192. Kann ein zusammengesetztes
5 : 6 2 Verhältnis gekürzt werden, wie in unserem Falle durch 3,
7 : 8 nimmt man die Kürzung direkt an den untereinander geschriebenen einfachen Verhältnissen vor, wie dies in dem Beispiele durchgeführt erscheint. Es lautet dann das gekürzte zusammengesetzte Verhältnis 1 . 5 . 7 : 4 . 2 . 8 oder 35 : 64.

§ 35. Die Proportionen.

Werden zwei Verhältnisse mit demselben Exponenten durch das Gleichheitszeichen verbunden, so entsteht eine Proportion. Die Verhältnisse 12 : 3 und 20 : 5 haben beide den Exponenten 4 und lauten als Proportion 12 : 3 = 20 : 5, gelesen: 12 verhält sich zu 3, sowie sich 20 zu 5 verhält, oder kurz 12 zu 3, sowie 20 zu 5. 12 und 5 sind die äußeren, 3 und 20 die inneren Glieder der Proportion. Sind die beiden letzteren gleich, so ist die Proportion eine stetige und die Zahl selbst das geometrische Mittel oder die mittlere geometrische Proportionale der beiden äußeren Glieder. Z. B. 18 : **6** = **6** : 2. Hier ist 6 das geometrische Mittel zwischen 18 und 2.

1. Die Proportionen 6 : 3 = 8 : 4 und
10 : 5 = 12 : 6 sind entstanden durch die Gleichstellung von Verhältnissen mit dem Exponenten 2.

Bilden wir nun in jeder Proportion das Produkt aus den inneren und äußeren Gliedern, so erhalten wir im ersten Falle $6 \times 4 = \mathbf{24}$ und $3 \times 8 = \mathbf{24}$, im zweiten Falle $10 \times 6 = \mathbf{60}$ und $5 \times 12 = \mathbf{60}$. Daraus folgt:

Eine Proportion ist richtig: *a)* wenn die Verhältnisse, aus denen die Proportion besteht, gleiche Exponenten haben, und *b)* wenn das Produkt der äußeren Glieder gleich ist jenem der inneren Glieder.

2. Mit Hilfe des Satzes *b)* ist es möglich, in einer Proportion ein vorhandenes unbekanntes Glied durch Rechnung zu finden, d. h. die Proportion aufzulösen. Man bezeichnet ein unbekanntes Glied in einer Proportion gewöhnlich mit x oder y, auch z, und berechnet dasselbe wie folgt:

Beispiel:

x : 9 = 48 : 16. Nach Satz 1 *b)* muß das Produkt 16 . x gleich sein dem Produkte 9 . 48, also

16 . x = 9 . 48. Wenn das 16fache von x gleich ist 9 . 48, so ist das einfache x der 16. Teil von 9 . 48, also

$$x = \frac{9 . 48}{16} = 27.$$

Hieraus folgt für das Auflösen einer Proportion folgende Regel:

a) Ein unbekanntes äußeres Glied in einer Proportion wird gefunden, indem man das Produkt der beiden inneren Glieder durch das bekannte äußere Glied dividiert.

b) Ein unbekanntes inneres Glied in einer Proportion ist gleich dem Produkte der beiden äußeren Glieder, dividiert durch das bekannte innere Glied.

3. Da in einem Produkte die Reihenfolge der Faktoren ohne Einfluß auf das Resultat bleibt, so muß eine Proportion auch richtig bleiben, wenn die äußeren und inneren Glieder so vertauscht werden, daß das Produkt der inneren Glieder immer jenem der äußeren gleich bleibt. Auf diese Weise ergeben sich aus der Proportion $15 : 3 = 20 : 4$ durch Vertauschung der äußeren und inneren Glieder untereinander und der äußeren mit den inneren auch folgende richtige Proportionen:

$$4 : 3 = 20 : 15, \qquad 3 : 15 = 4 : 20,$$
$$15 : 20 = 3 : 4, \qquad 4 : 20 = 3 : 15 \text{ usw.},$$

denn in jeder derselben ist das Produkt der äußeren Glieder (60) gleich dem Produkte der inneren (60).

4. Nach dem Satze *b)* im Punkte 1 läßt sich aus zwei gleichgestellten Produkten umgekehrt eine Proportion bilden, aus welcher nach Punkt 3 noch weitere Proportionen abgeleitet werden können.

Z. B. *a)* $12 . 4 = 6 . 8$ *b)* $12 . x = 6 . 8$ *c)* $4\frac{1}{2} . 1\frac{1}{3} = 3 . 2$

$12 : 6 = 8 : 4$ $12 : 6 = 8 : x$ $4\frac{1}{2} : 3 = 2 : 1\frac{1}{3}$.

5. Ebenso wie die Glieder eines Verhältnisses mit einer und derselben Zahl multipliziert, oder durch eine und dieselbe Zahl dividiert werden können, ist es auch bei einer Proportion, welche ja nur die Gleichstellung zweier Verhältnisse darstellt, zulässig, beide zu einer Proportion verbundene Verhältnisse, oder auch nur eines derselben, oder, in Ansehung des Punktes 3, je ein äußeres und ein inneres Glied der Proportion überhaupt mit derselben Zahl zu multiplizieren oder durch dieselbe Zahl zu dividieren.

Durch diese Maßnahmen ist man imstande, eine Proportion entweder von Brüchen zu befreien, oder, wenn ein äußeres und ein inneres Glied der Proportion durch eine Zahl teilbar sind, durch diese zu kürzen.

Beispiele:

a) $x : \frac{7}{9} = 3\frac{1}{3} : 5$

$x : \frac{7}{9} = \frac{10}{3} : 5$

$9x : 7 = 30 : 45$ . . . . Sämtliche Glieder mit dem kl. g. V. der Nenner 9 multipliziert und hiedurch von Brüchen befreit.

$9x : 7 = 2 : 3$ . . . . Ein äußeres und ein inneres Glied durch 15 gekürzt.

$9x = \frac{7 . 2}{3}$; $x = \frac{7 . 2}{3 . 9} = \frac{14}{27}$.

b) $x : 15 = 8 : 6$

5 2 Ein äußeres und ein inneres Glied durch 3 gekürzt.

4 1 Ein äußeres und ein inneres Glied durch 2 gekürzt.

$x : 5 = 4 : 1$

$x = 5 . 4 = 20.$

6. Werden in zwei oder mehreren Proportionen die gleichstelligen Glieder miteinander multipliziert, so bilden die Produkte eine neue richtige Proportion, welche man als eine aus den gegebenen Proportionen zusammengesetzte Proportion bezeichnet.

Beispiele:

a)

$$\begin{array}{rcl} 3 : 4 & = & 6 : 8 \\ 1 : 4 & = & 8 : 32 \\ \hline 3 . 1 : 4 . 4 & = & 6 . 8 : 8 . 32 \\ 3 : 16 & = & 48 : 256 \\ 3 . 256 & = & 16 . 48 \\ 768 & = & 768. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} \overset{1}{\not 3} : \overset{1}{\not 4} & = & \overset{2}{\not 6} : x \\ 1 : 4 & = & \underset{1}{\not 8} : \underset{\underset{1}{8}}{\not 32} \\ \hline 1 . 1 : 1 . 4 & = & 2 . 1 : x . 1 \\ 1 : 4 & = & 2 : x \\ x & = & 4 . 2 = 8. \end{array}$$

Läßt sich eine zusammengesetzte Proportion, Beispiel *b)*, kürzen, so führt man diese Kürzung anstatt in den fertigen Produkten schon an den einfachen Proportionen aus, indem man immer je ein inneres und ein äußeres Glied in einer oder in verschiedenen Proportionen durch dieselbe Zahl dividiert.

§ 36. Aufgaben über die Verhältnisse und Proportionen.

1. Es ist der Exponent für folgende Verhältnisse zu suchen: $8 : 4\frac{1}{2}$; $10 : 5\frac{7}{12}$; $14 : 13\frac{1}{8}$; $1{\cdot}5 : 7\frac{6}{11}$; $16 : 11\frac{5}{12}$; $1{\cdot}8 : 13\frac{7}{37}$; $1{\cdot}9 : 91\frac{35}{53}$; $20 : 2\frac{1}{5}$.

2. Es ist das Vorderglied eines Verhältnisses zu suchen, wenn das Hinterglied 5, 11, 13, 21, $7\frac{3}{4}$, $\frac{9}{13}$, $17\frac{6}{7}$ und der Exponent 3 ist.

3. Bestimme das Hinterglied eines Verhältnisses, dessen Vorderglied 6, 7, 9, 12, 17, $6\frac{5}{7}$, $13\frac{5}{8}$ und dessen Exponent $3\frac{1}{5}$ ist.

4. Drücke folgende Verhältnisse durch ganze Zahlen aus: $\frac{6}{5} : \frac{7}{13}$; $\frac{1}{15} : \frac{1}{25}$; $\frac{7}{13} : \frac{5}{13}$; $16\frac{1}{7} : 2\frac{3}{8}$; $21\frac{5}{21} : 5\frac{21}{25}$; $5{\cdot}072 : 3{\cdot}41$.

5. Folgende Verhältnisse sind zu kürzen: 18 : 38; 370 : 735; 648 : 724; 7348 : 6534; 8·75 : 3·25.

6. Der Raummeter Scheitholz wird zu 6·20 *K*, der Raummeter Prügelholz zu 3·80 *K* verkauft; in welchem Verhältnisse stehen die Preise von Scheitern und Prügeln?

7. Wie verhalten sich 6·5 *m* zu 1 *dm* 3 *cm*, wie die Flächen von 1 *ha* zu 1 Joch, wenn 1 Joch = 0·575464 *ha*?

8. Wie verhält sich der Brennwert des Eichenholzes zu jenem des Buchenholzes, wenn mit 212·5 *rm* Buchenholz dieselbe Wärme erzielt wird, wie mit 250 *rm* Eichenholz?

9. $x : 10 = 125 : 13$; $x : 5\frac{1}{2} = 27\frac{6}{11} : 3\frac{5}{8}$.

10. $12\frac{3}{4} : x = 16\frac{4}{7} : 5$; $3 : x = 2 : 17\frac{1}{11}$.

11. $17\frac{5}{29} : 16\frac{5}{12} = x : 4$; $23\frac{5}{9} : 31\frac{5}{16} = x : 17{\cdot}53$.

12. $41{\cdot}853 : 12{\cdot}5\dot{1} = 16{\cdot}4\dot{3} : x$; $139{\cdot}\dot{7}6\dot{5} : 16{\cdot}12 = 131 : x$.

13. Vertausche in folgenden Proportionen die Glieder so, daß jede Proportion richtig bleibt:

$$1 : 5 = 3 : 15;\ \ 1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : \frac{1}{2};\ \ 0{\cdot}75 : 1\frac{1}{2} = 1{\cdot}5 : 3.$$

14. Bilde aus den folgenden Produkten Proportionen:

$$\frac{5}{4} . 1\frac{1}{2} = 7 . x;\ \ 3 . 8 = 6 . 4;\ \ 25 . \frac{2}{5} = 2 . x.$$

15. Folgende Proportionen sind von Brüchen zu befreien, beziehungsweise zu kürzen:

$$\frac{7}{8} : \frac{3}{5} = \frac{3}{4} : x;\ \ 7\frac{4}{5} : 1\frac{3}{4} = 15\frac{1}{15} : x;\ \ 36 : 216 = 5 : 30.$$

Wortaufgaben über die Verhältnisse und Proportionen werden bei den Regeldetriaufgaben zur Genüge vorgeführt.

VIII. Kapitel.

Die einfache und zusammengesetzte Regeldetri.

§ 37. Auflösung der Regeldetriaufgaben mittels Schlußrechnung.

*1. Die einfache Regeldetri.**)

Das Rechnungsverfahren, aus drei gegebenen Größen zweierlei Art eine vierte zu suchen, wenn der Zusammenhang, welcher zwischen zwei der gegebenen drei Größen besteht, auch auf die dritte gegebene und die zu suchende Größe anwendbar ist, bezeichnet man als einfache Regeldetri.

Der Zusammenhang zwischen zwei gegebenen Größen kann ein zweifacher sein, und zwar *A.* Zwei Arten von Zahlen hängen so miteinander zusammen, daß mit dem Wachsen der einen Art auch eine Zunahme der anderen Art verbunden ist in der Weise, daß einer 2-, 3-, 4mal so großen Zahl der einen Art auch eine 2-, 3-, 4mal so große Zahl der zweiten Art entspricht. Von solchen Größen sagt man, sie sind gerade proportioniert oder sie stehen im geraden Verhältnisse, wie z. B. Zeit und Weg (denn bei der doppelten Zeit ist auch der zurückgelegte Weg der doppelte), Ware und Preis, Gefälle und Geschwindigkeit usw., und nennt die Regeldetri, auf welche diese Art der Abhängigkeit zweier Größen Anwendung findet, wohl auch die gerade Regeldetri. *B.* Zwei Arten von Größen können aber auch so voneinander abhängen, daß mit dem Steigen der einen Art die Zahl der anderen Art fällt, daß also einer 2-, 3-, 4mal so großen Zahl der einen Art der 2., 3., 4. Teil der anderen Art entspricht. Von solchen Größen sagt man, sie seien verkehrt proportioniert oder stehen im verkehrten Verhältnisse, wie Arbeiterzahl und Arbeitszeit (denn die doppelte Arbeiterzahl verlangt nur die halbe Zeit), Mannschaft und Dauer des Proviants udgl., und nennt die Regeldetri, welche solche Größen verbindet, wohl auch die verkehrte Regeldetri.

A. Die einfache Regeldetri mit geraden Verhältnissen.

Eine solche Regeldetri-Aufgabe stellt sich wie folgt:

5 *fm* Holz kosten 40 *K*; wie viel kosten 7 *fm*? Die eine Art von Zahlen sind die *fm*, die zweite Art die *K*. Beide Arten von Zahlen stehen zueinander im geraden Verhältnisse, denn die doppelte, dreifache usw. Anzahl von Festmetern kostet auch die doppelte, dreifache usw. Anzahl von Kronen. Die Frage geht nun dahin, auf Grund dieser zwischen 5 *fm* und 40 bekannten Beziehung für 7 *fm* die zugehörige unbekannte Kronenzahl zu finden, oder, wie man sagt, die gegebene Aufgabe aufzulösen.

Zu diesem Zwecke bezeichnet man die Unbekannte gewöhnlich mit x und schreibt alsdann die vier in Betracht kommenden Größen in zwei Teilen, nämlich nach dem gegebenen Bedingungssatze und dem die Unbekannte enthaltenden Fragesatz in folgender Weise an:

5 *fm* . . . . . . 40 *K*, Bedingungssatz,
7 *fm* . . . . . . x *K*, Fragesatz.

Um nun die durch den Bedingungssatz gegebene Beziehung zwischen *fm* und *K* auf 7 *fm* zu übertragen, schließt man: 5 *fm* kosten 40 *K*,

*) Regeldetri (lat. regula de tri) gleichbedeutend mit: Regel von den drei (bekannten) Größen.

daher kostet 1 *fm* den 5. Teil von 40 *K*, d. i. $\frac{40}{5}K$, und 7 *fm* kosten 7mal soviel als 1 *fm*, d. i. $\frac{\overset{8}{\cancel{40}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot 7\,K = 56\,K$.

Bei der praktischen Durchführung solcher Regeldetri-Aufgaben werden diese Schlüsse unter dem Bedingungs- und Fragesatze übersichtlich angeschrieben, wobei die Rechnungsoperationen immer nur angezeigt und erst am Schlusse ausgeführt werden. In unserem Beispiele hätten wir:

5 *fm* . . . . 40 *K*
7 *fm* . . . . x *K*

5 *fm* . . . . 40 *K*
1 *fm* . . . . $\frac{40}{5}K$
7 *fm* . . . . $\frac{\overset{8}{\cancel{40}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot 7 = \frac{8 \cdot 7}{1} = 56\,K.$

B. Die einfache Regeldetri mit verkehrten Verhältnissen.

Beispiel: 4 Arbeiter brauchen zur Herstellung eines Weges $12\frac{1}{2}$ Tage; in wie viel Tagen können 5 Arbeiter dieselbe Arbeit vollenden?

4 Arbeiter . . . $12\frac{1}{2}$ Tage, Bedingungssatz,
5 „ . . . x „ Fragesatz.

4 Arbeiter . . . $12\frac{1}{2}$ Tage

1 „ . . . $4 \cdot 12\frac{1}{2}$ „

5 „ . . . $\frac{4 \cdot 12\frac{1}{2}}{5} = \frac{4 \cdot \frac{25}{2}}{5} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{2 \cdot 5}{1} = 10$ Tage.

Schluß: Wenn 4 Arbeiter $12\frac{1}{2}$ Tage brauchen, so braucht 1 Arbeiter das Vierfache dieser Zeit, d. i. $4 \cdot 12\frac{1}{2}$ Tage, und 5 Arbeiter benötigen den fünften Teil der Zeit, die 1 Arbeiter braucht, d. i. $\frac{4 \times 12\frac{1}{2}}{5}$ Tage.

Daraus ergibt sich für die Lösung einfacher Regeldetri-Aufgaben durch Schlußrechnung aus *A* und *B* folgende Regel: Man schreibt den durch die Aufgabe gegebenen Bedingungs- und Fragesatz mit den gleichnamigen Größen untereinander an und schließt aus dem Bedingungssatze von der gegebenen Mehrheit auf die Einheit und von dieser zurück auf den Wert der im Fragesatze enthaltenen Mehrheit. Liegt hierbei eine Aufgabe mit geraden Verhältnissen vor, so ist die Einheit im Bedingungssatze ein Teil des gegebenen Wertes der zweiten Art, liegt aber eine Aufgabe mit verkehrten Verhältnissen vor, so entspricht die Einheit im Bedingungssatze dem Vielfachen der gegebenen zweiten Größe. Sämtliche durch die Schlüsse gegebenen Rechnungsoperationen werden vorerst nur angedeutet und erst schließlich gekürzt und ausgerechnet.

2. *Die zusammengesetzte Regeldetri.*

Steht von zwei Zahlen derselben Art, von denen die eine bekannt, die andere aber unbekannt ist, die bekannte mit einer Reihe von Zahlen verschiedener Arten in eben denselben Verhältnissen, wie die unbekannte zu einer zweiten Reihe von Zahlen eben derselben Arten, wie jene der ersten Reihe, so heißt das Rechnungsverfahren, die unbekannte Zahl zu finden, die zusammengesetzte Regeldetri. Wie bei der einfachen Regeldetri, so kommen auch hier gerade und verkehrte Verhältnisse, oder bei derselben Aufgabe selbst beide Verhältnisse nebeneinander vor, wie aus den folgenden Beispielen ersichtlich werden wird.

A. Die zusammengesetzte Regeldetri mit geraden Verhältnissen.

Beispiel: 3 Arbeiter verdienen in 5 Tagen 30 K; wieviel K verdienen 7 Arbeiter in 11 Tagen?

	3 Arbeiter in 5 Tagen	30	K, Bedingungssatz,
	7 „ „ 11 „	x	K, Fragesatz.
Schluß:	3 Arbeiter in 5 Tagen	30	K
	1 „ „ 5 „	$\frac{30}{3}$	K, d. i. den dritten Teil von 30 K;
	1 „ „ 1 „	$\frac{30}{3.5}$	K, d. i. den fünften Teil von $\frac{30}{3}$ K;
	7 „ „ 1 „	$\frac{30.7}{3.5}$	K, d. i. das Siebenfache von $\frac{30}{3.5}$ K;
	7 „ „ 11 „	$\frac{30.7.11}{3.5}$	K, d. i. das Elffache von $\frac{30.7}{3.5}$ K.

Es ist somit der Arbeitsverdienst von 7 Arbeitern in 11 Tagen

$$\frac{\overset{2}{\cancel{30}}.7.11}{\cancel{3}.\cancel{5}}\;K = \frac{2.7.11}{1.1} = 154\;K.$$

B. Die zusammengesetzte Regeldetri mit verkehrten Verhältnissen.

Beispiel: 14 Arbeiter vollführen eine Arbeit in 36 Tagen bei täglich 8stündiger Arbeit; wieviele Arbeiter sind nötig, um dieselbe Arbeit bei täglich 12stündiger Arbeitszeit in 4 Tagen zu vollenden?

36 Tage à 8 Stunden	14 Arbeiter	
4 „ „ 12 „	x „	
36 Tage à 8 Stunden	14 Arbeiter	
1 Tag „ 8 „	14.36 „	
1 „ „ 1 Stunde	14.36.8 „	
4 Tage „ 1 „	$\frac{14.36.8}{4}$ „	
4 „ „ 12 Stunden	$\frac{14.36.8}{4.12}$ Arbeiter	$= \frac{14.36.2}{1.12} = \frac{14.3.2}{1.1} = 84$ Arbeiter.

C. Die zusammengesetzte Regeldetri mit geraden und verkehrten Verhältnissen.

Beispiel: 3 Fuhrwerker verfrachten in 10 Tagen 120 *fm* Klotzholz; wieviele Tage benötigen unter denselben Verhältnissen 7 Fuhrwerker, um 350 *fm* fortzuschaffen?

3 Fuhrwerker	120 *fm* Klotzholz	10	Tage	
7 „	350 *fm* „	x	„	
3 Fuhrwerker	120 *fm* Klotzholz	10	Tage	
1 „	120 *fm* „	10×3	„	(verkehrt proportioniert)
1 „	1 *fm* „	$\frac{10 \times 3}{120}$	„	(gerade „)
7 „	1 *fm* „	$\frac{10 \times 3}{120 \times 7}$	„	
7 „	350 *fm* „	$\frac{10 \times 3 \times 350}{120 \times 7} = \frac{10 \times 3 \times 5}{12 \times 1} = \frac{10 \times 1 \times 5}{4 \times 1} =$		

$$= \frac{5 \times 1 \times 5}{2 \times 1} = \frac{25}{2} = 12{\cdot}5 \text{ Tage.}$$

7 Fuhrwerker benötigen zur Beförderung von 350 *fm* Klotzholz 12·5 Tage

Hiernach folgt für die Lösung zusammengesetzter Regeldetriaufgaben mittels Schlußrechnung die Regel: Man schreibt die Aufgabe als Bedingungs- und Fragesatz in derselben Weise an, wie bei der einfachen Schlußrechnung und trachtet, wenn auch der Wortlaut der Aufgabe nicht dieselbe Folge hat, diejenige Art von Zahlen, welcher die Unbekannte angehört, wegen leichterer Bildung der Schlüsse immer an die letzte Stelle zu bringen. Alsdann schließt man der Reihe nach bei jeder Art, für welche beide Größen bekannt sind, auf die Einheit und von dieser auf den Wert der gegebenen anderen Mehrheit. Die erhaltenen Zwischenresultate, schließlich auch das Endresultat werden bezüglich der vorzunehmenden Rechnungsoperationen nur angedeutet, und erst das Endresultat wird nach erfolgtem „Kürzen" ausgerechnet.

§ 38. Auflösung der Regeldetriaufgaben mittels Proportionen.

1. Die einfache Regeldetri.

A. Die einfache Regeldetri mit geraden Verhältnissen.

Beispiel: 5 *fm* Holz kosten 40 *K*; wieviel *K* kosten 15 *fm*?

fm und *K* stehen in einem geraden Verhältnisse, denn wenn die Anzahl der *fm* um das Dreifache zunimmt, wächst auch der Preis um das Dreifache. Steht demnach die Anzahl der *fm* im Verhältnisse von 1 : 3, so zeigt auch der Preis das Verhältnis 1 : 3, so daß man das Verhältnis der *fm* jenem der Preise gleichsetzen und sonach beide Verhältnisse zu einer Proportion verbinden kann. Man hat hiernach:

$$5\, fm : 15\, fm = 40\, K : x\, K, \text{ woraus } x = 600 : 5 = 120\, K.$$

Bei der praktischen Durchführung schreibt man die Aufgabe nachstehend an:

5 *fm* . . . . 40 *K*
15 *fm* . . . . x *K*

$$5 : 15 = 40 : x$$
$$1 \quad 3$$

$$x = 3 \times 40 = 120\, K.$$

B. Die einfache Regeldetri mit verkehrten Verhältnissen.

Beispiel: 15 Arbeiter bewältigen eine Arbeit in 12 Tagen; in wie viel Tagen werden 60 Arbeiter dieselbe Arbeit vollenden?

Arbeiterzahl und Arbeitszeit stehen zueinander im verkehrten Verhältnisse, denn wenn die erstere um das Vierfache zunimmt, vermindert sich die letztere auf den vierten Teil der ursprünglichen Größe. Steht demnach die Anzahl der Arbeiter im Verhältnisse von 1 : 4, so zeigt die Arbeitszeit ein Verhältnis von $1 : \frac{1}{4}$, oder, von Brüchen befreit, von 4 : 1.

Diese beiden Verhältnisse sind nicht wie bei *A* gleich, sondern „reziprok". Eine Gleichstellung beider Verhältnisse und die Verbindung derselben zu einer Proportion ist daher nur möglich, wenn man das zweite Verhältnis umkehrt. Man hat demnach in unserer Aufgabe:

15 Arbeiter . . . . 12 Tage
60 „ . . . . x „

15 : 60 = x : 12 (also 12 : x umgekehrt in x : 12)
4 3; x = 3 Tage.

Für die Auflösung einer einfachen Regeldetriaufgabe mittels Proportion besteht also die Regel: Man schreibt die Aufgabe wie bei der Schlußrechnung als Bedingungs- und Fragesatz an und verbindet das Verhältnis der Zahlen der einen Art mit dem Verhältnisse der Zahlen der anderen Art zu einer Proportion, wobei bei geraden Verhältnissen das zweite Verhältnis dieselbe Ordnung wie das erste, bei verkehrten Verhältnissen hingegen die umgekehrte Ordnung des ersten Verhältnisses erhält.

2. *Die zusammengesetzte Regeldetri.*

A. Die zusammengesetzte Regeldetri mit geraden Verhältnissen.

Beispiel: Der Lohnsatz eines Mannes verhält sich zu jenem eines Weibes bei gleicher Arbeitsdauer wie 5 : 4. Wie viel verdienen 8 Männer in 15 Tagen bei 10stündiger Arbeitszeit, wenn 3 Weiber bei 8stündiger Arbeitszeit in 9 Tagen 32 *K* 40 *h* verdienen?

Weiber	4	Verhältniszahl	3	Personen	8stünd.	Arbeitszeit	9	Tage	32·40 *K*
Männer	5	„	8	„	10 „	„	15	„	x *K*

Eine solche Regeldetriaufgabe denkt man sich behufs Auflösung mittels Proportion in mehrere einfache Regeldetriaufgaben zerlegt und hiebei jede Art von Zahlen mit der die Unbekannte enthaltenden Art zu einer Proportion verbunden. Es ist sonach:

4 : 5	= 32·40 : x	Je größer die Verhältniszahl, desto mehr Verdienst; gerade proport.
3 : 8		Je mehr Personen, „ „ „ „ „
8 : 10		„ „ Arbeitsstunden, „ „ „ „ „
9 : 15		„ „ Arbeitstage, „ „ „ „ „

Da nun die Gesamtarbeitsleistung sich verdoppelt, wenn die doppelte Verhältniszahl, die doppelte Anzahl von Personen, Stunden und Tagen in Anwendung kommt, so kann die Größe der Gesamtarbeitsleistung durch das Produkt aus Verhältniszahl, Personen-, Stunden- und Tagezahl ausgedrückt und, da sie als solche auch mit dem

Verdienste in einem geraden Verhältnisse steht, mit dem letzteren zu einer Proportion verbunden werden. Wir haben daher:

$$\begin{array}{r} 4 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 9 : 5 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 15 = 32{\cdot}40 : x \\ 5 \qquad 3{\cdot}60 \\ 0{\cdot}90 \end{array}$$

$$x = 5 \,.\, 10 \,.\, 5 \,.\, 0{\cdot}90 = 225\ K.$$

Anstatt das durch die Vergleichung der Gesamtleistung entstehende zusammengesetzte Verhältnis immer in dieser Weise anzuschreiben, verfährt man praktisch wie folgt:

$$\left.\begin{array}{r} 4 : 5 \\ 3 : 8 \\ 8 : 10 \\ 9 : 15 \\ 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 32{\cdot}40 : x \\ \quad 3{\cdot}60 \\ \quad 0{\cdot}90 \end{array}$$

$$x = 5 \,.\, 10 \,.\, 5 \,.\, 0{\cdot}90 = 225\ K.$$

Man führt also das Kürzen von je einem inneren und einem äußeren Gliede direkt im Ansatze aus.

B. Die zusammengesetzte Regeldetri mit verkehrten Verhältnissen.

Beispiel: 14 Arbeiter vollführen eine Arbeit in 36 Tagen bei täglich 8stündiger Arbeitszeit; wie viele Arbeiter sind nötig, um dieselbe Arbeit bei täglich 12stündiger Arbeitszeit in 4 Tagen zu vollenden?

36 Tage à 8 Stunden 14 Arbeiter
4 „ à 12 „ x „

$$\left.\begin{array}{r} 4 : 36 \\ 3 \\ 12 : 8 \\ 2 \end{array}\right\} = 14 : x$$

Je weniger Tage zur Arbeit verfügbar sind, desto mehr Arbeiter sind erforderlich; verkehrt proportioniert.

Je mehr Stunden täglich gearbeitet werden, desto weniger Arbeiter braucht man; verkehrt proportioniert.

$x = 3 \,.\, 2 \,.\, 14 = 84$ Arbeiter.

Die Gesamtleistungen in Stunden sind in dem Produkte aus Tagen und Stunden gegeben, also 4 . 12 und 36 . 8, und verhalten sich umgekehrt wie die Arbeiterzahlen; also

$$\begin{array}{l} 4 \,.\, 12 : 36 \,.\, 8 = 14 : x;\ x = 6 \,.\, 14 = 84 \text{ Arbeiter.} \\ \qquad\quad 3 \,.\, 2 \end{array}$$

C. Die zusammengesetzte Regeldetri mit geraden und verkehrten Verhältnissen.

Beispiel: Eine Kulturfläche wird von 12 Arbeitern in 10 Tagen mit 18.000 Stück Pflanzen aufgeforstet; wie viele Arbeiter wären notwendig, um in 8 Tagen 30.000 Pflanzen auszusetzen?

18.000 Pflanzen 10 Tage 12 Arbeiter
30.000 „ 8 „ x „

$$\left.\begin{array}{r} 30.000 : 18.000 \\ 5 : 3 \\ 10 : 8 \\ 5 : 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = x : 12 \\ \qquad 4 \end{array}$$

30.000 : 18.000 . . . . (gerade proportioniert)
10 : 8 . . . . (verkehrt proportioniert)

$$x = 5 \,.\, 5 = 25 \text{ Arbeiter.}$$

Aus diesen Beispielen ergibt sich für die Auflösung der zusammengesetzten Regeldetriaufgaben mittels Proportion die Regel: Man schreibt die Aufgabe wie bei der Lösung mittels Schlußrechnung an. Alsdann werden alle zusammengehörigen Arten von Zahlen der Reihenfolge nach mit jener Art, welche die Unbekannte enthält, zu einer Proportion verbunden, und zwar in derselben Ordnung, wenn die betreffenden Arten gerade, und in umgekehrter Ordnung, wenn dieselben verkehrt proportioniert sind. Die bekannten Verhältnisse denkt man sich sodann als zusammengesetzte Verhältnisse mit dem Verhältnisse, welches die Unbekannte enthält, verbunden und bekommt nach Vornahme der möglichen Kürzungen den Wert für die Unbekannte aus dem Produkte der Faktoren der inneren dividiert durch das Produkt aus den Faktoren der äußeren Glieder oder umgekehrt.

Zusatz. Obwohl die Lösung derartiger Rechnungen mittels Proportion ganz leicht ist, so empfiehlt es sich doch, auf die Auflösung durch Schlüsse (die Schlußrechnung) das Hauptgewicht zu legen, und zwar deshalb, weil dabei mehr auf das Verständnis hingewirkt wird und der Vorgang bei der Rechnung dann wohl zeitlebens nicht mehr vergessen werden kann.

§ 39. Regeldetriaufgaben.

1. Der Arbeitsaufwand bei Herstellung einer Wasserriese stellt sich bei 328 Fach auf 3281 *K* 50 *h*; wie viel kostet die Herstellung einer Wasserriese von $427\frac{1}{2}$ Fach?

2. Für die Herstellung eines Zugweges (Schlagweges) von 351 *m* Länge werden 63 *K* 18 *h* bezahlt; was kostet ein gleicher Zugweg von 823 *m* Länge?

3. Das Ausheben eines Grabens von 75 *m* Länge beansprucht 66 Tagschichten; in welcher Zeit wird unter sonst gleichen Verhältnissen ein Graben von 54 *m* Länge ausgehoben.

4. Eine gleichmäßig ansteigende Straße steigt auf $1\frac{1}{4}$ *km* Länge um 17 *m*; wie groß ist die Steigung bei $3\frac{1}{2}$ *km*?

5. Für eine Kulturfläche von 1·43 *ha* brauchte man 7620 Pflanzen; wie viel Pflanzen sind bei gleichem Standraume für eine Fläche von 3·2 *ha* erforderlich?

6. Die Güte eines Holzbestandes verhält sich zu der eines zweiten wie 2 : 1·65; wenn nun der zweite Bestand pro 1 *ha* 440 *fm* besitzt, wie viel *fm* enthält der erste?

7. Ein senkrecht in die Erde gesteckter Stab von $1\frac{3}{4}$ *m* Länge wirft einen 2·80 *m* langen Schatten; wie hoch ist ein Baum, welcher zu derselben Zeit einen Schatten von 45·6 *m* Länge wirft?

8. Eine Karte ist im Maßstabe von 1 : 75.000*) gezeichnet; wie groß ist die Entfernung zweier Orte in Metern, wenn dieselbe auf der Karte 35·7 *mm* beträgt?

9. Aus 15 *rm* Holz verfertigt man 9000 Stück Dachschindeln; wie viel *rm* Holz braucht man für 15.000 Stück Dachschindeln?

10. 5 Arbeiter benötigen zur Aufführung einer Mauer 12 Tage; wie lange werden bei derselben Arbeit 3 Arbeiter beschäftigt sein?

11. Die Brennkraft des Buchenholzes verhält sich zu jener des Fichtenholzes wie 100 : 72; wie viel *rm* fichtenes Deputatholz werden einem Forstangestellten überwiesen werden müssen, wenn derselbe bisher jährlich 28 *rm* Buchenbrennholz bezogen hat?

12. In einer Allee stehen 753 Bäume je $5\frac{1}{2}$ *m* voneinander entfernt; wie viel Bäume sind erforderlich, wenn sie $8\frac{1}{4}$ *m* voneinander abstehen sollen?

13. Wenn eine Geldsumme unter 52 Personen geteilt wird, erhält jede $1\frac{1}{2}$ *K*; wie viel *K* bekommt jede Person, wenn derselbe Geldbetrag auf 39 Personen verteilt werden soll?

14. Das Vorderrad eines Wagens hat 2 *m*, das Hinterrad 3 *m* Umfang; wie oftmal hat sich das Hinterrad gedreht, wenn das Vorderrad 230 Umläufe gemacht hat?

---

*) Eine Karte ist im Maßstabe 1 : 75.000 gezeichnet heißt 75.000 *m* in der Natur sind auf dem Papiere 1 *m* lang. Es ist daher 1 *m* in der Natur $\frac{1}{75.000}$ *m* auf dem Papiere.

15. Für eine Schlagfläche benötigt man 7500 Pflanzen, wenn der Wachsraum einer Pflanze 2·25 m^2 beträgt; wie viel Pflanzen werden für dieselbe Fläche erforderlich sein, wenn der Wachsraum 2·50 m^2 einnimmt?

16. Zur Anschotterung eines 6 *m* breiten, 4·5 *km* langen Weges braucht man 2500 m^3 Kies; wie viel Kies wird erforderlich sein, wenn der Weg 3·5 *m* breit und 2·6 *km* lang ist?

17. Jemand hat 37 Tage zu 12 Stunden gearbeitet; wie viel Lohn erhält er, wenn ihm bei 10stündiger Arbeit für 6 Tage 16 *K* 20 *h* zugesagt wurden?

18. Auf einer Brettsäge werden in 2 Monaten bei täglich 24stündiger Arbeit 543 *fm* Klotzholz verschnitten. In welcher Zeit wird dieselbe Menge bei täglich nur 14stündiger Arbeit verschnitten?

19. 24 Tagwerker vollführen bei täglich 8stündiger Arbeitszeit eine Arbeit in 18 Tagen; wie viel Tagwerker werden erforderlich sein, wenn die gleiche Arbeit bei 9stündiger Arbeitszeit in 8 Tagen geleistet werden soll?

20. 7 Arbeiter werfen in 6 Tagen einen Graben von 90 *m* Länge, 1 *m* mittlerer Breite und 1·5 *m* Tiefe aus; wie viele Tage brauchen 4 Arbeiter für einen Graben von 180 *m* Länge, 0·8 *m* mittlerer Breite und 1·25 *m* Tiefe?

21. Zu einem Fußboden braucht man 28 Bretter, deren jedes 35 *dm* lang und 4 *dm* breit ist; wie viele Bretter werden zu demselben Fußboden erforderlich sein, wenn jedes 28 *dm* lang und 3 *dm* breit ist?

22. Der gesamte Holzanfall eines Schlages ist auf 795·8 *fm* angeschätzt. Eine Säge zu 2 Mann arbeitet in 3 Tagen 11·5 *fm* auf; wie viel Sägen müssen eingestellt werden, wenn der ganze Schlag in $4\frac{1}{2}$ Wochen (zu 6 Tagen gerechnet) aufgearbeitet sein soll?

IX. Kapitel.

Die Prozent- und einfache Zinsrechnung.

§ 40. Begriffsfeststellungen.

Wir wollen die nötigen Begriffsfeststellungen mit einem Beispiele einleiten. Von zwei Holzschlägen *a* und *b* kommen

in *a* auf 1280 *fm* Gesamtanfall 512 *fm* Nutzholz,
„ *b* „ 415 *fm* „ 332 *fm* „

Bei Vergleichung dieser Zahlen erscheint der absolute oder wirkliche Nutzholzanfall in *a* größer als in *b*. Nicht so ist es aber, wenn wir an Ort und Stelle je einen gleich großen Teil der Schläge *a* und *b* miteinander vergleichen, denn es zeigt sich da, daß das Nutzholz im Schlage *a* viel schütterer liegt als in *b*, und wir werden sagen, im Schlage *b* ist von der daselbst angefallenen Holzmenge mehr zu Nutzholz aufgearbeitet worden, als in *a* von der dortigen Holzmenge.

Um diese letztere Vergleichung rechnungsmäßig führen und ihr Ergebnis durch eine Ziffer ausdrücken zu können, nimmt man in beiden Schlägen eine beliebige Vergleichsziffer, etwa den Holzanfall des Schlages *b* an und bezieht auf diese Vergleichsziffer im Wege einer einfachen Regeldetrirechnung den Nutzholzanfall beider Schläge. Hiernach entfallen in *a* auf 415 *fm* Gesamtanfall nur 166 *fm**) Nutzholz, d. i. um 332 *fm* — 166 *fm* = 166 *fm* weniger als in *b*, wie dies schon die Betrachtung an Ort und Stelle zeigte.

Jeder so im Wege der Vergleichung mit einer als Ausgangspunkt angenommenen Größe gewonnene Wert heißt ein relativer oder ver-

---

*) Schluß: Auf 1280 *fm* Gesamtanfall kommen 512 *fm* Nutzholz
„ 1 *fm* „ „ $\frac{512}{1280}$ *fm* „
„ 415 *fm* „ „ $\frac{512}{1280} \times 415$ *fm* „

glichener Wert. Obwohl man für solche Vergleichungen jede beliebige Größe als Ausgangspunkt nehmen kann, so ist es doch am gebräuchlichsten, die zu vergleichenden Zahlen einfach auf 100 als Vergleichszahl zu beziehen, so daß man sagen kann, auf 100 Einheiten dieser oder jener Art kommen so und so viele Einheiten einer anderen Art. Auf diese Weise kommt man zu dem Begriffe Prozent (%, lat. pro centum, für Hundert) und versteht hierunter eine Zahl von Einheiten, welche auf je 100 Einheiten einer anderen Art entfällt.

In unserem Beispiele ist das Nutzholzprozent im Schlage $a = \frac{512}{1280} \cdot 100$*) $= 40$ und jenes im Schlage $b = \frac{332}{415} \cdot 100 = 80$, d. h. es entfallen auf je 100 *fm* Gesamtanfall im Schlage *a* 40 *fm* und im Schlage *b* 80 *fm* an Nutzholz.

Die Rechnung mit Prozenten bezeichnet man als die Prozentrechnung und unterscheidet bei jeder Prozentrechnung 3 Größen, und zwar:

1. Das Prozent, d. i. der Anteil auf je 100 Einheiten,
2. den Grundwert, d. i. jene Größe, von welcher man die Prozente berechnet, und
3. den Prozentanteil, d. i. jene Größe, welche auf den Grundwert entfällt.

Die Prozentanteile bezeichnet man als Zinsen oder Interessen, wenn sie das Erträgnis eines bestimmten in einer Sparkasse o. dgl. angelegten Geldbetrages (Grundwertes) darstellen. Den letzteren nennt man in diesem Falle das Kapital, und die Rechnung, welche sich mit Kapital und Zinsen beschäftigt, die Zinsrechnung.

Bei der Zinsrechnung tritt zu den bereits genannten Größen: Prozent, Grundwert (Kapital) und Prozentanteil (Zinsen oder Interessen) noch eine vierte Größe hinzu, die Zeit. Die Zinsrechnung ist daher nur eine für einen besonderen Fall geltende Prozentrechnung mit Berücksichtigung der Zeit.

Das Kapital kann während der ganzen Zeit der Verzinsung entweder unverändert bleiben, indem man die entfallenden Zinsen — als einfache Zinsen — sofort behebt, oder das Kapital ändert sich, indem man die für jedes Jahr oder Halbjahr fälligen Zinsen zum Kapital hinzuschlägt und mit diesem weiter verzinst. In letzterem Falle heißen die Zinsen Zinseszinsen oder auch zusammengesetzte Zinsen.

Die Aufgaben der Prozentrechnung im allgemeinen werden am besten mittels Schlußrechnung, wohl auch mittels Proportion gelöst und sind nichts anderes als Regeldetriaufgaben. Im Forstbetriebe kommen die allgemeinen Prozentrechnungen mehr in Betracht, als die besonderen Zinsrechnungen, weshalb die ersteren hier auch mehr Beachtung finden.

§ 41. Beispiele und Aufgaben über die Prozentrechnung im allgemeinen.

1. Von 130 auf die Keimfähigkeit untersuchten Lärchensamen sind 52 als keimfähig befunden worden; wie groß ist das Keimprozent?

---

*) Schluß: Auf 1280 *fm* Gesamtanfall kommen 512 *fm* Nutzholz
„ 1 *fm* „ „ $\frac{512}{1280}$ *fm* „
„ 100 *fm* „ „ $\frac{512}{1280} \times 100$ *fm* „

Bei 130 Stück 52 keimfähig
" 100 " x "

Bei 130 Stück 52 keimfähig

" 1 " $\frac{52}{130}$ "

" 100 " $\frac{52 \times 100}{130}$ " = 40 Stück. Das Keimprozent ist daher 40.

2. Auf einer Brettsäge wurden 1550 *fm* Klotzholz verschnitten; wie viel *fm* Schnittware (Bretter, Pfosten) wird man erhalten, wenn 35% an Sägemehl und Abfall in Verlust kommen?

Bei 100 *fm* Klotzholz 35 *fm* Verlust
" 1550 *fm* " x *fm* "

Bei 100 *fm* Klotzholz 35 *fm* Verlust

" 1 *fm* " $\frac{35}{100}$ *fm* "

" 1550 *fm* " $\frac{35 \times 1550}{100}$ *fm* " $= 542\cdot5$ *fm* Verlust;

somit übrig bleibendes Schnittmaterial $1550 - 542\cdot5 = 1007\cdot5$ *fm*.

3. Bei der Holzverkohlung beträgt die Ausbeute an Kohle dem Volumen nach 57% des verkohlten Holzes. Wie viel *rm* Holz müssen verkohlt werden, um 1250 *hl* Kohle zu erhalten?

Zu 57 *rm* Kohle braucht man 100 *rm* Holz
" 125 *rm* " " " x *rm* " (1250 *hl* = 125 *rm*)

$57 : 125 = 100 : x$

$$x = \frac{125 \cdot 100}{57} \, rm = 219\cdot29 \, rm.$$

4. Bei einer Holztrift (Holzschwemme) wurden 4317 *rm* angewässert und 4210 *rm* ausgeländet; wie viel % beträgt der Triftcalo (Holzverlust bei der Trift)?

5. Angewässert wurden 4200 *fm* Blochholz, 7324 *rm* Scheitholz; der durchschnittliche Calo betrug für das Klotzholz 3·1%, für das Scheitholz 5·5%. Wie viel Holz wurde ausgeländet und wie groß ist die ausgeländete Holzmasse in *fm*, wenn 1 *rm* Scheitholz 0·78 *fm* hat?

6. Aus einem Triftbache wurden 17325 *rm* ausgeländet; der Trifcalo betrug 3·5%; wie viel *rm* wurden angewässert?

7. Eine Waldfläche wurde kahl abgetrieben. Das Ergebnis war 560 *fm* Bauholz, 657 *rm* Brennholz à 0·68 *fm*, 350 *rm* Nutzrinde à 0·35 *fm*. Wie viel % und *fm* entfallen auf jedes Sortiment?

8. Der Abtrieb eines Bestandes ergab pro 1 *ha* 561·5 *fm*, und zwar entfielen auf Nutzholz 45·3%, auf Brennholz 49·4%, auf Rinde 5·3%. Wie viel *fm*, beziehungsweise *rm* jedes Sortimentes gelangten zur Nutzung, und welchen Wert hatte der Bestand, wenn 1 *fm* Nutzholz mit 10 *K*, 1 *rm* Brennholz mit 3·60 *K* und 1 *rm* Rinde mit 1 *K* verkauft wurden, und 1 *rm* Brennholz mit 0·68 *fm* und 1 *rm* Rinde mit 0·35 *fm* angenommen wird?

9. Ein Holzhändler kauft in der Station A 640 *rm* Brennholz à 3·60 *K*,
" " " B 1230 *rm* " à 4·20 *K*,
" " " C 2480 *rm* " à 3·90 *K*.

Die ganze Holzmasse wird mittels Trift in die Station D gebracht, wobei sich ein Triftcalo von $7\frac{1}{2}$% ergibt. Die Triftkosten kommen auf 3753 *K* 50 *h* zu stehen. Wie teuer muß der Holzhändler 1 *rm* Brennholz verkaufen, wenn er einen Gewinn von 15% erzielen will?

10. Das Gipfelholz in mehreren Holzschlägen wurde licitando verkauft und ergab einen Erlös von 571 *K* 92 *h*. Wie groß war der Netto-Erlös, wenn 2% an die Armenkasse des betreffenden Ortes abgeführt werden mußten?

11. Auf einer Brettsäge wurde Klotzholz verschnitten. Wie groß war die Menge des Klotzholzes, wenn bei 36·8% Abfall 384·36 *fm* Schnittmaterial erzielt wurden?

12. Ein Sandboden besteht dem Gewichte nach aus 35% tonigen und 65% sandigen Bestandteilen. Wie viel m^3 enthalten 2·5 m^3 solchen Sandbodens an tonigen und an sandigen Bestandteilen?

13. Das Fällungsergebnis von einem Bestande beträgt 735·8 *fm* und besteht aus 63% hartem und aus 37% weichem Holze. Wie viel *fm* entfallen auf das harte, wie viel auf das weiche Holz?

14. Eine Bestandesaufnahme ergab als Resultat 3875 Buchenstämme mit 2906·5 *fm* und 359 Lärchenstämme mit 646·24 *fm*. Welches ist das Mischungsverhältnis des Bestandes in % in Bezug auf Stammzahl und Holzmasse?

15. Zur Ansaat einer Fläche würde man benötigen 8 *kg* Fichten-, 3 *kg* Weißkiefern- und 3 *kg* Lärchensamen, alles zu 100% Keimkraft gerechnet. Der käufliche Samen hat aber bei der Fichte nur 78%, bei der Kiefer nur 84% und bei der Lärche nur 47% Keimkraft; wieviel *kg* eines jeden Samens wird man ankaufen müssen, um den gleichen Erfolg zu erzielen?

16. Bei der Durchforstung eines Bestandes wurden 8·2% der Bestandesmasse entnommen. Der Anfall betrug 550 *rm* Brennholz à 0·73 *fm*. Welche Holzmasse in *fm* hatte der Bestand vor und nach der Durchforstung?

17. Eine Straße hat bei einer Länge von 1·23 *km* eine Steigung von 55·35 *m*; welches Steigungsprozent hat dieselbe?

18. Eine Straße ist bei 3·8% Steigung 304·5 *m* hoch angestiegen; wie lang ist dieselbe?

19. Eine Straße fällt mit 5·21% und hat eine Länge von 4·053 *km*; wieviel *m* beträgt das Gefälle?

20. Eine im Frühjahr ausgeführte Kultur ergab im Herbst folgendes Resultat: Von 3285 ausgesetzten Fichtenpflanzen waren 75, von 198 Eichen 5, von 276 Eschen 8 und von 5743 Weißkiefern 93 Stück abgestorben; wie groß ist der Eingang bei jeder Holzart in %?

21. Der Papiereingang auf einer Katastralkarte beträgt 2·3%. Wie lang ist *a)* eine auf der Karte mit 897·6 *m* gemessene Strecke in der Natur und *b)* eine in der Natur mit 583·4 *m* gemessene Strecke auf dem Kartenblatte?

22. Ein Tannenbestand hat im 80jährigen Alter eine stockende Holzmasse von 674 *fm* pro *ha*, im 90jährigen Alter eine solche von 816 *fm*; wie groß war der Zuwachs für diese 10 Jahre in *fm* und in % der ursprünglichen Masse?

23. Ein 90jähriger Fichtenbestand hat pro *ha* eine Holzmasse von 626 *fm*; welche Holzmasse wird dieser Bestand bei 1·3% Massenzuwachs in 3 Jahren aufweisen?

24. Auf einem Scheibenstande wurden 395 Schüsse abgegeben. Hiervon waren 187 Fehlschüsse; mit welchem Trefferprozent wurde geschossen?

25. Wieviel *hl* Kohle bekommt man von 215 *rm* Holz, wenn das Ausbringungsprozent an Kohle 55·3% der verkohlten Brennholzmenge beträgt?

26. Aus einem Kohlenmeiler von 84·3 *rm* Inhalt bringt man 483 *hl* Holzkohle aus; wie groß ist die Kohlenausbeute in % ausgedrückt?

§ 42. Beispiele und Aufgaben über die Zinsrechnung.

Vorbemerkung. Bei der Zinsrechnung wird das Jahr mit 360 Tagen, der Monat mit 30 Tagen angenommen. Ist die Zeit durch eine mehrnamige Zahl gegeben, z. B. Jahre, Monate und Tage, so werden Monate und Tage durch die entsprechenden Teile eines Jahres ausgedrückt.

1. Berechnung der Prozente. Zu wieviel % ist ein Kapital von 760 *K* angelegt, wenn es in $3\frac{1}{2}$ Jahren 119·70 *K* an Zinsen abwirft?

760 *K* in $3\frac{1}{2}$ Jahren 119·70 *K*

1 *K* „ $3\frac{1}{2}$ „ $\frac{119{\cdot}70}{760} K$

1 *K* „ 1 Jahre $\frac{119{\cdot}70}{760 . 3\frac{1}{2}} K$

100 *K* „ 1 „ $\frac{119{\cdot}70 \times 100}{760 \times 3\frac{1}{2}} K = \frac{119{\cdot}70 \times 10}{\underset{38}{76} \times \frac{7}{2}} K = \frac{1197}{266} K = 4{\cdot}5 K$, d. i. 4·5%.

2. Berechnung des Kapitals. Welches Kapital gibt zu 4% in 6 Jahren 7386 *K*?

4 *K* erhält man bei 4% in 1 Jahre von 100 *K* Kapital

1 *K* „ „ „ 4% „ 1 „ „ $\frac{100}{4} K$ „

7386 *K* „ „ „ 4% „ 1 „ „ $\frac{100 \times 7386}{4} K$ „

Schluß: Wenn 7386 *K* bei 4% schon in einem Jahre als Zinsen des Kapitals $\frac{100 \times 7386}{4}$ entfallen, so wird das Kapital jedenfalls kleiner werden müssen, wenn die gleichen Zinsen erst in 6 Jahren erlangt werden sollen, und zwar um den 6. Teil kleiner, also $\frac{100 \times 7386}{4 . 6}$.

7386 *K* erhält man bei 4% in 6 Jahren von $\frac{100 \times 7386}{4 \times 6} K = \frac{100 \times 1231}{4 \times 1} K = \frac{123100}{4} K = 30775 K$.

3. **Berechnung der Zinsen.** Ein Kapital von 2400 K ist zu 4% angelegt; wie viel betragen die Zinsen in 5 Jahren?

Bei 100 K betragen die Zinsen zu 4% in 1 Jahre 4 K

„ 1 K „ „ „ „ 4% „ 1 „ $\frac{4}{100}$ K

„ 2400 K „ „ „ „ 4% „ 1 „ $\frac{4 \times 2400}{100}$ K

„ 2400 K „ „ „ „ 4% „ 5 „ $\frac{4 \times 240\!\!\!/0\!\!\!/ \times 5}{10\!\!\!/0\!\!\!/}$ $K = 4 \times 24 \times 5\ K = 480\ K.$

4. **Berechnung der Zeit.** Auf wie lange muß ein Kapital von 384 K zu 5% anliegen, damit es 52·80 K Zinsen gibt?

100 K Kapital trägt bei 5% 5 K Zinsen in 1 Jahr
1 K „ „ „ 5% 5 K „ „ 1 × 100 Jahren (verkehrt proport.)
1 K „ „ „ 5% 1 K „ „ [illegible] „
384 K „ „ „ 5% 1 K „ „ $\frac{1 \times 100}{5 \times 384}$ „
384 K „ „ „ 5% 52·80 K „ „ $\frac{1 \times 100 \times 52{\cdot}80}{5 \times 384}$ Jahren $= \frac{11}{4}$ Jahren $=$
$= 2\frac{3}{4}$ Jahren.

5. Eine Waldherrschaft im Werte von 243000 K liefert einen jährlichen Reinertrag von 7580 K; zu wieviel % verzinst sich in diesem Falle obiges Kapital?

6. Zu wieviel % muß man ein Kapital von 3895 K anlegen, damit es in 5 Jahren und 4 Monaten 689 K Zinsen bringe?

7. Eine Brennholzpartie wurde von einem Holzhändler um 5895 K gekauft und nach 2 Jahren um 6584 K verkauft; wie groß war der Gewinn in K und in %?

8. Ein Unternehmen wirft einen jährlichen Reingewinn von 8760 K ab; mit welchem Kapitale ist dasselbe bei einer Verzinsung von 6% gleichwertig?

9. Wie groß ist ein Kapital, welches zu $3\frac{1}{2}$% jährlich 850 K Zinsen abwirft?

10. Wie groß ist ein Kapital, welches zu 4·5% nach $7\frac{3}{4}$ Jahren 822·35 K Zinsen gibt?

11. Welchen jährlichen Nutzgenuß gewährt ein Kapital von 15.500 K, wenn es zu $4\frac{3}{4}$% angelegt ist?

12. Wie groß sind die Zinsen von 89 385 K 25 h zu 3·2% in 4 Jahren, 11 Monaten und 10 Tagen?

13. Jemand legt in einer Sparkasse folgende Beträge an: 243 K zu $5\frac{1}{2}$%; nach 5 Monaten 183 K zu 4%; nach weiteren 8 Monaten 155 K 20 h zu $4\frac{1}{2}$%; dann nach 7 Monaten 258 K zu 3·8%. Wie groß sind die Zinsen, welche er nach 3 Jahren und 5 Monaten, vom Tage der ersten Einlage an gerechnet, von diesen Einlagen beziehen kann?

14. In welcher Zeit ist ein Kapital von 800 K zu $5\frac{3}{4}$% auf die Höhe von 1588 K angewachsen? (Zinsen = 1588 − 800 = 788 K.)

15. Wie lange muß ein Kapital von 1500 K zu 3% anliegen, damit es 1500 K Zinsen bringe?

16. Welchen Wert hat eine Besitzung, welche einen jährlichen Reinertrag von 12.000 K abwirft, wenn man eine $3\frac{1}{2}$%ige Verzinsung annimmt?

17. Welchen Endwert haben 850 K zu 4% nach 5 Jahren?

Unter **Endwert** versteht man jenen Wert eines Kapitals, zu welchem dasselbe nach einer bestimmten Zeit mit Hinzuziehung der Zinsen angewachsen ist. Der gegenwärtige Wert eines Kapitals wird der **Anfangswert** oder **Jetztwert** genannt.

Der Endwert eines Kapitals wird berechnet, indem man zu dem Anfangswerte die Zinsen für die bestimmte Zeit addiert.

100 K in 1 Jahre 4 K

1 K „ 1 „ $\frac{4}{100}$ K

850 K „ 1 „ $\frac{4 \times 850}{100}$ K

850 K „ 5 „ $\frac{4 \times 85\!\!\!/0\!\!\!/ \times 5}{10\!\!\!/0\!\!\!/}$ $K = 170\ K.$
(Kürzungszahlen: 2, 2)

Anfangswert . . .	850 K
Zinsen für 5 Jahre zu 4%	170 K
Endwert	1020 K

18. Der Endwert eines Kapitals beträgt bei 3% nach 6 Jahren 1800 *K*; wie groß war der Anfangswert?

100 *K* Kapital zu 3% geben nach 6 Jahren 18 *K* Zinsen.
Der Endwert von 100 *K* zu 3% nach 6 Jahren ist daher = 118 *K*.

Der Endwert von 118 *K* ist das Ergebnis eines zu 3% durch 6 Jahre lang gelegenen Anfangswertes von	100 *K*
„ „ „ 1 *K* nach 6 Jahren	$\frac{100}{118}$ *K*
„ „ „ 1800 *K* „ 6 „	$\frac{100 \times 1800}{118}$ *K* = 1525·42 *K*.

19. Ein Holzhändler kauft eine größere Menge Holz zu nachstehenden Zahlungsbedingungen: 1200 *K* sofort zahlbar, 1200 *K* nebst 2% Verzugszinsen nach 3 Monaten, dann 1200 *K* nebst 3% Verzugszinsen nach weiteren 3 Monaten und der Rest von 1200 *K* mit 4% Verzinsung nach abermals 3 Monaten zahlbar; wieviel hatte er bei jedem Zahlungstermine zu begleichen?

20. Eine Waldherrschaft wurde zu nachstehenden Zahlungsbedingungen gekauft: 40.000 *K* bar, 20.000 *K* zu $2\frac{1}{2}$% verzinst nach $1\frac{1}{2}$ Jahren, und der Rest mit 15.000 *K* zu 2% verzinst nach 10 Jahren. Welche Höhe haben diese Beträge nach 15 Jahren erreicht, wenn dieselben sofort nach Eingang zu $3\frac{1}{2}$% nutzbringend angelegt wurden?

21. Ein Geldbetrag ist nach $12\frac{1}{2}$ Jahren bei $5\frac{1}{4}$% Verzinsung zu 20.500 *K* angewachsen; welchen Anfangswert hatte derselbe?

22. Jemand zahlt für ein vor 3 Jahren und 5 Monaten behobenes Darlehen bei 5% Verzinsung 935 *K* zurück; wie hoch war das Darlehen?

Zusatz. Man bedient sich in vielen Fällen zur Lösung der Aufgaben über die Zinsrechnung auch bestimmter Formeln, deren Ableitung sich aus den durchgenommenen Beispielen leicht ergibt.

So erhielten wir bei Berechnung der Prozente, Beispiel 1, Seite 63, den Ausdruck $\frac{119{\cdot}70 \times 100}{760 \times 3\frac{1}{2}}$, worin die Zahlen folgende Bedeutung hatten: 119·70 = Zinsen, 760 = Kapital, $3\frac{1}{2}$ = Jahre. Setzen wir statt der Zahlen deren Bedeutungen, so erhalten wir die Formel:

$$\text{Prozente} = \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Kapital} \times \text{Zeit}}.$$ Auf diese Weise erhält man die Formeln:

$$\text{Kapital} = \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Prozent} \times \text{Zeit}},$$

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Prozent} \times \text{Zeit}}{100}$$ und

$$\text{Zeit} = \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Kapital} \times \text{Prozent}}.$$

In diesen Formeln muß aber die Zeit in Jahren ausgedrückt werden.

Zur Schärfung des Verständnisses ist es jedoch besser, diese Formeln beiseite zu lassen und die angeführten Aufgaben mittels Schlußrechnung oder in manchen Fällen auch mittels Proportion zu lösen.

X. Kapitel.

Die Gesellschaftsrechnung oder Teilregel.

§ 43. Begriffsfeststellung.

Die Teilregel ist eine Rechnungsart, mittels welcher eine gegebene Menge in mehrere Teile nach dem Verhältnisse bestimmter Zahlen geteilt werden soll. Die gegebenen Zahlen, nach deren Verhältnis die Teilung vorzunehmen ist, heißen Verhältniszahlen.

Ist nur eine Reihe von Verhältniszahlen vorhanden, so heißt die Teilregel eine einfache; liegen aber mehrere Reihen von Verhältniszahlen vor, so ist die Teilregel eine zusammengesetzte.

1. Die einfache Teilregel.

Beispiel: 5 Holzhändler A, B, C, D, E kaufen eine Brennholzmenge von 750 *rm*. Die Teilung soll nach dem Verhältnisse der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 geschehen; wie viel *rm* erhält jeder?

Wenn A 1, B 2, C 3, D 4, E 5 Teile erhalten soll, so kommen auf alle 5 Personen zusammen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ Teile. Ein solcher Teil ist $\frac{750}{15}$ *rm* = 50 *rm*. Es bekommt daher A 1×50 *rm*, B 2×50 *rm*, C 3×50 *rm*, D 4×50 *rm* und E 5×50 *rm*.

Beim praktischen Rechnen schreibt man diesen Rechnungsvorgang wie folgt an:

750 *rm* : 15 = 50 *rm*.

Holzhändler	A 1	Teile	1 × 50 *rm* =	50 *rm*
„	B 2	„	2 × 50 *rm* =	100 *rm*
„	C 3	„	3 × 50 *rm* =	150 *rm*
„	D 4	„	4 × 50 *rm* =	200 *rm*
„	E 5	„	5 × 50 *rm* =	250 *rm*
	15			750 *rm*

2. Die zusammengesetzte Teilregel.

Beispiel: Ein Fuhrmann verpflichtet sich für 191 *K* 20 *h* drei Ladungen Brennholz zu führen, und zwar eine Ladung mit 20 *rm* 11 *km* weit, die zweite Ladung 32 *rm* 13 *km* weit, und die dritte Ladung mit 40 *rm* 8 *km* weit; welcher Fuhrlohn gebührt ihm für jede Ladung?

Die Entlohnung für eine Ladung soll hier nach dem Verhältnisse der Leistungen, d. i. nach der beförderten Menge und der zurückgelegten Wegstrecke, geschehen. Betrachten wir die Beförderung von 1 *rm* auf 1 *km* Entfernung (1 × 1) als eine Leistungseinheit, so ergibt dies

für die erste Ladung	20 *rm* 11 *km*	weit,	20 × 11 = 220	Einheiten,
„ „ zweite „	32 *rm* 13 *km*	„	32 × 13 = 416	„ und
„ „ dritte „	40 *rm* 8 *km*	„	40 × 8 = 320	„
		zusammen	956	Einheiten.

Für diese 956 Leistungseinheiten wurde der ganze Fuhrlohn mit 191 *K* 20 *h* ausbezahlt; es entfallen daher auf eine Einheit $\frac{191 \cdot 20}{956}$ *K* = 0·20 *K*, und somit für die erste Ladung 220 × 0·20 *K*, für die zweite 416 × 0·20 *K*, und für die dritte 320 × 0·20 *K*.

Übersichtlich dargestellt wird die Aufgabe in folgender Weise angeschrieben:

191·20 *K* : 956 = 0·20 *K*.

1. Ladung	20 *rm* 11 *km*	20 × 11 = 220,	220 × 0·20 *K* =	44 *K* — *h*
2. „	32 *rm* 13 *km*	32 × 13 = 416,	416 × 0·20 *K* =	83 *K* 20 *h*
3. „	40 *rm* 8 *km*	40 × 8 = 320,	320 × 0·20 *K* =	64 *K* — *h*
		956		191 *K* 20 *h*

Nach den Auflösungen der vorstehenden Beispiele gelten für die Teilregel folgende Erklärungen und Regeln:

Bei der einfachen Teilregel wird die zu verteilende Zahl durch die Summe der Verhältniszahlen dividiert und der erhaltene Quotient der Reihe nach mit jeder Verhältniszahl multipliziert: die so erhaltenen Produkte sind die gesuchten Anteile.

Bei der zusammengesetzten Teilregel hängt die Aufteilung einer bekannten Zahl von den Produkten der zusammengehörigen Verhältniszahlen ab. Man muß daher, um die einzelnen Anteile berechnen zu können, die bezüglichen Verhältniszahlen miteinander multiplizieren und erhält auf diese Weise nur je eine Verhältniszahl, d. i. man verwandelt jede zusammengesetzte Teilregel in eine einfache.

Sind die Verhältniszahlen, bei welcher Teilregelaufgabe immer, in Bruchform gegeben, so werden sie vorerst auf gleichen Nenner gebracht und hierdurch zur Vereinfachung des weiteren Verfahrens in ganze Zahlen verwandelt. Auch können die Verhältniszahlen, wenn alle ein gemeinsames Maß besitzen, durch dieses dividiert, d. i. gekürzt werden.

§ 44. Aufgaben über die Teilregel.

1. 4 Arbeiter haben einen Graben gereinigt, der erste durch 6, der zweite durch 9, der dritte durch 11 und der vierte durch 8 Tage; wie viel erhält jeder, wenn für die ganze Arbeit 64 *K* 60 *h* bezahlt wurden?

2. Das Schießpulver besteht aus 75 Teilen Salpeter, 13 Teilen Kohle und 12 Teilen Schwefel; wie viel von jedem Bestandteile gehört zu 5 *q* Schießpulver?

3. Bei einem Holzgeschäfte beteiligen sich 4 Personen, A mit 1250 *K*, B mit 750 *K*, C mit 920 *K* und D mit 1040 *K*; wie viel erhält jeder von dem dabei erzielten Gewinne, wenn dieser 594 *K* ausmacht? Wie viel beträgt der Gewinn in Prozent?

4. 4 Personen kaufen eine Waldparzelle; A gibt 500 *K*, B 320 *K*, C 360 *K* und D 345 *K*. Wenn der Anteil des A jährlich 20 *K* Nutzen bringt, wie viel gewinnen B, C und D, und wie groß ist der Gesamtnutzen?

5. 232·54 *fm* Nutzholz sollen unter 3 Personen so verteilt werden, daß die zweite um 8% mehr als die erste, die dritte um 15% mehr als die zweite erhält. Wie viel bekommt jede Person?

6. Die atmosphärische Luft enthält 20·96 Volumteile Sauerstoff, 79·00 Stickstoff und 0·04 Kohlensäure; wie viel von jedem Gase ist in 65 m^3 Luft enthalten?

7. In einem Schlage arbeitet eine Unternehmermannschaft mit 5 Mann und 1 Holzmeister und erhält für Aufbereitung und Bringung des Holzes 2327·00 *K*. Der Holzmeister hat 143 Tage, die einzelnen Holzknechte haben 148, 137, $142\frac{1}{2}$ und $149\frac{1}{2}$ Tage gearbeitet. Wie viel muß jeder der Arbeiter von dem Gesamtverdienste bekommen, wenn der Holzmeister täglich $\frac{1}{4}$ mehr verdient, als jeder andere Holzhauer?

8. Bei einem Straßenbaue sind 3 Bauern mit ihren Pferden beschäftigt. A stellt 4 Pferde durch 18 Tage, B 6 Pferde durch $13\frac{1}{2}$ Tage, C 2 Pferde durch $20\frac{3}{4}$ Tage. Wie viel erhält jeder Bauer, wenn die gemeinschaftliche Bezahlung 1750·5 *K* beträgt?

9. Ein Gutsbesitzer bewilligt seinen 3 Beamten eine Gratifikation von 3000 *K*, doch soll der Betrag mit Berücksichtigung des Gehaltes und der Dienstzeit verteilt werden. Wie viel erhält jeder, wenn A 8 Dienstjahre und 5000 *K* Gehalt, B 10 Dienstjahre und 3500 *K* und C 5 Dienstjahre und 2000 *K* hat?

10. Bei einem Baue beteiligt sich A mit 8 Mann und 4 Pferden 6 Tage hindurch zu 12 Stunden täglich, B mit 12 Mann und 3 Pferden 5 Tage hindurch zu 10 Stunden täglich, und C mit 10 Mann und 5 Pferden 4 Tage hindurch zu 8 Stunden pro Tag. Wie viel erhält jeder, wenn insgesamt 493 *K* 50 *h* ausbezahlt wurden und die Entlohnung für 1 Pferd ebenso gehalten wurde, wie für 3 Männer?

XI. Kapitel.

Die Kettenrechnung.

§ 45. Die Begriffsfeststellung.

Unter der Kettenrechnung versteht man jene Rechnungsart, mittels welcher aus einer bekannten Zahl einer Art eine zugehörige, aber unbekannte Zahl einer anderen Art unter Einbeziehung einer oder mehrerer Verbindungsgrößen gefunden wird.

Jede Kettenrechnung kann durch wiederholte Anwendung der einfachen Regeldetri gelöst werden, wobei der Vorgang durch das folgende Lehrbeispiel leicht ersichtlich wird.

Beispiel: Wieviel K kosten 53 *rm* Brennholz, wenn 10 *rm* desselben 7·8 *fm* haben, 6 *fm* solchen Holzes auf 21 fl. zu stehen kommen und 1 fl. mit 2 K angenommen wird?

x K kosten 53 *rm* Brennholz,
wenn 10 *rm* = 7·8 *fm*,
und 6 *fm* = 21 fl. kosten,
und 1 fl. = 2 K.

Schluß: 1 fl. = 2 K
oder 1 fl. = $\frac{2}{1}$ K
folglich 21 fl. = $\frac{21 \times 2}{1} K$

21 fl. sind aber gleichwertig mit dem Preise von 6 *fm*; man kann also auch schreiben:

Preis von 6 *fm* = $\frac{21 \times 2}{1} K$

" " 1 *fm* = $\frac{21 \times 2}{6 \times 1} K$

und " " 7·8 *fm* = $\frac{7{\cdot}8 \times 21 \times 2}{6 \times 1} K$

7·8 *fm* haben denselben Wert wie 10 *rm*; daher " " 10 *rm* = $\frac{7{\cdot}8 \times 21 \times 2}{6 \times 1} K$

" " 1 *rm* = $\frac{7{\cdot}8 \times 21 \times 2}{10 \times 6 \times 1} K$

und " " 53 *rm* = $\frac{53 \times 7{\cdot}8 \times 21 \times 2}{10 \times 6 \times 1} K$

Es ist daher $x = \frac{53 \times 7{\cdot}8 \times 21 \times 2}{10 \times 6 \times 1} K$.

Setzen wir in dem für die Unbekannte x gefundenen Ausdrucke zu jeder Zahl die zugehörige Benennung und führen wir weiters den Bruchstrich nicht horizontal, sondern vertikal, wobei dann der Nenner links und der Zähler rechts zu stehen kommt, so erhalten wir den folgenden, in der praktischen Rechnung üblichen Ansatz für derartige Aufgaben, den sogenannten Kettensatz.

x Kronen	53 *rm*
5 10 *rm*	7·8 *fm* 1·3
1 6 *fm*	21 fl.
1 fl.	2 1 Kronen

Wird weiters je eine rechts und eine links stehende Zahl gekürzt und der Wert für die Unbekannte aus dem Produkte aller rechts stehenden Größen, dividiert durch das Produkt aller links stehenden Zahlen angeschrieben, so erhält man:

$$x = \frac{53 \times 1{\cdot}3 \times 21 \times 1}{5 \times 1 \times 1} K = \frac{53 \times 1{\cdot}3 \times 21}{5} K = 289{\cdot}38 \text{ Kronen.}$$

Nach dem Vorstehenden hat man für die Ausführung von Kettenrechnungen folgende Regeln:

1. Die Unbekannte wird als erste Zahl links angeschrieben, rechts davon eine mit ihr gleichwertige Größe einer zweiten Art.

2. Jede folgende Zeile muß links mit einer Zahl beginnen, welche mit der letztvorhergehenden Größe an der rechten Seite gleichnamig ist; rechts davon kommt dann wieder eine Größe einer dritten Art, welche mit der linksstehenden gleichen Wert besitzt. In dieser Weise wird mit dem Ansatze fortgefahren, bis

3. die letzte Zahl rechts mit der ersten Größe links die gleiche Benennung zeigt.*)

*) Auf diese Art hängen die einzelnen Zahlen (Glieder) wie die Glieder einer Kette zusammen; aus diesem Grunde heißt die Rechnung Kettenrechnung oder Kettensatz.

4. Die Zahlen rechts und links vom Striche können, wenn sie Brüche enthalten, von diesen befreit werden, gleichwie auch je eine rechts und links stehende Zahl gekürzt werden kann.

5. Die Unbekannte ergibt sich schließlich als Quotient aus dem Produkte aller rechts stehenden Zahlen, dividiert durch das Produkt aller links stehenden Zahlen.

§ 46. Aufgaben über die Kettenrechnung.

1. Wie viele Stunden braucht jemand, um einen Weg von 15 *km* zurückzulegen, wenn er in 7 Minuten 595 Schritte macht und mit je 10 Schritten 7·8 *m* vorwärts kommt?

2. Wie viele Joch gehen auf 5 *ha*, wenn 200 Quadratklafter 7·19 *a* enthalten?

3. Wie viele Kronen kosten 3254 *c'* Fichtenholz, wenn 2 *fm* desselben Holzes mit 9 fl. bezahlt werden?

4. Wenn jemand 47·5 *fm* Nutzholz für 380 fl. kauft und je 6 *fm* davon mit 180 *K* verkauft, hat er dabei Gewinn oder Verlust, und zwar wie viel in Prozent?

Wenn ein Holzhändler für 100 fl., die er ausgegeben, 106 fl. einnimmt, so hat er dabei 6 fl. oder 6% gewonnen. Die Frage wird daher lauten: Wie viele Kronen Einnahme entspricht der Ausgabe von 380 fl. usf.

5. Ein Holzhändler bezieht 450 *rm* Brennholz, welche ihm samt Bringung usw. auf 3150 *K* zu stehen kommen; wie teuer in ö. W. muß er 1 *rm* verkaufen, wenn er 15% gewinnen will?

6. 1 *fm* Eichenholz kostet $10\frac{1}{2}$ fl. und gleicht im Werte $1\frac{1}{5}$ *fm* Lärchenholz; wie viele Kronen kostet 1 *fm* Fichtenholz, wenn 8 *fm* Lärchenholz gleichwertig sind mit 14 *fm* Fichtenholz?

7. 1 *rm* Brennholz wurde mit 7 *K* 80 *h* verkauft, wobei man einen Gewinn von 25% erzielte; wie hoch war der Einkaufspreis?

8. Bei einer Aufforstung wurden für 54 Männer 270 *K* bezahlt; wie viele Weiber hätte man für den gleichen Betrag anstellen können, wenn 6 Männer ebensoviel erhalten als 7 Weiber?

XII. Kapitel.

Die Mischungsrechnung.

Zur Mischungsrechnung gehört 1. die Durchschnittsrechnung und 2. die eigentliche Mischungsrechnung.

§ 47. Die Durchschnittsrechnung.

Die Durchschnittsrechnung hat zur Aufgabe, aus verschiedenen Größen einer und derselben Art, aber von verschiedenem Werte, den Durchschnitts- oder Mittelwert zu bestimmen.

Den Rechnungsvorgang erläutert das folgende Beispiel: Auf einem Holzplatze wurden bei der Schlichtung durcheinander gemengt: 6 *rm* à 3·80 *K*, 3 *rm* à 4·20 *K*, 2 *rm* à 5·40 *K*; wie hoch stellt sich der Durchschnittswert eines Raummeters?

Der Wert der gesamten Holzmenge beträgt:

6 *rm* à 3·80 *K* . . . . $6 \times 3·80$ *K*
3 *rm* „ 4·20 *K* . . . . $3 \times 4·20$ *K*
2 *rm* „ 5·40 *K* . . . . $2 \times 5·40$ *K*. Es kosten also alle
$6 + 3 + 2 = 11$ *rm* . $6 \times 3·80\,K + 3 \times 4·20\,K + 2 \times 5·40\,K$,

daher 1 *rm* nur den 11. Teil, d. i. $\frac{6 \times 3·80 + 3 \times 4·20 + 2 \times 5·40}{6 + 3 + 2}\,K$,

$$\text{oder } \frac{46·20}{11}\,K = 4·20\,K.$$

Wenn hiernach alle 11 *rm* nach dem Durchschnittspreise von 4·20 *K* verkauft werden, so wird derselbe Erlös erzielt, als wenn die ungemischten Hölzer je für sich nach ihren Preisen verkauft worden wären, denn es ist

$$11 \,.\, 4{\cdot}20\, K = 6 \,.\, 3{\cdot}80\, K + 3 \,.\, 4{\cdot}20\, K + 2 \,.\, 5{\cdot}40\, K = 46{\cdot}20\, K.$$

Regel: Man berechnet den Durchschnittspreis einer Mischung aus der Summe der Produkte aus Menge (Quantität)*) und Wert (Qualität)**) der einzelnen Sorten, dividiert durch die Summe der Quantitäten.

Einen solchen Durchschnittswert bezeichnet man gewöhnlich als das Mittel oder auch als das arithmetische Mittel aus den gegebenen Einzelwerten. Das letztere erscheint bei Berechnungen meist als Quotient aus der Summe mehrerer Einzelwerte und der Anzahl dieser Werte. Ist z. B. die Morgentemperatur 5·4° C, jene am Mittag 23·2° C und jene am Abend 11·3° C, so ist die durchschnittliche Tagestemperatur $\frac{5{\cdot}4 + 23{\cdot}2 + 11{\cdot}3}{3} = 13{\cdot}3^0$. Sind mehrere gleich große Einzelwerte vorhanden, so addiert man sie als Produkt aus ihrem Werte und ihrer Anzahl zu den übrigen Summanden und kommt hierdurch zu derselben Formel, wie sie als allgemeine Regel für die Durchschnittsrechnung aufgestellt wurde.

§ 48. Die eigentliche Mischungsrechnung.

Dieselbe hat zur Aufgabe, das Verhältnis zu finden, in welchem zwei oder mehrere gleichartige Dinge (Quantitäten) von verschiedenem Werte (Qualität) miteinander verbunden werden müssen, um eine Mittelsorte von bestimmter Qualität zu geben.

Von mehreren Qualitäten, welche man zur Mischung verwendet, müssen immer einzelne besser und andere geringer sein, als die Mittelsorte, welche man erhalten will. Verwendet man z. B. 2 Qualitäten zu einer Mischung, so muß die bessere Qualität das ersetzen, was der geringeren Qualität bis zur Mittelsorte abgeht.

1. Es sind nur 2 Sorten vorhanden.

Beispiel: 2 Sorten Brennholz, der *rm* zu 7 *K* und zu 2 *K*, sollen zu einer Mittelsorte vereinigt werden, von welcher 1 *rm* 5 *K* kostet; in welchem Verhältnisse müssen die beiden Sorten gemischt werden?

Bessere Sorte 1 *rm* 7 *K*; die bessere Sorte hat somit gegen die Mittelsorte einen Überschuß bei 1 *rm* von 2 *K*.	Mittelsorte 1 *rm* . . 5 *K*.	Schlecht. Sorte 1 *rm* 2 *K*; die schlechtere Sorte hat gegen die Mittelsorte einen Abgang bei 1 *rm* von 3 *K*.

Die gewünschte Mischung aus beiden Sorten wird durch eine solche Vermengung erreicht sein, in welcher der Überschuß bei der besseren Sorte gleich ist dem Abgange bei der schlechteren Sorte. Es wird daher bei dem Überschusse von 2 *K* und dem Abgange von 3 *K* ein Mischungsverhältnis gewählt werden müssen, dessen Vorderglied mit 2 *K* (Überschuß) multipliziert eine ebenso große Zahl ergibt, wie das Hinterglied

*) Quantität bedeutet Menge, Größe, Anzahl.
**) Qualität bedeutet Beschaffenheit, Wert.

mit 3 K (Abgang) multipliziert. Diese Bedingung tritt ein, wenn man 2 K mit 3 und 3 K mit 2 multipliziert, denn es ist $2\,K \,.\, 3 = 3\,K \,.\, 2 = 6\,K$. Man findet diese Mischungsanteile 3 und 2 sofort, wenn man zu dem Überschusse 2 und dem Abgange 3 das gemeinsame Vielfache 2×3 sucht. und dieses sodann einmal durch 2, dann durch 3 dividiert. Nehmen wir nun von der besseren Sorte 3 *rm*, von der schlechteren 2 *rm*, also im ganzen 5 *rm*, so ist $\underbrace{3 \,.\, 7\,K}_{21} + \underbrace{2 \,.\, 2}_{4} + \underbrace{5 \;\, 5}_{25}\,K$, ein Beweis, daß die Rechnung richtig ist.

Dasselbe Resultat erreicht man, wenn der Überschuß und der Abgang, das sind die Differenzen des Preises der Mischsorte gegenüber der Einzelsorten, in umgekehrter Ordnung direkt als Verhältniszahlen der Mischung (Mischungsanteile) betrachtet werden. Auf Grundlage dieser Folgerung schreibt man ähnliche Rechnungen in nachstehender Weise an:

Bessere Brennholzsorte	7 K	2 Überschuß	3	Verhältniszahl
Mittelsorte 5 K				
Schlechtere Brennholzsorte	2 K	3 Abgang	2	„

Probe: 3 *rm* à 7 K . . . . . 21 K
2 *rm* „ 2 K . . . . . 4 K
5 *rm* . . . . 25 K, daher $1\,rm\ \frac{25}{5}\,K = 5\,K$.

Regel: Bei Vorhandensein zweier Einzelsorten ergibt sich das Mischungsverhältnis aus den Differenzen der Einzelsorten mit der Mittelsorte in umgekehrter Ordnung genommen.

2. Es sind mehrere Einzelsorten vorhanden.

Diese Aufgaben sind unbestimmt. Es lassen sich je nach der verschiedenen Zusammensetzung mehrere Mischungen erzielen, welche alle der gewünschten Mittelsorte entsprechen. Durch eine ähnliche Rechnung, wie bei der Aufgabe unter 1, läßt sich zeigen, daß auch hier der gleiche Vorgang einzuhalten ist, d. h. es muß die Differenz immer zwischen je einer schlechteren und einer besseren Sorte mit der Mittelsorte gesucht werden, um die Mischungsanteile, die ebenfalls in verkehrter Ordnung zu nehmen sind, zu erhalten.

Beispiel: Ein Holzhändler will aus 5 Brennholzsorten, und zwar 1 *rm* der Reihe nach zu 7 K, 6·80 K, 5·50 K, 5 K und 4 K eine Mischung mit 6·50 K pro 1 *rm* herstellen. Zu welchen Anteilen sind die Sorten zu mischen?

a) Mittelsorte	Einzelsorten	Differenzen in verkehrter Folge	Differenzen (Verhältniszahlen) auf ganze Zahlen gebracht	Probe
	7·— K	$\underbrace{2·50 + 1·50}_{4·00}$	40	40 *rm* à 7·— K . . 280·— K
6·50 K	6·80 K	1·00	10	10 *rm* „ 6·80 K . . 68·— K
	5·50 K	0·30	3	3 *rm* „ 5·50 K . . 16·50 K
	5·— K	0·50	5	5 *rm* „ 5·— K . . 25·— K
	4·— K	0·50	5	5 *rm* „ 4·— K . . 20·— K

Mischungsverhältnis 40 : 10 : 3 : 5 : 5. — 63 *rm* . . . . 409·50 K

daher 1 *rm* . . . $\frac{409·50}{63}\,K = 6·50\,K$.

Die Differenzenbildung zwischen je einer besseren und schlechteren Sorte ist in der vorstehenden Lösung durch die kurzen Bögen angezeigt.

Es wurden hiernach die Sorten 7 *K* und 4 *K*, 7 *K* und 5 *K*, 6·80 *K* und 5·50 *K* mit der Mittelsorte verglichen. Ebenso kann man aber auch die einzelnen besseren und schlechteren Sorten noch auf mehrfache andere Weise verbinden und mit der Mittelsorte vergleichen, wie u. a. die folgende Zusammensetzung an demselben Beispiele zeigt:

b) Mittelsorte	Einzelsorten	Differenzen in verkehrter Folge	Differenzen (Verhältniszahlen) auf ganze Zahlen gebracht	Probe
	7·— *K*	1·00	10	10 *rm* à 7·— *K* . . 70·— *K*
	6·80 *K*	1·50 + 2·50	40	40 *rm* „ 6·80 *K* . . 272·— *K*
6·50 *K*	5·50 *K*	0·50	5	5 *rm* „ 5·50 *K* . . 27·50 *K*
	5·— *K*	0·30	3	3 *rm* „ 5·— *K* . . 15·— *K*
	4·— *K*	0·30	3	3 *rm* „ 4·— *K* . . 12·— *K*
				61 *rm* . . . . 396·50 *K*,
				1 *rm* . . $\frac{396.50}{61}$ *K* = 6·50 *K*.

Mischungsverhältnis 10 : 40 : 5 : 3 : 3.

§ 49. Aufgaben über die Mischungsrechnung.

1. Bei einer Arbeit waren beschäftigt: 26 Arbeiter mit 1·70 *K*, 29 Arbeiter mit 1·80 *K*, 24 Arbeiter mit 1·50 *K* und 48 Arbeiter mit 2·00 *K* täglichem Verdienst. Wieviel wurde an Gesamtlohnung ausbezahlt, und wieviel für 1 Arbeiter täglich im Durchschnitte?

2. Das Abtriebsergebnis eines Holzschlages wurde zu nachstehenden Preisen abgegeben: 223·45 *fm* Klotzholz à $12\frac{1}{2}$ *K*, 87·35 *fm* Bauholz à 10 *K*, 112 *rm* Nutzscheiter à 6 *K* 50 *h* (0·85 *fm*), 222 *rm* Scheitholz à 5 *K* (0·80 *fm*), 104 *rm* Prügelholz à 3 *K* (0·70 *fm*). Wie hoch ist der Durchschnittspreis für 1 *fm*?

3. Das Ergebnis eines Abtriebsschlages in Sortimenten ist: 115 *fm* Klotzholz, 7 *fm* Bauholz, 80 *rm* Scheitholz (0·75 *fm*) und 120 *rm* Prügelholz (0·65 *fm*). Die tarifmäßigen Preise betragen: 1 *fm* Klotzholz 12 *K*, 1 *fm* Bauholz 10 *K*, 1 *rm* Scheitholz 5 *K*, 1 *rm* Prügelholz 3 *K*. Ein Käufer bietet für das ganze Holzquantum pro *fm* $8\frac{3}{4}$ *K*. Soll man ihm den Schlag überlassen oder nicht?

4. Bei einer Forstverwaltung ist zweierlei Fichtensame vorrätig, nämlich 7 *kg* mit 75% und 4 *kg* mit 60% Keimkraft. Welches Keimprozent hat die Mischung?

5. Ein Käufer begehrt 35 *rm* Brennholz zu $6\frac{1}{2}$ *K*. In welchem Verhältnisse müssen die vorhandenen Sorten zu $7\frac{3}{4}$ und $5\frac{1}{2}$ *K* gemischt werden?

Diese und ähnliche Aufgaben zerfallen in zwei Teile, und zwar *a)* Aufsuchung des Mischungsverhältnisses überhaupt, *b)* Teilung der gegebenen Zahl nach den gefundenen Verhältniszahlen mittels der Teilregel. In unserer Aufgabe wird daher zuerst das Mischungsverhältnis ohne Rücksicht auf die 35 *rm* gerechnet; erst nach dieser Rechnung wird die Zahl 35 nach den gefundenen Verhältniszahlen geteilt, wobei man findet, wieviel Raummeter der besseren und schlechteren Sorte zu nehmen sind, um 35 *rm* Mischung zu erhalten.

6. 24 *rm* Brennholz à 3·20 *K* vermischt jemand mit 16 *rm* von einer anderen Sorte. Nun kostet 1 *rm* 2 *K* 80 *h*; wieviel kostet 1 *rm* der zweiten Sorte?

7. 120 *rm* Brennholz sind aus 2 verschiedenen Sorten zusammengesetzt, so daß 1 *rm* im Durchschnitte auf 4 *K* 32 *h* kommt. Die erste Sorte kostet 4 *K* 64 *h*, die zweite 3 *K* 84 *h* pro Raummeter. Wie viel Raummeter von jeder Sorte werden zur Mischung verwendet?

8. Von 3 Sorten Brennholz, wovon 1 *rm* zu 4·80 *K*, zu 6 *K* und zu 8 *K* gekauft wird, soll eine neue Sorte zu 6 *K* 40 *h* pro Raummeter durch Mischung hergestellt werden; wieviel muß von jeder Sorte genommen werden, wenn man 52 *rm* zusammensetzen will?

XIII. Kapitel.

Die Formellehre.*)

§ 50. Allgemeines.

Alle Rechnungen, die mit besonderen Zahlen ausgeführt werden. gelten nur für diesen einen bestimmten Fall und müssen, wenn sich nur eine der in der Rechnung enthaltenen Zahlen ändert, wieder erneuert werden.

Wenn wir beispielsweise bei der Prozentrechnung in einem bestimmten Falle (Seite 64, Beispiel 3) die Zinsen aus dem gegebenen Kapitale 2400 *K*, dem Prozente 4 und der Anzahl der Jahre 5 gerechnet haben und mittels Schlußrechnung oder Proportion zu dem Resultate: Zinsen = 480 *K* gekommen sind, so leuchtet ein, daß derselbe Rechnungsvorgang für alle ähnlichen Fälle Geltung hat, und daß in allen diesen Fällen das Kapital mit den Prozenten und der Anzahl der Jahre multipliziert und durch 100 dividiert werden muß, um das jeweilige Zinsenerträgnis zu erhalten.

Um daher für ähnliche Fälle den ganzen Rechnungsvorgang zu ersparen, bezeichnet man das Kapital mit dem Buchstaben C, das Prozent mit p, die Anzahl der Jahre mit n und die Zinsen mit z und hat dann $z = \frac{C \times p \times n}{100}$, d. h. man kann für alle derartigen Rechnungen diesen Ausdruck ein- für allemal benützen, wenn man für C die besondere Zahl für das jeweilig gegebene Kapital, für p das für jeden besonderen Fall in Betracht kommende Prozent und für n die gegebene Anzahl der Jahre einsetzt.

Man nennt solche Zahlen, welche angewendet werden, um bestimmte Rechnungen und Rechnungsoperationen in einer leicht übersichtlichen und allgemeinen Form darstellen zu können, allgemeine Zahlen und drückt sie durch Buchstaben aus, und zwar meistens durch die Anfangsbuchstaben jener Werte, für welche sie gebraucht werden.

Die Verbindung der allgemeinen Zahlen, wie sie zur Veranschaulichung besonderer Rechnungsarten notwendig sind, nennt man eine Formel. Es ist z. B. $z = \frac{C.\ p.\ n.}{100}$ die Formel für die Berechnung der Zinsen.

Obwohl wir erst in der Geometrie, praktischen Geometrie und Holzmeßkunde mehr mit Formeln zu tun haben werden, so ist es doch notwendig, schon hier das wesentlichste aus der Formellehre vorzunehmen, um an den genannten Stellen das eigentliche Sachliche nicht durch rein arithmetische Darlegungen zu trüben und dasselbe demnach von vornherein besser auffassen und anwenden zu können.

§ 51. Anwendung der Formeln für besondere Fälle.

Will man eine bestimmte Rechnung nach einer allgemeinen Formel lösen, so hat man zunächst in der betreffenden Formel für die allgemeinen Zahlen die gegebenen besonderen Werte einzusetzen, d. h. dieselben zu substituieren und so miteinander zu verbinden, wie es die Formel vorschreibt. Hierauf werden die angezeigten Rechnungsoperationen

*) Beim Vortrage ist es zu empfehlen, dieses Kapitel Hand in Hand mit der Flächen- und Körperberechnung vorzunehmen.

ausgeführt und das erhaltene Resultat gibt den Wert für die gesuchte Größe an.

In nachstehenden Beispielen möge die Anwendung einiger Formeln aus der Geometrie vorgeführt werden.

1. Es ist der Flächeninhalt F eines Trapezes zu berechnen, dessen parallele Seiten a und b 16 m und 14 m lang sind und dessen Höhe h 6 m mißt.

Formel: $F = \frac{a + b}{2} . h \qquad a = 16\,m,\ b = 14\,m,\ h = 6\,m.$

$F = \frac{16 + 14}{2} . 6 \qquad F = 15 . 6 = 90\,m^2.$

2. Ein Kreis hat einen Durchmesser $2\,r$ von 6 m; wie groß ist der Umfang U?

Formel: $U = 2\,r . \pi \quad 2\,r = 6\,m,\ \pi = 3{\cdot}14.$
$U = 6 . 3{\cdot}14$
$U = 18{\cdot}84\,m$; $2\,r$ = doppelter Halbmesser = Durchmesser.

3. Wie groß ist der Kubikinhalt K eines Würfels, dessen Seite s 4 m mißt?

Formel: $K = s^3 \qquad s = 4\,m.$
$K = 4^3$
$K = 64\,m^3.$

4. Es ist der Kubikinhalt K eines Kegelstutzes zu berechnen, der folgende Dimensionen besitzt: Höhe $h = 2\,m$, Radius R der unteren Grundfläche 20 cm, Radius r der oberen Grundfläche 16 cm.

Formel: $K = \frac{\pi . h}{3} . (R^2 + R . r + r^2) \quad h = 2\,m,\ R = 0{\cdot}20\,m,\ r = 0.16\,m,\ \pi = 3{\cdot}14.$
$K = \frac{3{\cdot}14 . 2}{3} . (0{\cdot}20^2 + 0{\cdot}20 \times 0{\cdot}16 + 0{\cdot}16^2)$
$K = 0{\cdot}204309\,m^3.$

Von der Anführung besonderer Aufgaben wird hier abgesehen, weil sich dieselben zur Genüge in der Geometrie (II. Teil) bei der Umfangs-, Flächen- und Körperberechnung vorfinden.

§ 52. Die Umgestaltung der Formeln.

Sehr häufig tritt die Notwendigkeit heran, eine allgemeine Formel für einen bestimmten Fall in ihrer Gestalt zu verändern, damit sie für diesen einen besonderen Zweck entspreche. Einige Beispiele werden dies sofort veranschaulichen.

1. Der Flächeninhalt F eines Rechteckes ist 18 cm^2, die Grundlinie g ist 6 cm lang; wie groß ist die Höhe h?

Die Formel für die Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechteckes ist $F = g . h$. Setzen wir in dieselbe die besonderen Werte ein, so ist $18 = 6 . h$. Wenn nun das Sechsfache von $h = 18$ ist, so ist das Einfache h der 6. Teil von 18, also $h = \frac{18}{6} = 3\,cm$. Behalten wir statt 18 und 6 die allgemeinen Zahlen bei, um aus $F = g . h$ die Höhe h zu berechnen, so schließen wir allgemein:

Wenn das g-fache von h gleich F ist, so ist das Einfache von h der g-te Teil von F, also $h = \frac{F}{g}$, d. h. aus der Formel $F = g . h$ läßt sich eine solche für h leicht finden.

2. Der Flächeninhalt F eines Trapezes ist $45 \, m^2$, die Höhe h $6 \, m$, die eine parallele Seite a $8 \, m$; wie lang ist die zweite parallele Seite b?

Die Formel für die Fläche eines Trapezes ist $F = \frac{a + b}{2} . h$ oder, da ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziert wird, indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert, $F = \frac{(a + b) . h}{2}$*). Wenn das einfache F der Hälfte von $(a + b) . h$ gleich kommt, so ist das doppelte F gleich dem ganzen $(a + b) . h$, also $2 F = (a + b) . h$. Wenn weiters das h-fache von $(a + b)$ gleich $2 F$ ist, so ist das einfache $(a + b)$ der h-te Teil von $2 F$, also $\frac{2 F}{h} = a + b$. Um aus der Summe $a + b$ b allein zu erhalten, muß a davon abgezogen werden, also $\frac{2 F}{h} - a = \boldsymbol{b}$.

In diese Formel für b unsere besonderen Zahlen eingesetzt, gibt $\frac{2 . 45}{6} - 8 = b$. Daraus $b = 7 \, m$.

Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, daß eine allgemeine Formel nicht nur zur Berechnung jener Größe dient, für welche dieselbe aufgestellt wurde, sondern daß man auch auf Grund einfacher Vernunftschlüsse imstande ist, jeden einzelnen Bestandteil aus derselben durch Rechnung zu finden, wenn alle übrigen Größen in der Formel bekannt sind, oder als bekannt angenommen werden können.

Im Nachstehenden soll die Umgestaltung einiger einfacher Formeln in Kürze erörtert werden, um hierdurch das schwierige und oft verständnislose Auswendiglernen zu vieler Formeln zu vermeiden und es dahin zu bringen, daß der Schüler auf Grund weniger Formeln die sämtlichen einschlägigen Rechnungen durchführen könne.

Nach der Definition auf Seite 3 bezeichnet man die Verbindung zweier gleicher Größen durch das Gleichheitszeichen als eine Gleichung. Es ist demnach auch jede Formel eine Gleichung, in welcher der links vom Gleichheitszeichen stehende Teil die linke Seite, und der rechts vom Gleichheitszeichen befindliche Teil die rechte Seite bedeutet. Jede Seite besteht wieder aus einem oder aus mehreren Gliedern, je nachdem nur ein oder mehrere durch das + oder — Zeichen verbundene Teile auf einer Seite vorhanden sind.

Die Grundregel für die Umgestaltung der Gleichungen, also auch der Formeln, ist folgende: Wenn man mit Gleichem Gleiches vornimmt, so erhält man wieder Gleiches.

Diese Hauptregel für Gleichungen gestaltet sich in ihrer Anwendung auf die verschiedenen Rechnungsarten in nachstehender Weise:

1. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.

Es sei nach dem Pythagoräischen Lehrsatze**) $c^2 - b^2 = a^2$, wobei c^2 zu berechnen wäre.

*) Der Ausdruck $a + b$ muß hier eingeklammert werden, weil er zur Gänze mit h zu multiplizieren ist.

**) Siehe Geometrie.

Addieren wir zu beiden Seiten der Gleichung die sich selbst gleiche Größe b^2, also $b^2 = b^2$, so erhalten wir $c^2 - b^2 + b^2 = a^2 + b^2$,*) also $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.

Es sei wieder nach dem Pythagoräischen Lehrsatze $c^2 = b^2 + a^2$ und a^2 zu bestimmen.

Subtrahiert man von beiden Seiten der Gleichung die sich selbst gleiche Größe $b^2 = b^2$, so erhält man $c^2 - b^2 = b^2 + a^2 - b^2$, also $c^2 - b^2 = a^2$.

3. Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches.

Der Radius r eines Kreises ist gleich dem halben Durchmesser D desselben Kreises, $r = \frac{D}{2}$; es ist D zu berechnen.

Multiplizieren wir beide Seiten der Formel mit 2, so erhalten wir $2 . r = \frac{D . 2}{2}$, oder $D = 2\,r$.

4. Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

Der Umfang U eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dessen Durchmesser d mit der Ludolphschen Zahl, also $U = d . \pi$; d ist zu suchen.

Dividieren wir beiderseits durch die sich selbst gleiche Größe $\pi = \pi$, so ergibt sich $\frac{U}{\pi} = \frac{d . \pi}{\pi}$, oder $\frac{U}{\pi} = d$.

5. Aus gleichen Größen die gleiche Wurzel gezogen, gibt wieder Gleiches.

Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist $c^2 = a^2 + b^2$; aus beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen, gibt: $\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ oder $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

6. Gleiche Größen zur gleichen Potenz erhoben geben wieder Gleiches.

Mit Hilfe dieser Sätze sind wir in der Lage, jedes Glied einer Formel zu berechnen, wenn die anderen Glieder derselben als bekannt angenommen werden können.

Beispiele:

1. Die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreieckes ist $F = \frac{g . h}{2}$; der Flächeninhalt F und die Grundlinie g sind gegeben, die Höhe h ist zu suchen.

$$2\,F = g . h \text{ (nach Satz 3)}; \quad \frac{2\,F}{g} = h \text{ (nach Satz 4).}$$

*) Wenn wir zu $a^2 - b^2$, b^2 addieren, so erhalten wir $a^2 - b^2 + b^2$; es soll also b^2 einmal subtrahiert, und dann gleich wieder addiert werden. Eine Zahl zu einer anderen addiert und dann gleich wieder subtrahiert „hebt sich auf“.

2. Der Flächeninhalt eines Kreisringes wird berechnet nach der Formel: $F = (R^2 - r^2) \cdot \pi$. Die Fläche F und der Radius r des inneren Kreises sind gegeben; der Radius des äußeren Kreises R ist zu berechnen.

$$\frac{F}{\pi} = R^2 - r^2 \text{ (nach Satz 4)}; \qquad \frac{F}{\pi} + r^2 = R^2 \text{ (nach Satz 1)};$$

$$\sqrt{\frac{F}{\pi} + r^2} = R \text{ (nach Satz 5)}.$$

3. Der Kubikinhalt eines gemeinen Kegels wird berechnet nach der Formel: $K = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$. Der Kubikinhalt K und die Höhe h sind gegeben; der Radius r der Grundfläche ist zu berechnen.

$$3\,K = r^2 \pi \cdot h \text{ (nach Satz 3)}; \qquad \frac{3\,K}{\pi \cdot h} = r^2 \text{ (nach Satz 4)};$$

$$\sqrt{\frac{3\,K}{\pi \cdot h}} = r \text{ (nach Satz 5)}.$$

4. Die Oberfläche einer Kugel wird gefunden nach der Formel: $O = 4\,r^2 \pi$. Die Oberfläche O ist gegeben, der Wert für r ist zu berechnen:

$$\frac{O}{4\,\pi} = r^2 \text{ (nach Satz 4)}; \qquad \sqrt{\frac{O}{4\,\pi}} = r \text{ (nach Satz 5)}.$$

§ 53. Aufgaben zur „Formellehre".

Berechne aus den Formeln:

1. $F = g \cdot h$, die Grundlinie g.
2. $U = 2\,r\,\pi$, den Radius r.
3. $F = s^2$, die Seite s.
4. $F = \frac{d^2}{4}\pi$, den Durchmesser d.
5. $F = \frac{a + b}{2} \cdot h$, die Höhe h.
6. $K = \frac{g \cdot h}{3}$, die Grundfläche g.
7. $K = \frac{4}{3}\pi r^3$, den Radius r.
8. $M = \pi \cdot s\,(R + r)$, den Radius R, dann r und die Seitenhöhe s.

II. Abschnitt.

Vom Rechnen mit allgemeinen und algebraischen Zahlen.*)

I. Kapitel.

Das Wesentlichste von den Rechnungsoperationen mit allgemeinen Zahlen.

§ 54. Vorbegriffe.

Eine Zahl, welche jede beliebige Menge von Einheiten bedeuten kann und durch Buchstaben bezeichnet wird, haben wir (Seite 2) eine **allgemeine Zahl** genannt. Z. B. a als Zahl betrachtet stellt uns eine allgemeine Zahl vor, für welche wir uns jede beliebige Menge von Einheiten denken können.

Stellen uns die Buchstaben a und b zwei allgemeine Zahlen vor, so bezeichnet, ebenso wie bei den besonderen Zahlen, $a + b$ die Summe, $a - b$ die Differenz, $a \times b$ oder $a \,.\, b$ das Produkt, und $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ den Quotienten dieser beiden allgemeinen Zahlen. Das Multiplikationszeichen $\times$ oder . läßt man im Produkte gewöhnlich weg und schreibt also statt $a \times b$ oder $a \,.\, b$ kurz $a\,b$.

Sind mehrere allgemeine Zahlen durch das + oder — Zeichen miteinander verbunden, so sprechen wir von einem **mehrgliedrigen Ausdrucke** oder **Polynom**. Die einzelnen Teile eines solchen heißen die **Glieder** desselben. Es ist sonach $a + b - c + d$ ein mehrgliedriger Ausdruck, und a, b, c und d sind die Glieder desselben. Ein mehrgliedriger Ausdruck mit 2 Gliedern heißt **Binom**, z. B. $a + b$, ein solcher mit 3 Gliedern ein **Trinom**, z. B. $a + b - c$, ein solcher mit 4 Gliedern **Quadrinom** usf. Ein eingliedriger Ausdruck, z. B. a, wird als **Monom** bezeichnet.

Ein mehrgliedriger Ausdruck von der Form $a + b\,c$ hat die Bedeutung, daß zu der Zahl a das Produkt $b\,c$ zu addieren ist. Wird aber verlangt, daß nicht nur die Zahl b allein, sondern auch a, also die Summe $a + b$, mit c zu multiplizieren kommt, so ist ein Zeichen notwendig, welches anzeigt, daß a und b zusammen, also die Summe zu multiplizieren ist, und dieses Zeichen der Zusammengehörigkeit bilden die sogenannten **Klammern**. Hiernach drückt $(a + b - c + d)\,(e + f)$ die Multiplikation des Polynoms $a + b - c + d$ mit der Summe $e + f$ aus, während anderseits der Ausdruck $(a + b - c + d) \,.\, e + f$ bedeuten würde, daß nur die Zahl e mit dem Polynom $a + b - c + d$ zu multiplizieren und zu diesem Produkte die Zahl f zu addieren sei.

Jeder allgemeine Zahlenausdruck zeigt, wie wir gesehen haben, die auszuführende Rechnungsoperation nur an. Will man diese auf einen besonderen Fall anwenden, so muß man an Stelle der allgemeinen Zahlen die besonderen setzen.

Man hat sonach, wenn $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$ und $d = 5$ ist, $a + b = 4 + 2 = 6$, $a - b = 4 - 2 = 2$, $\frac{a}{b} = \frac{4}{2} = 2$, $a + b - c = 4 + 2 - 1 = 5$, $(a + b) \,.\, (c + d) = (4 + 2) \,.\, (1 + 5) = 6 \,.\, 6 = 36$, $(a + b) \,.\, c - d = (4 + 2) \,.\, 1 - 5 = 6 \,.\, 1 - 5 = 1$ usf.

---

*) Wenn dieser Abschnitt obligat in den Unterricht einbezogen wird, so ist derselbe vor dem Potenzieren und Wurzelziehen, dieses selbst aber ganz am Schlusse der Arithmetik vorzunehmen.

Das Einsetzen von besonderen Zahlenwerten an Stelle der allgemeinen Zahlen behufs Durchführung der angezeigten Rechnungsoperation bezeichnet man als das Substituieren (S. 73).

Aufgaben. Welche besonderen Werte erlangen die Ausdrücke:

a) $ab - c + d$, *b)* $(a - b) . c$, *c)* $\frac{a}{b} . (c - d)$, *d)* $(a + b) . (a - b)$, wenn $a = 10$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 3$.

§ 55. Die Addition allgemeiner Zahlen.

1. Allgemeine Zahlen werden addiert, wenn man sie, durch das + Zeichen verbunden, nebeneinander setzt, z. B. $a + b + c + d$, wobei, wie bei der Addition besonderer Zahlen, die Reihenfolge der Summanden ohne Einfluß auf die Summe bleibt. Es ist $3 + 4 + 5 + 7 = 7 + 5 + 4 + 3$, also auch $a + b + c + d = d + c + b + a$.

2. Zu einer Zahl wird eine Summe addiert, indem man zu ihr die einzelnen Summanden addiert, denn es ist einleuchtend, daß $3 + (4 + 5) = 3 + 4 + 5$, d. h. es ist gleichgiltig, ob ich zu der Zahl 3 die Summe $4 + 5 = 9$ auf einmal hinzu zähle, oder ob ich zur Zahl 3 vorerst 4 und dann noch 5 addiere. Man hat also allgemein auch $x + (y + z) = x + y + z$. Ebenso verständlich ist, daß $(6 + 7) + (8 + 9) = 6 + 7 + 8 + 9$, demnach auch $(d + e) + (f + g) =$ sein muß $d + e + f + g$, oder endlich, da $7 + (8 + 9 + 3 + 2 + 1) = 7 + 8 + 9 + 3 + 2 + 1$, auch $i + (k + l + m + n + o)$ gleich ist $i + k + l + m + n + o$.

3. Ist zu einer Zahl eine Differenz zu addieren, so addiert man zu der gegebenen Zahl den Minuend und subtrahiert davon den Subtrahend, denn man erhält in dem Beispiele $4 + (6 - 2)$ dasselbe Resultat, ob man nun zu 4 sofort die Differenz $6 - 2$, also 4, dazu zählt, oder ob man zu 4 zuerst 6 hinzu zählt und dann 2 davon abzieht. Aus diesem Grunde ist allgemein $x + (y - z) = x + y - z$.

4. Ist eine allgemeine Zahl öfter als Summand zu setzen, so schreibt man dieselbe nur einmal an, setzt ihr jedoch jene Zahl voran, welche anzeigt, wie oftmal die allgemeine Zahl als Addend erscheint, z. B. $a + a + a = 3 . a = 3a$. Die allgemeine Zahl, in diesem Beispiele a, heißt Basis, und jene Zahl, in unserem Falle 3, welche anzeigt, wie oftmal die Basis als Summand zu setzen ist, heißt Koeffizient. Letzterer kann auch eine allgemeine Zahl sein, wenn die Angabe, wie oft die Basis als Summand zu setzen ist, eine allgemeine Zahl ist.

Ist z. B. die Basis a $b$mal als Summand zu setzen, so haben wir $a + a + a + \ldots$ ($b$mal) $= b . a$.

Die auf diese Weise entstehenden allgemeinen Ausdrücke mit gleicher Basis heißen gleichnamig, z. B. $3a$ und $2a$; im Gegensatze hierzu bezeichnet man Ausdrücke mit ungleicher Basis als ungleichnamig, z. B. $6a$ und $3b$.

5. Gleichnamige allgemeine Ausdrücke werden addiert, indem man ihre Koeffizienten addiert und dieser Summe die gemeinsame Basis anfügt. Es ist also $3a + 2a = (a + a + a) + (a + a) = 5a$.

6. Bei ungleichnamigen Ausdrücken kann demnach die Addition nur durch Verbindung mit dem + Zeichen angezeigt werden. Z. B. $3x + 2y = 3x + 2y$; dagegen $3x + 2y + 2x + 6y = 5x + 8y$.

Aufgaben. *a)* $c + d + (b + a + f + g) = ?$ *b)* $(a + b + c + d) + (e + f + g + h) = ?$ *c)* $2x + (3y + 4z + 5n + x) = ?$ *d)* $13u + (16u - 15u) = ?$ *e)* $14x + (5y - 6x) = ?$ *f)* $22z + (16x + 17y - 10z) = ?$ *g)* $x + x + x + x = ?$ *h)* $y + y + y + \ldots$ ($m$mal) $= ?$ *i)* $3m + 2m + m = ?$ *k)* $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}a + \frac{3}{4}a + \frac{4}{5}a = ?$ *l)* $5m + 4n + 2m + n = ?$ *m)* $\frac{5}{6}x + \frac{6}{7}y + \frac{7}{8}x + \frac{8}{9}y = ?$ *n)* $3x + 3\frac{1}{2}x + 2\frac{5}{7}x + 3\frac{5}{8}x = ?$ *o)* $0{\cdot}7b + 0{\cdot}5c + 3{\cdot}4b + 7{\cdot}6d = ?$ *p)* $\frac{6}{11}x + 0{\cdot}3x + 3{\cdot}2x + \frac{3}{8}x = ?$

§ 56. Die Subtraktion allgemeiner Zahlen.

1. Zwei allgemeine Zahlen werden subtrahiert, indem man sie mit dem — Zeichen verbindet. Soll sonach von a die Zahl b abgezogen werden, so erhält man die Differenz in $a - b$.

2. Gleichnamige Ausdrücke werden subtrahiert, wenn man ihre Koeffizienten subtrahiert und die so erhaltene Differenz der gemeinsamen Basis vorsetzt. Z. B. $3a - 2a = a + a + a - a - a = 1a = a$.*)

*) Statt des Koeffizienten 1 in $1a$ schreibt man nur a, d. h. man läßt den Faktor 1 einfach weg.

3. Bei ungleichnamigen Ausdrücken kann die Subtraktion nur durch Verbindung mit dem — Zeichen angedeutet werden, z. B. $3x - 2y$. Kommen indessen innerhalb eines mehrgliedrigen Ausdruckes mehrere gleichnamige Ausdrücke vor, so werden zuerst die Addenden, dann die Subtrahenden addiert, worauf die Summe der letzteren von der Summe der ersteren abgezogen wird. Man sagt in solchen Fällen, der mehrgliedrige Ausdruck wird auf einen einfacheren Ausdruck gebracht oder „reduziert". Z. B. $6a + 3b - 5a + 2b + 7a - 3b = (6a + 7a) - 5a + (3b + 2b) - 3b = 13a - 5a + 5b - 3b = 8a + 2b$.

4. Soll von einer allgemeinen Zahl eine Summe subtrahiert werden, so subtrahiert man von derselben der Reihenfolge nach die einzelnen Summanden.

In dem Beispiele $8 - (3 + 1)$ kommt man zu demselben Resultate, ob man von 8 die Summe $3 + 1 = 4$, oder der Reihenfolge nach jeden der einzelnen Summanden 3 und 1 abzieht. Es ist also $8 - (3 + 1) = 8 - 3 - 1$, oder auch allgemein $a - (b + c) = a - b - c$.

5. Soll von einer allgemeinen Zahl eine Differenz subtrahiert werden, so wird von derselben der Minuend abgezogen, der Subtrahend aber addiert.

Zur Erläuterung dieses Satzes diene das Beispiel $10 - (8 - 3)$. Dieser Rechnungsansatz sagt, daß ich nicht 8 Einheiten von 10 wegzunehmen habe, sondern deren nur $8 - 3$, mithin 5. Wenn ich also 8 Einheiten von 10 wegnehme, so muß ich zu der so erhaltenen Differenz 3 dazu zählen, um das richtige Resultat zu erhalten. Es ist also $10 - (8 - 3) = 10 - 8 + 3$, oder allgemein $a - (b - c) = a - b + c$.

§ 57. Folgerungen für das Auflösen von Klammern.

Aus Punkt 2 und 3 des § 55 und Punkt 4 und 5 des § 56 ergeben sich folgende Regeln: 1. Steht vor einer Klammer ein + Zeichen, so kann man die Klammer ohne weiteres weglassen, und 2. steht vor einer Klammer ein — Zeichen, so verwandeln sich die Zeichen innerhalb der Klammer bei deren Hinweglassung in die entgegengesetzten, also ein + in — und umgekehrt.

Allgemein ausgedrückt lauten diese Gesetze: $a + b + (c + d - e - f) = a + b + c + d - e - f$, und $a + b - (c + d - e - f) = a + b - c - d + e + f$.

Aufgaben zu § 55, § 56 und § 57.

a) $6m - 3m = ?$ *b)* $6x - 6x = ?$ *c)* $13y + 3y = ?$ *d)* $\frac{3}{4}m + \frac{1}{8}m - \frac{1}{2}m = ?$ *e)* $8x + (2y + x) = ?$ *f)* $10x + (5x - y) = ?$ *g)* $15m - (10m + 2n) = ?$ *h)* $15m - (10m - 2n) = ?$ *i)* $\frac{7}{2}a - \frac{3}{5}a = ?$ *k)* $x + 3x - 4x + 12x - 7x = ?$ *l)* $5a + 3b + 6a + 7b - a + b = ?$ *m)* $6a - (2a - 3a + 5a + b) = ?$ *n)* $9x + 3y - (5x + 3y - 7x - 15y) = ?$ *o)* $7b - (6b - 4c) = ?$ *p)* $16s - (7t + 6u + 3t - 12s - 17t - 14u) = ?$

§ 58. Die Multiplikation allgemeiner Zahlen.

1. Das Produkt $5 . b$ bedeutet, daß die allgemeine Zahl b . . . . 5mal zu nehmen ist, also $5b = b + b + b + b + b = 5 . b = 5b$. In gleicher Weise zeigt das Produkt $a . b$ an, daß die Zahl a . . . $b$mal als Summand zu setzen ist, also $a + a + a + a$ . . . . ($b$mal) $= a . b = ab$.

2. Die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Faktoren miteinander multipliziert werden, ist gleichgiltig, denn es ist $3 . 4 = 4 . 3 = 12$, und $a . b = b . a = ab$, ferner $3 . 4 . 5 = 5 . 4 . 3 = 4 . 3 . 5 = 60$, und $a . b . c = c . b . a = b . a . c = abc$.

3. Eine Zahl wird mit einem Produkte multipliziert, indem man einen Faktor des Produktes mit derselben multipliziert. Es ist $(4 . 3) \times 2 = 4 . (3 . 2) = 24$ (nicht aber $4 \times 2 . 3 \times 2$, denn dieses Produkt wäre 48 und nicht 24). Allgemein ist daher $(a . b) . c = (a . c) . b = (b . c) . a = bca = abc$.*)

4. Erscheint eine Zahl mehrmals als Faktor, z. B. $a . a . a . a$, so wendet man für ein solches Produkt eine kürzere Schreibweise an, indem man den Faktor nur einmal anschreibt und durch eine rechts oben angesetzte Zahl anzeigt, wie oftmal dieser Faktor zu nehmen ist. Es ist demnach $a . a = a^2$, $a . a . a = a^3$, und $a . a . a$ . . . ($m$mal) $= a^m$. Ein Produkt aus gleichen Faktoren nennt man eine Potenz und sagt, eine Zahl ist zur 2., 3., 4., ... m^{ten} Potenz erhoben, wenn diese Zahl 2, 3, 4 . . . . oder $m$mal als Faktor zu setzen kommt. Der zu potenzierende Faktor heißt die Basis, und die rechts oben stehende

---

*) Bei $(a . b) . c$ soll die Klammer nur andeuten, daß das Produkt ab mit der allgemeinen Zahl c zu multiplizieren ist. Das Produkt abc bedeutet schon das Resultat, denn die angezeigte Multiplikation wurde bereits verrichtet; man kann deshalb die Klammer ohne weiteres weglassen.

Zahl, welche angibt, wie oft dieser Faktor zu nehmen ist, der **Potenzexponent** oder kurz **Exponent**. In unserem Falle ist a die Basis, 2, 3, 4 . . . . m der Exponent. Die zweite Potenz, a^2, einer Zahl a wird kurz als das **Quadrat**, die dritte Potenz, a^3, einer Zahl a der **Kubus** derselben genannt.*)

5. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, wenn man ihre Exponenten addiert und diese Summe der Basis als Exponent gibt. Es ist $a^3 . a^2 = a . a . a \times a . a = a^5 = a^{3+2}$, $a^4 . a^3 . a^2 = a . a . a . a \times a . a . a \times a . a = a^9 = a^{4+3+2}$, und allgemein $a^m . a^n = a^{m+n}$. Kommen in einem mehrgliedrigen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Basis vor, so ordnet man die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten der gemeinsamen Basis, indem man entweder mit der höchsten Potenz beginnt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läßt, oder indem man zuerst die niedrigste Potenz anschreibt und an diese dann immer höhere anreiht. Man spricht dann von einem nach **steigenden** oder **fallenden Potenzen** der gemeinsamen Basis geordneten Polynom. Z. B. $x + 2\,x^2 + 3\,x^3 + 4\,x^4 + 5\,x^5$ oder $a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a$.

6. Eingliedrige Ausdrücke werden multipliziert, indem man das Produkt der Koeffizienten bildet und dasselbe dem Produkte der allgemeinen Faktoren voranschreibt.

Z. B. *a)* $4\,x . 6 = 24\,x$; *b)* $3\,a\,b\,c . a = 3 . a . a . b . c$**) $= 3\,a^2\,b\,c$.

c) $12 \cdot 5\,x^2\,y^3 . 2\,x^2\,y^3 = 12 \cdot 5 . 2 . x^2 . x^2 . y^3 . y^3 = 25\,x^4\,y^6$.

d) $m\,x^3 . n\,x . 12 \cdot 5\,x^4\,y = 12 \cdot 5 . m . n . x^3 . x . x^4 . y = 12 \cdot 5\,m\,n\,x^8\,y$.

7. Sind zwei Wurzelgrößen (§ 30) mit gleichen Wurzelexponenten miteinander zu multiplizieren, so multipliziert man die beiden Radikanden und zieht aus diesem Produkte die gleichnamige Wurzel.

Z. B. $\sqrt{4} . \sqrt{9} = \sqrt{4 . 9} = \sqrt{36} = 6$, denn $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, und 2×3 ist auch gleich 6.

Allgemein $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a . b}$.

Aus der Umkehrung dieses Satzes folgt:

$\sqrt{36} = \sqrt{4 . 9} = \sqrt{4} . \sqrt{9}$, oder allgemein $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$.

Aufgaben:

a) $34\,a . (2\,b\,a\,b) = ?$ *b)* $m\,a . n\,a . (a\,b) = ?$ *c)* $m^2\,x . m\,x^2 = ?$ *d)* $8\,b . 7\,b^2 . 10\,b^4 . 2\,b^4 = ?$ *e)* $\frac{1}{2}\,a . \frac{3}{4}\,b . \left(\frac{5}{6}\,a . \frac{7}{8}\,b\right) = ?$ *f)* $6\,a^2\,b^3 . 5\,a\,b^4 . 3\,b^5 = ?$ *g)* $17\,x^2\,y . 3\,x^3 . x^4 = ?$ *h)* $a^7 . a^6\,b . a^5\,b^2 . a^4\,b^3 . a^3\,b^4 . a^2\,b^5 . a\,b^6 . b^7 = ?$ *i)* Substituiere in *h)* für $a = 2$, für $b = 3$ und bestimme den Zahlenwert des Resultates. *k)* $\sqrt{9\,x^2} . \sqrt{16\,y^2}$, *l)* $\sqrt[3]{8\,a^3} . \sqrt[3]{27\,c^3}$, *m)* $\sqrt[n]{3^n\,x^n} . \sqrt[n]{5^n\,y^n}$, *n)* $\sqrt{a^2\,b^2\,c^2 . d^2\,e^2\,f^2}$, *o)* $\sqrt[3]{(x\,y\,z)^3 . (5\,a)^3}$, *p)* $\sqrt[n]{a^n . b^n}$.

§ 59. Die Division mit allgemeinen Zahlen.

1. Der Bruch $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ zeigt an, wie oftmal b in a enthalten ist. Wäre $\frac{a}{b} = c$, so muß, dem Begriffe der Division entsprechend, $a = b . c$, also der Dividend gleich sein dem Produkte aus dem Divisor und dem Quotienten. Z. B. $\frac{8}{4} = 2$, folglich muß $4 . 2 = 8$ sein.

2. Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man nicht jeden der Faktoren, sondern nur **einen** derselben durch die Zahl dividiert. Es ist $(10 . 15) : 5 = \frac{10}{5} . 15 = \frac{15}{5} . 10 = 30$; Probe $30 . 5 = 10 . 15 = 150$, allgemein $(a . b) : c = \frac{a}{c} . b = \frac{b}{c} . a$.

Hieraus folgt, daß man ein Produkt durch einen seiner Faktoren dividiert, indem man den letzteren im Produkte einfach wegläßt. Z. B. $5\,x : x = 5 . \frac{x}{x} = 5 . 1 = 5$.***)

*) Den Potenzexponenten 1. z. B. a^1 läßt man stets weg und schreibt immer nur a.

**) Diese Anordnung ist deshalb richtig, weil ja die Reihenfolge der Faktoren gleichgiltig ist. Wir schreiben deshalb hier und in allen ähnlichen Fällen die gleichnamigen Faktoren immer nebeneinander und die Faktoren überhaupt in der Reihenfolge des Alphabetes.

***) Eine Zahl durch sich selbst dividiert gibt 1, also $2 : 2 = 1$; $a : a = 1$; $\frac{x}{x} = 1$.

3. Eine Zahl wird durch ein Produkt aus mehreren Faktoren dividiert, indem man sie vorerst durch einen, dann durch den 2ten, 3ten und jeden folgenden Faktor dividiert.

$\frac{280}{5 . 7 . 8} = [\underbrace{(280 : 5)}_{56} : 7] : 8 = [\underbrace{56 : 7}_{8}] : 8 = 8 : 8 = 1$; Probe $5 . 7 . 8 . 1 = 280$.

Allgemein: $a : (b . c) . = (a : b) : c$.

Enthält nach diesem Satze die durch ein Produkt zu dividierende Zahl mehrere Faktoren des ersteren, so können dieselben einfach weggelassen oder weggestrichen (gekürzt) werden. Es ist: $\frac{\overbrace{3 . 5 . 7}^{105} . 9}{\underbrace{3 . 5 . 7}_{105}} = \frac{105 . 9}{105} = 9$ (nach Satz 2), oder sofort $\frac{3 . 5 . 7 . 9}{3 . 5 . 7} = 9$

$\frac{4\,a\,b\,c\,d\,e}{a\,d\,e} = 4\,b\,c.$

4. Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und diese Differenz der Basis als Exponent gibt. $a^5 : a^2 = \frac{a . a . a . a . a}{a . a} = a^3 = a^{5-2}$; allgemein $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Durch Verbindung mit den Sätzen 2 und 3 wird erklärlich:

$$6\,a^6 : 3\,a^3 = 2\,a^3;\ 36\,m^3\,n^2\,o : 9\,m^2\,n\,o = 4\,m\,n.$$

5. Wurzelgrößen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die gleichnamige Wurzel aus dem Quotienten ihrer Radikanden zieht.

Z. B. $\sqrt{9} : \sqrt{16} = \sqrt{9 : 16} = \sqrt{0{\cdot}5625} = 0{\cdot}75$, denn $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $3 : 4 = 0{\cdot}75$. Allgemein $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$.

Aufgaben:

a) $6\,a : a = ?$ *b)* $12\,b : b = ?$ *c)* $18\,x\,y : 3\,x = ?$ *d)* $24\,a\,b\,c\,d : 6\,b\,a = ?$ *e)* $c^6 : c^2 = ?$ *f)* $a^3\,b^2 : a^2\,b = ?$ *g)* $28\,a^3\,b^2\,c : 14\,a^2\,b\,c = ?$ *h)* $m^5\,n^4\,o^3\,p^2 : m^4\,n^3\,o^2\,p = ?$ *i)* $18{\cdot}6\,x^5\,y^4\,z^3 : 3{\cdot}1\,x\,y^2\,z^3 = ?$ *k)* $5\frac{6}{7}\,a^2\,b : 2\frac{7}{9}\,a\,b = ?$ *l)* $\sqrt{16\,x^2} : \sqrt{64\,y^2} = ?$ *m)* $\sqrt[n]{a^n\,b^n} : \sqrt[n]{x^n\,y^n} = ?$ *n)* $\sqrt{a^2\,b^2\,c^2 : x^2\,y^2\,z^2} = ?$ *o)* $\sqrt[n]{(a\,b)^n : (c\,d)^n} = ?$

II. Kapitel.

Das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen. (Algebraische Zahlen.)

§ 60. Vorbegriffe.

Die Subtraktion wird bei Annahme der bisher kennen gelernten Zahlen zur Unmöglichkeit, wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend. Um die Subtraktion aber doch ausführen zu können, ist man genötigt, Zahlen anzunehmen, welche kleiner sind als Null. Zu diesen Zahlen gelangt man, wenn man die bereits bekannte natürliche Zahlenreihe 0, 1, 2, 3, 4 . . . usf., welche durch das fortgesetzte Hinzufügen der Einheit entstanden ist, in entgegengesetzter Richtung, von 0 ausgehend, durch fortwährendes Abziehen einer Einheit erweitert.

Bezeichnet man die Zahlen der ersten Zahlenreihe, welche durch das fortwährende Hinzuzählen der Einheit entstanden sind, mit +, so muß man die Zahlen der zweiten Reihe, welche durch fortwährendes Abziehen entstanden sind, mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen, und dieses ist —. Man nennt die ersteren positive, die letzteren negative Zahlen.

Diese Erweiterung des Zahlengebietes läßt sich auch durch nebenstehende Linie, welche in eine Anzahl gleicher Teile (Einheiten) geteilt ist, darstellen (Figur auf Seite 83).

Es bedeutet hienach z. B. $+5$, daß ich zu Null 5 positive Einheiten hinzuzuzählen habe, um auf $+5$ zu kommen, während -6 sagt, daß ich von Null 6 positive Einheiten abzuziehen habe, um -6 zu erhalten. Die Differenz $5-8$ zeigt an, daß ich von Null auf der Zahlenlinie um 5 Einheiten nach rechts fortzuschreiten und nun 8 Einheiten nach links zurückzugehen habe, wodurch ich links über 0 hinaus nach -3 komme; es ist daher $5-8=-3$ usw.

Die Zeichen $+$ oder $-$, welche man den Zahlen voransetzt, heißen Vorzeichen und geben an, ob die Zahl aus hinzuzuzählenden oder abzuziehenden Einheiten besteht. Zahlen, welche mit einem Vorzeichen versehen sind, nennt man algebraische Zahlen, zum Unterschiede von den ursprünglichen Zahlen, welche absolute Zahlen genannt werden. Es sind also $+5$, -3, oder $+a$, $-b$ algebraische Zahlen. Eine solche Zahl besteht aus dem Vorzeichen ($+$ oder $-$) und dem absoluten Werte oder Zahlenwerte, welcher entweder eine besondere oder eine allgemeine Zahl sein kann; z. B. $+7$, -7, oder bei allgemeinen Zahlen $+a$, $-a$. Das Vorzeichen $+$ kann der Kürze wegen bei einer positiven Zahl, welche für sich allein oder am Anfange eines mehrgliedrigen Zahlenausdruckes steht, weggelassen werden, das Vorzeichen $-$ dagegen muß bei einer negativen Zahl jederzeit angeschrieben werden. Man schreibt also $a-b$, und nicht $+a-b$.



Über den Begriff der algebraischen Zahlen möge für den Anfänger noch folgendes zur Erläuterung dienen:

Die positiven und negativen Zahlen verhalten sich zueinander wie die Richtungen vorwärts und rückwärts, aufwärts und abwärts, rechts und links, oder wie Vermögen und Schuld, Einnahme und Ausgabe usf. Wenn jemand in einer bestimmten Richtung 30 Schritte vorwärts und dann auf derselben Linie 25 Schritte rückwärts geht, so ist er doch nur um 5 Schritte vorwärts gekommen. Jemand hat $1\,K$ Vermögen und $5\,K$ Schulden und verwendet ersteres zur Zahlung seiner Schulden, so bleiben ihm doch noch $4\,K$ Schulden. Jemand nimmt $18\,K$ ein, und gibt $15^1/_2\,K$ aus, so bleiben ihm $2^1/_2\,K$ usf.

Das Rechnen mit algebraischen Zahlen bezeichnet man kurz auch als Algebra.

§ 61. Die Addition positiver und negativer Zahlen.

Bei Festhaltung der Begriffe „positive" und „negative" Zahlen in Form der Vorstellung von Vermögen und Schuld sind wohl unschwer folgende Schlüsse einzusehen.

1. Eine positive Zahl (Vermögen) wird durch Hinzuzählen von weiteren positiven Zahlen (Vermögen) um die absolute Größe dieser letzteren vermehrt; gibt man in derselben Weise zu einer negativen Zahl noch weitere negative Einheiten (also Schulden zu Schulden) hinzu, so wird die erstere in derselben Weise um die Anzahl der hinzugegebenen Einheiten vermehrt.

Es ist also:

$5 + (+3) = +(5+3) = +8$; allgemein $\boldsymbol{a} + (+\boldsymbol{b}) = +(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = +\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$*)
$(-5) + (-3) = -(5+3) = -8$; allgemein $(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$**)

Das Zeichen $+$, mit welchem hier die Zahlen 5 und $(+3)$, sowie die Zahlen (-5) und (-3) verbunden sind, gilt hier als Operations- (Rechnungs-) Zeichen, weil es die mit den genannten Zahlen vorzunehmende Rechnungsart, d. i. eine Addition, andeutet.

2. Eine positive Zahl (Vermögen) wird durch Hinzuzählen einer negativen Zahl (Schuld) um so viele Einheiten kleiner, als die negative Zahl Einheiten enthält. Ist in diesem Falle die negative Zahl (die Schuld) größer als die positive (das Vermögen), so kann nur eine negative Zahl (Schuld) übrig bleiben, die ebenso groß ist, wie der ziffermäßige Unterschied zwischen beiden Zahlen.

$5 + (-3) = +(5-3) = 5-3 = +2$; allgemein $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = +(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
$5 + (-8) = +(5-8) = 5-8 = -3$; allgemein $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = +(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} =$
$= -\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

*) Nach dem Satze 1 § 57 kann die Klammer, wenn vor derselben ein + Zeichen steht, ohne weiteres weggelassen werden.

**) Nach dem Satze 2 § 57 müssen die Zeichen, wenn vor einer Klammer ein — Zeichen steht, beim Weglassen der Klammer innerhalb dieser geändert werden.

Durch Vereinigung der unter 1. und 2. gemachten Schlüsse gelangt man weiter zu folgenden Begriffen und Folgerungen:

3. Eine Summe aus positiven und negativen Zahlen bezeichnet man als eine algebraische Summe. Dieselbe erscheint allgemein in der Form $(+a) + (+b) + (-c) + (+d) + (-e)$ und ist nach dem Satze 1 und 2 $= a + b - c + d - e$.

Hienach kann eine algebraische Summe als ein mehrgliedriger Ausdruck dargestellt werden, indem man die Additions-(Operations-)Zeichen wegläßt und die Vorzeichen als Operationszeichen ansieht. In der Regel stellt man die algebraische Summe auch nur in dieser Form dar.

Aufgaben:

a) $(+18) + (+5) = ?$ *b)* $(+18) + (-5) = ?$ *c)* $(+3xy) + (-xy) = ?$ *d)* $(+3xy) + (-2xy) = ?$ *e)* $(-7a) + (-3a) = ?$ *f)* $(-36ab) + (+27ab) = ?$ *g)* $(+3{\cdot}5x) + (-x) = ?$ *h)* $(-3{\cdot}5x) + (-x) = ?$ *i)* $6z + (-2z) = ?$ *k)* $\frac{1}{2}a^2 + (+\frac{3}{4}a^2) = ?$ *l)* $\frac{5}{6}x^2 + (-\frac{3}{11}x^2) = ?$ *m)* $(+15{\cdot}3x^2) + (+9{\cdot}2x^2) + (-16x^2) = ?$ *n)* $(+4a^4) + (+3a^2b) + (-2a^4) + (+5a^2b) + (1{\cdot}5a^4) = ?$ *o)* $-702{\cdot}13a + (+819{\cdot}92a) + (563{\cdot}09a) + (+85{\cdot}58a) = ?$ *p)* $(33 - 35) + (33 - 35) = ?$ *q)* $\left[-2{\cdot}5x + (+6\frac{2}{3}y)\right] + \left[-1\frac{3}{4}x + (-\frac{5}{3}y)\right] = ?$

§ 62. Die Subtraktion positiver und negativer Zahlen.

Hält man sich auch hier die Begriffe „positive" und „negative" Zahlen in Form von „Vermögen" und „Schuld" klar vor Augen, so werden folgende Schlüsse unschwer verständlich:

1. Eine positive Zahl (Vermögen) wird durch das Hinwegnehmen (Subtrahieren) von positiven Einheiten (Vermögen) um die absolute Größe dieser Einheiten vermindert. Es ist $8 - (+5) = +(8 - 5) = 8 - 5 = 3$; allgemein $\boldsymbol{a - (+b) = +(a - b) = a - b}$.

2. Eine positive Zahl (Vermögen) wird durch die Hinwegnahme von negativen Einheiten (Schulden) um die absolute Größe dieser letzteren vermehrt, denn das Subtrahieren (Wegnehmen) von Schulden bedeutet das Abzahlen derselben und ist also der Vermehrung des wirklichen Vermögens gleich.

$8 - (-3) = +(8 + 3) = 8 + 3$; allgemein $\boldsymbol{a - (-b) = +(a + b) = a + b}$.

3. Eine negative Zahl wird durch Hinwegnahme von positiven Einheiten in ihrem Sinne vergrößert, denn von einer Schuld ein weiteres Vermögen wegnehmen, heißt die Schuld vermehren.

Es ist $-8 - (+3) = -(8 + 3) = -8 - 3$; allgemein $\boldsymbol{-a - (+b) = -(a + b) = -a - b}$.

4. Eine negative Zahl wird durch Hinwegnahme von negativen Einheiten in ihrem absoluten Werte kleiner aus dem unter 2 erwähnten Grunde.

$-8 - (-3) = -(8 - 3) = -8 + 3$; allgemein $\boldsymbol{-a - (-b) = -(a - b) = -a + b}$.

Aus den Sätzen 1—4 folgt demnach die Regel: Zwei algebraische Zahlen werden subtrahiert, wenn man den Minuend unverändert läßt und den Subtrahend mit entgegengesetztem Vorzeichen als Operationszeichen hinzufügt.

Aufgaben:

a) $13 - (+6) = ?$ *b)* $15 - (-9) = ?$ *c)* $-26 - (+13) = ?$ *d)* $-33 - (-47) = ?$ *e)* $36a - (+27a) = ?$ *f)* $56b - (-27b) = ?$ *g)* $-58x - (+36x) = ?$ *h)* $-27{\cdot}5y - (-13{\cdot}8y) = ?$ *i)* $-15m - (+3{\cdot}5m) + (+9m) = ?$ *k)* $+117n - (-9n) - (-45n) + (-27n) = ?$ *l)* $\frac{3}{4}x - (+\frac{1}{2}x) + (-\frac{1}{4}x) - (+1\frac{1}{4}x) = ?$ *m)* $26ab + (-5ab) - (-16ab) = ?$

§ 63. Die Vereinigung von Addition und Subtraktion algebraischer Zahlen.

1. Nach § 61, Punkt 3 und § 62, Regel 1—4, ist der algebraische Ausdruck $(+a) + (+b) - (+c) + (-d) - (-e)$ sofort in einen mehrgliedrigen Ausdruck auflösbar, also $(+a) + (+b) - (+c) + (-d) - (-e) = a + b - c - d + e$.

2. Steht vor einer algebraischen Summe als zusammengehörigem Ganzen ein $+$ oder $-$Zeichen, so verwandelt man die algebraische Summe zunächst in einen

mehrgliedrigen Ausdruck und läßt die Klammern ohne weiteres weg, wenn ein + Zeichen vorsteht, oder ändert bei dem Weglassen der Klammern die Zeichen, wenn sich vor denselben ein — Zeichen befand.

Beispiele:

a) $(+15) + (-8) - (+6) - (-5) = 15 - 8 - 6 + 5 = 20 - 14$*) $= 6$.
b) $(+5a) + (-a) - (+3a) - (-4a) = 5a - a - 3a + 4a = 9a - 4a = 5a$.
c) $(+4{\cdot}3\,x) - (-2{\cdot}1\,y) + (-2{\cdot}9\,x) - (+1{\cdot}3\,y) = 4{\cdot}3\,x + 2{\cdot}1\,y - 2{\cdot}9\,x - 1{\cdot}3\,y =$
$= 4{\cdot}3\,x - 2{\cdot}9\,x + 2{\cdot}1\,y - 1{\cdot}3\,y = 1{\cdot}4\,x + 0{\cdot}8\,y$.
d) $(+15) + (-9) + \{(+6) + (-4) - (-8) + (-6)\} = 15 - 9 + \{6 - 4 + 8 - 6\} =$
$= 15 - 9 + 6 - 4 + 8 - 6 = 29 - 19 = 10$.
e) $(+3m^2) - \left[(-2m^2) + (+4n) - (+2n) - (-4m^2)\right] = 3m^2 - \left[-2m^2 + 4n -\right.$
$\left.- 2n + 4m^2\right] = 3m^2 + 2m^2 - 4n + 2n - 4m^2 = 5m^2 - 4m^2 + 2n - 4n = m^2 - 2n$.

Aufgaben:

$$a)\ \left(+35\tfrac{2}{5}\right) - \left(+24\tfrac{1}{2}\right) - \left(+71\tfrac{3}{8}\right) - \left(+80\tfrac{3}{5}\right) = ?$$

b) $(7 - 21) - (11 - 7) + (14 - 3) - (28 - 38) = ?$ *c)* $5a^2b - 4c - (3a^2b + 3c) = ?$

$$d)\ 5ax - (+x^2) - (+3a) - (+9) - \left[3ax + (+x^2) + (+3a) - (+5b)\right] = ?$$

e) $a + \left[a + (-b) + (-c) - (+d)\right] = ?$ *f)* $2b - c - \left[26 - \{2b - 3c - (2b + 3c)\}\right] = ?$

$$g)\ \left[-2\tfrac{1}{2} + \left(+6\tfrac{2}{3}\right)\right] - \left[-1\tfrac{3}{4} + \left(-\tfrac{5}{3}\right)\right] = ?$$

$$h)\ \tfrac{1}{2}x - \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}x\right) - \left[\left(\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{3}x\right) - \left(\tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{4}x\right)\right] = ?$$

$$i)\ 4x^2 - (2x^2 - 9y) - \left[6x^2 + 3y - (4x^2 - 5y)\right] = ?$$

§ 64. Die Multiplikation algebraischer Zahlen.

1. Eine algebraische Zahl mit einer zweiten algebraischen Zahl multiplizieren heißt den Multiplikand so oftmal im positiven oder negativen Sinne als Addend setzen, als es der absolute Wert des Multiplikators anzeigt. Es können hiebei vier Fälle eintreten, und zwar:

a) Multiplikand und Multiplikator sind positiv,
b) der Multiplikand ist positiv, der Multiplikator ist negativ,
c) der Multiplikand ist negativ, der Multiplikator positiv, und
d) beide Faktoren sind negativ.

Nach dem Begriffe der Multiplikation ist demnach:

$(+8) \cdot (+4) = (+8) + (+8) + (+8) + (+8) = +8 + 8 + 8 + 8 = +(4 \cdot 8)$.
$(+8) \cdot (-4) = \big(-(+8)\big) + \big(-(+8)\big) + \big(-(+8)\big) + \big(-(+8)\big) = (-8) + (-8) +$
$+ (-8) + (-8) = -8 - 8 - 8 - 8 = -(4 \cdot 8)$.
$(-8) \cdot (+4) = (-8) + (-8) + (-8) + (-8) = -8 - 8 - 8 - 8 = -(4 \cdot 8)$.
$(-8) \cdot (-4) = \big(-(-8)\big) + \big(-(-8)\big) + \big(-(-8)\big) + \big(-(-8)\big)$**) $= (+8) + (+8) +$
$+ (+8) + (+8) = +8 + 8 + 8 + 8 = +(4 \cdot 8)$.

Daher allgemein:

$$(+a) \cdot (+b) = +ab \qquad (-a) \cdot (+b) = -ab$$
$$(+a) \cdot (-b) = -ab \qquad (-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Wir haben daher folgende Regel: **Zwei gleichbezeichnete Faktoren geben miteinander multipliziert ein positives, zwei ungleichbezeichnete hingegen ein negatives Produkt.**

---

*) Über das Reduzieren vgl. § 56, 3., Seite 80.

**) Diesen Fall kann man auch wie folgt erklären: Denken wir uns in dem Produkte $(-8) \cdot (-4)$ beim Multiplikator das Minuszeichen weg, so haben wir $(-8) \cdot 4 = -8 \cdot 4 = -32$. Wird aber vor die 4 noch ein Minuszeichen gesetzt, so heißt das, daß das gewonnene Produkt negativ zu nehmen ist, also $-(-32) = +32$.

Beispiele:

a) $3a \,.\, 4a$*) $= 12a^2$. *b)* $5x^2 \,.\, -6xy = -30x^3y$. *c)* $-1{\cdot}3\,a^2m \,.\, 2m = -2{\cdot}6\,a^2m^2$.
d) $-\frac{1}{2}a^2 \,.\, -\frac{3}{4}a^3 = +\frac{3}{8}a^5$.

2. Eine algebraische Summe (oder der entsprechende mehrgliedrige Ausdruck) wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied derselben mit der Zahl multipliziert.

Der Beweis dieser Regel wird durch die folgenden Beispiele leicht erbracht.

$$(12+6) \,.\, 3 = (12+6)+(12+6)+(12+6) = 12+6+12+6+12+6 = 3 \,.\, 12 + 3 \,.\, 6 = \\ = 36 + 18 = 54.$$

$$(a+b+c) \,.\, 2 = (a+b+c)+(a+b+c) = a+b+c+a+b+c = a+a+b+b+c+ \\ + c = 2a + 2b + 2c.$$

$$(m+n-o-p) \,.\, 3 = (m+n-o-p)+(m+n-o-p)+(m+n-o-p) = m+n-o- \\ -p+m+n-o-p+m+n-o-p = m+m+m+n+n+n-o-o-o-p-p- \\ -p = 3m+3n-3o-3p.$$

Man sagt also unmittelbar: $(4x+2y-3z) \,.\, -2x = -8x^2 - 4xy + 6xz$; $5x^2 \,.\, (1 - 3x^2 + 4x^3) = 5x^2 - 15x^4 + 20x^5$.

3. Zwei mehrgliedrige Ausdrücke werden miteinander multipliziert, indem man unter Beachtung der Vorzeichen jedes Glied des Multiplikands mit jedem Gliede des Multiplikators multipliziert.

Wird in $\underbrace{(a+b)}_{m} \,.\, (c+d)$ der Multiplikand vorläufig mit m bezeichnet, so erhalten wir $m \,.\, (c+d) = mc + md$. Setzen wir nun statt m den entsprechenden Wert $(a+b)$ ein, so ist $mc + md = (a+b) \,.\, c + (a+b) \,.\, d = ac + bc + ad + bd$. Man hat sonach $(a+b) \,.\, (a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Bei solchen Multiplikationen schreibt man die gleichnamigen Größen gewöhnlich untereinander und hat dann:

	$(a+b) \,.\, (a+b)$, ferner	$(a-b) \,.\, (a-b)$ oder	$(a+b) \,.\, (a-b)$
$(a+b) \,.\, a$	$a^2 + ab$	$a^2 - ab$	$a^2 + ab$ **)
$(a+b) \,.\, b$	$+ ab + b^2$	$- ab + b^2$	$- ab - b^2$
	$a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 \quad - \quad b^2$.

Auf dieselbe Art erhält man $(a+b) \,.\, (a+b) \,.\, (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \,.\, (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Aufgaben:

a) $9a \,.\, +6b = ?$ *b)* $-15c \,.\, +3{\cdot}5\,d = ?$ *c)* $16\frac{1}{3}e \,.\, -\frac{1}{[illegible]}f = ?$ *d)* $\frac{15}{27}x \,.\, -\frac{23}{25}x = ?$
e) $(48m + 17n) \,.\, 4o = ?$ *f)* $(12\frac{1}{2}a - 7\frac{1}{5}b) \,.\, -\frac{7}{8}c = ?$ *g)* $(19x + 15y) \,.\, (\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y) = ?$
h) $(36a - 27b) \,.\, (5c + 3b) = ?$ *i)* $(3\frac{3}{4}m - 5\frac{3}{5}n) \,.\, (6\frac{1}{2}m - 7\frac{3}{10}n) = ?$ *k)* $[12a + (-9b)] \,.\, [5a - (-6c)] = ?$ *l)* $(a-1) \,.\, (a-4) \,.\, (a-7) \,.\, (a-10) = ?$ *m)* $(2a - b) \,.\, (4a + 3b) \,.\, (6a - 5b) = ?$ *n)* $(13x + 5y + 7z) \,.\, (16x - 3y) = ?$ *o)* $(36a^2 + 36ab + 9b^2) \,.\, (6a - 3b) = ?$ *p)* $(y^2 + 2yz + z^2) \,.\, (y^2 - 2yz + z^2) = ?$ *q)* $(a^2 - b^2) \,.\, (a^2 - b^2) \,.\, (a^2 - b^2) = ?$
r) $(M^2 - m^2) \,.\, (M^2 + m^2) = ?$

§ 65. Die Division algebraischer Zahlen.

1. Zwei algebraische Zahlen durch einander dividieren heißt untersuchen, wie oft der Divisor im Dividende enthalten ist. Es muß also das Produkt aus dem Quotienten mit dem Divisor gleich sein dem Dividend.

Auch bei der Division kommen dieselben vier Fälle wie bei der Multiplikation (§ 64) in Betracht:

---

*) Hier kommen selbstredend außer der Beachtung des Vorzeichens des Produktes noch die Regeln für die Multiplikation allgemeiner Zahlen zur Anwendung.

**) $+ab$ und $-ab$ geben addiert 0, „sie heben sich auf".

$(+8):(+4) = +2$; denn $(+4).(+2) = +8$; allgemein $\frac{(+ab)}{(+a)} = +b$

$(+8):(-4) = -2$; denn $(-4).(-2) = +8$; allgemein $\frac{(+ab)}{(-a)} = -b$

$(-8):(+4) = -2$; denn $(+4).(-2) = -8$; allgemein $\frac{(-ab)}{(+a)} = -b$

$(-8):(-4) = +2$; denn $(-4).(+2) = -8$; allgemein $\frac{(-ab)}{(-a)} = +b$.

Daraus folgt die Regel: Gleichbezeichnete Größen durch einander dividiert ergeben positive Quotienten, ungleichbezeichnete Größen durch einander dividiert ergeben negative Quotienten.

Beispiele:

$+42 : +7 = +6$; $8x^2 : -2x = -4x$; $-12m^3x^2 : +6m = -2m^2x^2$;
$-3{\cdot}5x^3y^2z^2 : -0{\cdot}7xyz = +5x^2yz$.

2. Eine algebraische Summe oder der ihr entsprechende mehrgliedrige Ausdruck wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied des ersteren durch die Zahl dividiert und hiebei die bezüglichen Vorzeichen genau berücksichtigt.

Es ist hienach $(8 + 24 + 56) : 8 = \frac{8}{8} + \frac{24}{8} + \frac{56}{8} = 1 + 3 + 7$; dieses Ergebnis ist richtig, denn wir haben $(1 + 3 + 7).8 = 8 + 24 + 56$.

Allgemein ist $(am + bm + cm) : m = a + b + c$, denn es ist $(a + b + c).m = am + bm + cm$.

Beispiele:

$(6xyz + 4xy - 2y) : 2y = 3xz + 2x - 1$.
$(-4a^2 + 3a^2b - 2ab) : -2a = 2a - \frac{3}{2}ab + b$.

3. Eine algebraische Zahl oder der ihr entsprechende mehrgliedrige Ausdruck wird durch ein Binom dividiert, indem man vorerst die Glieder des Dividends und des Divisors gleichartig*) ordnet und hierauf das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors dividiert. Der so erhaltene Teilquotient ist das erste Glied des Quotienten. Sodann wird das Produkt aus diesem Teilquotienten und dem ganzen Divisor vom Dividend subtrahiert, der Rest aber um das nächste Glied des Dividends vermehrt. Nun untersucht man abermals, wie oft das erste Glied des Divisors in dem ersten Gliede dieses Teildividends enthalten ist und verfährt fortgesetzt wie vorhin. Z. B.

$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b$, oder $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b$.

$a^2 + ab \,..\, (a + b).a$ — $a^2 + ab \,..\, (a + b).a$

$ab + b^2$ — $-ab - b^2$

$+ ab + b^2 \,..\, (a + b).b$ — $-ab - b^2 \,..\, (a + b).-b$

Aufgaben:

a) $6a : 3 = ?$ *b)* $15a : 5a = ?$ *c)* $36ab : 3b = ?$ *d)* $24a^2b^2 : 3ab = ?$ *e)* $+18a^2b^2c^2 : -2abc = ?$ *f)* $6\frac{3}{4}ab^2 : 2\frac{1}{3}ab = ?$ *g)* $(16ab - 14a) : 2a = ?$ *h)* $(a^2 + 6a^4b + 9a^6b^2) : a^2 = ?$ *i)* $(15xyz - 30xy + 25xz) : -5x = ?$ *k)* $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = ?$ *l)* $(x^2 - y^2) : (x - y) = ?$ *m)* $(25a^2 - 16) : (5a - 4) = ?$ *n)* $(a^2 - 9b^2) : (a - 3b) = ?$

Zusatz. **Das Zerlegen allgemeiner und algebraischer Zahlenausdrücke in Faktoren.**

1. In einem eingliedrigen Zahlenausdrucke stellen die einzelnen Buchstaben die Faktoren dar. Z. B. $abc = a.b.c$; $a^2b^2c^3 = a.a.b.b.c.c.c$; $12b^2c^2 = 2.2.3.b.b.c.c$.

2. Enthalten alle Glieder eines mehrgliedrigen Zahlenausdruckes ein gemeinsames Maß, so ist dieses der eine Faktor eines Polynoms, während der andere sich in dem Quotienten aus dem ganzen Polynom, dividiert durch das gemeinsame Maß, ergibt. Wird diese Operation an einem Ausdrucke ausgeführt, so nennt man dies das Herausheben eines gemeinsamen Faktors. Z. B. $18ab - 6ac = 6a.(3b - c)$.

*) Vgl. § 58, Punkt 5.

Ebensogut kann man aber auch aus der algebraischen Summe $-8x^2 - 12x^3y - 6x^4y^2 - 20x^5y^3$ den gemeinsamen Faktor $-2x^2$ herausheben; man erhält sonach $-2x^2 . (4 + 6xy + 3x^2y^2 + 10x^3y^3)$.

Weiters erhält man durch Zerlegung in 2 Faktoren:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 = (a+b).(a+b) \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b).(a-b) \\ a^2 - b^2 \qquad\quad\; = (a+b).(a-b) \end{array}\right\}$$ denn die Multiplikation dieser Faktoren ergibt die linksstehenden Ausdrücke.

Aufgaben. Es sind in Faktoren zu zerlegen:

a) xyz; $24ab$; $16a^2b$; $27x^2y^2$; $12mn^2x^3$; $13ab^2c^3$.

Es sind in 2 Faktoren zu zerlegen:

b) $9xy + 27y^2$; *c)* $25a^2 + 30ab + 9b^2$; *d)* $4a^2 - b^2$; *e)* $m^2 - n^2$.

III. Kapitel.

Das Wesentlichste über das Rechnen mit gebrochenen allgemeinen Zahlen.

§ 66.

Eine gebrochene allgemeine Zahl stellt man in derselben Weise wie einen Bruch mit besonderen Zahlen dar. Es ist sonach $\frac{a}{b}$ ein Bruch, dessen Nenner b und dessen Zähler a ist.

Eine gemischte allgemeine Zahl stellt aber nicht wie bei besonderen Zahlen immer eine Summe dar, wie z. B. $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$, oder allgemein $a + \frac{b}{c}$, sondern es sind hier auch noch 3 andere Fälle möglich, nämlich $a - \frac{b}{c}$, $-a + \frac{b}{c}$, $-a - \frac{b}{c}$.

Die Rechnungsoperationen mit gebrochenen allgemeinen Zahlen sind dieselben wie bei gemeinen Brüchen mit besonderen Zahlen.

1. Das Addieren der Brüche.

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5}$; allgemein $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

b) $2 + \frac{2}{5} = \frac{2.5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2.5+2}{5}$; allgemein $a + \frac{c}{b} = \frac{a.b}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a.b+c}{b}$.

c) $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3.2}{5.2} + \frac{1.5}{2.5} = \frac{3.2+5.1}{5.2}$; allgemein $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} + \frac{b.c}{b.d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Aufgaben:

a) $\frac{a}{x} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x} = ?$; *b)* $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = ?$; *c)* $\frac{a+b}{2c} + \frac{a-b}{2c} = ?$;

d) $2x + \frac{3a}{x} = ?$; *e)* $1 + \frac{a+b}{a-b} = ?$; *f)* $2a + 3 + \frac{1}{5c} = ?$;

g) $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{4}{d} = ?$; *h)* $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5} = ?$; *i)* $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = ?$;

k) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a-2} + \frac{3}{a-4} = ?$; *l)* $\frac{13-x}{16-x} + \frac{3}{4} = ?$; *m)* $\frac{11-3x}{3} + 5x = ?$.

2. Das Subtrahieren der Brüche.

a) $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3-2}{5}$; allgemein $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

b) $2 - \frac{3}{5} = \frac{2.5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2.5-3}{5} = \frac{10-3}{5}$; allgemein $a - \frac{c}{b} = \frac{ab}{b} - \frac{c}{b} = \frac{ab-c}{b}$.

c) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3.5}{4.5} - \frac{2.4}{5.4} = \frac{3.5-2.4}{4.5}$; allgemein $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$.

Beispiele und Aufgaben:

a) $\frac{3a-2b}{c} - \frac{a-b}{c} = ?$; b) $\frac{a+b}{2m} - \frac{a-b}{2m} = ?$; c) $\frac{x+y}{x^2-y^2} - \frac{x-y}{x^2-y^2} = ?$.

d) $-3a + \frac{2b}{c} = \frac{-3ac}{c} + \frac{2b}{c} = \frac{-3ac+2b}{c} = -\frac{3ac-2b}{c}$;

e) $-5x + \frac{6y}{3} + 4z = ?$;

f) $-7m - \frac{n}{4} = \frac{-7m.4}{4} - \frac{n}{4} = \frac{-28m-n}{4} = -\frac{28m+n}{4}$;

g) $-1 - \frac{x}{y^2 z} = ?$ h) $\frac{y}{3} - \frac{y}{2} = ?$ i) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} = ?$

k) $\frac{3a-2}{5+a} - \frac{6-a}{1+3a} + \frac{7a-12}{1-a} = ?$

3. Das Multiplizieren der Brüche.

a) $\frac{1}{2} . 3 = \frac{1.3}{2}$; allgemein $\frac{a}{b} \times c = \frac{a.c}{b} = \frac{ac}{b}$.

b) $\frac{3}{4} . 2 = \frac{3}{2} . 1 = \frac{3}{2}$; allgemein $\frac{4a}{9cd} \times 3d = \frac{4a}{3c}$, oder $\frac{4a.\cancel{3d}}{\underset{3}{\cancel{9}cd}} = \frac{4a}{3c}$.

c) $\frac{3}{4} . \frac{5}{7} = \frac{3.5}{4.7} = \frac{15}{28}$; allgemein $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} = \frac{ac}{bd}$.

Aufgaben:

a) $\frac{3xyz}{4a} . 5x = ?$ b) $-\frac{3abc}{5x} . +6d = ?$ c) $\frac{a^2b^2c^2}{m} . -d = ?$

d) $(a^2+b^2) . -\frac{a^2-b^2}{a-b} = ?$ e) $-\frac{3a}{4b} . -\frac{5c}{7d} . +\frac{8e}{9f} = ?$

f) $\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3}\right) . \left(\frac{4}{a^4} - \frac{5}{a^5}\right) = ?$ g) $\left(-\frac{7-5x}{12} + \frac{5x-11}{8}\right) . -\frac{-7x-14}{3} = ?$

h) $\frac{6x+3}{3x+4} . -\frac{5x-8}{10x+1} = ?$ i) $\left(\frac{17x-5}{5.(3x+1)} - \frac{7x-3}{3x-1}\right) . +\frac{2(3x+1)}{13x-1} = ?$

4. Das Dividieren der Brüche.

a) $\frac{3.4}{5} : 4 = \frac{3.4:4}{5} = \frac{3}{5}$; allgemein $\frac{ab}{c} : b = \frac{a}{c}$.

b) $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4.5} = \frac{3}{20}$; allgemein $\frac{4ab}{3cd} : 5e = \frac{4ab}{3cd.5e} = \frac{4ab}{15cde}$.

c) $8 : \frac{3}{5} = 8 . \frac{5}{3} = \frac{8.5}{3} = \frac{40}{3}$; allgemein $a : \frac{b}{c} = a . \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$.

d) $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} . \frac{7}{5} = \frac{3.7}{4.5} = \frac{21}{20}$; allgemein $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Aufgaben:

a) $-\frac{18xy^2}{16ab} : +6x = ?$ b) $\frac{12abc}{3xy} : -4ab = ?$ c) $-\frac{8x^2y^3z^4}{14} : -2xy^2z^3 = ?$

d) $\left(\frac{9x}{4} + 13\right) : 25 = ?$ e) $\left(\frac{x}{a+b} + \frac{x}{a-b}\right) : 2a = ?$ f) $\left(\frac{19-y}{2} + y\right) : 3 = ?$

g) $\frac{3a(2a-3b)}{2(5a-x)} : \frac{6a+15b}{8} = ?$ h) $\left(\frac{7x-5}{6} - 2\right) : \frac{7}{8} = ?$ i) $\left(\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4}\right) :$ $: \frac{5x}{6} = ?$ k) $\frac{x-1}{x+1} : \frac{x+1}{x-1} = ?$

5. Das Potenzieren der Brüche.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16} = 0{\cdot}5625$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0{\cdot}75^2 = 0{\cdot}5625$; allgemein $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$;

b) $\frac{3^2}{4^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0{\cdot}75^2 = 0{\cdot}5625$; allgemein $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Aufgaben:

a) [illegible] $= ?$ b) $\left(\frac{13}{[illegible]}\right)^2 = ?$ c) $\left(\frac{0{\cdot}5\,[illegible]}{0{\cdot}7\,[illegible]}\right)^2 = ?$ d) $\left(\frac{3\,a}{4\,b}\right)^2 + \left(\frac{5\,[illegible]}{6\,[illegible]}\right)^2 - \left(\frac{7\,[illegible]}{8\,[illegible]}\right)^2 = ?$ e) [illegible] $= ?$

$$f)\ \frac{4\,x^2\,y^2}{9\,y^2} = ? \qquad g)\ \frac{9\,a^2}{16\,b^2} + \frac{25\,c^2}{36\,d^2} + \frac{49\,e^2}{64\,f^2} = ?$$

6. Das Radizieren (Wurzelziehen) der Brüche.

$$a)\ \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4};\ \text{allgemein}\ \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a}{b};$$

oder umgekehrt:

$$b)\ \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{0{\cdot}64} = 0{\cdot}8;\ \text{allgemein}\ \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{(a^2 : b^2)} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}.$$

Aufgaben:

$$a)\ \sqrt{\frac{2\,a}{3\,b^3}} = ? \quad \sqrt{\frac{x^2}{4}} = ? \quad \sqrt{\frac{x^2\,y^2}{a^4\,b^4}} = ? \quad \sqrt{\frac{0{\cdot}86\,a^2}{0{\cdot}98\,b^2}} = ?$$

$$\frac{\sqrt{a^n}}{[illegible]} = ? \quad \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^6}} = ? \quad \frac{\sqrt{36\,a^2\,b^2\,c^4}}{\sqrt{64\,x^2\,y^4\,z^6}} = ?$$

IV. Kapitel.

Das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzel, dann das Kubieren und das Ausziehen der Kubikwurzel mit allgemeinen Zahlen.

§ 67. Das Quadrieren.

Das Quadrat der Zahl a ist gegeben durch die Bezeichnung a^2, das Quadrat des Binoms $a + b$ durch die Bezeichnung $(a + b)^2$.

Es ist $(a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b) = a^2 + 2\,a\,b + b^2$. Das Quadrat eines Binoms ist hienach gleich dem Quadrate des ersten Gliedes, mehr dem doppelten Produkte aus dem ersten und zweiten Gliede, mehr dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Ist das Trinom $a + b + c$ zu quadrieren, so kann man nach der eben aufgestellten Regel verfahren, indem man sich die Glieder $a + b$ in ein Glied vereinigt denkt. Sonach ist

$$(a + b + c)^2 = \Big\{(a + b) + c\Big\}^2 = (a + b)^2 + 2\,(a + b) \,.\, c + c^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 + 2\,(a + b) \,.\, c + c^2.$$

Beim Quadrieren eines viergliedrigen Zahlenausdruckes erhalten wir unter Beobachtung eines ähnlichen Vorganges:

$$(a + b + c + d)^2 = \Big\{(a + b + c) + d\Big\}^2 = (a + b + c)^2 + 2\,(a + b + c) \,.\, d + d^2 = a^2 + 2ab + $$
$$+ b^2 + 2\,(a + b) \,.\, c + c^2 + 2\,(a + b + c) \,.\, d + d^2.$$

Aus diesem Ausdrucke läßt sich eine Regel für die Bildung des Quadrates einer mehrzifferigen Zahl herleiten, wenn man sich unter $a + b + c + d$ eine nach dem dekadischen Zahlensysteme gebaute Zahl Z vorstellt, deren Ziffern A, B, C, D (also z. B. $a = A \,.\, 10^3$, $b = B \,.\, 10^2$, $c = C \,.\, 10$, $d = D$) sind.

Diese Zahl ist alsdann anzuschreiben:

$Z = A \,.\, 10^3 + B \,.\, 10^2 + C \,.\, 10 + D$. (Z. B. $2378 = 2 \,.\, 10^3 + 3 \,.\, 10^2 + 7 \,.\, 10 + 8$).

Das Quadrat von Z ist:

$$Z^2 = A^2 \,.\, 10^6 + 2\,A\,B \,.\, 10^5 + B^2\,10^4 + 2\,(A \,.\, 10^3 + B \,.\, 10^2)\,C \,.\, 10 + C^2 \,.\, 10^2 + 2\,(A \,.\, 10^3 +$$
$$+ B \,.\, 10^2 + C \,.\, 10)\,D + D^2 =$$
$$= A^2 \,.\, 10^6 + [20\,A + B]\,B \,.\, 10^4 + [20\,(A \,.\, 10 + B) + C]\,C \,.\, 10^2 + [20\,(A \,.\, 10^2 + B \,.\, 10 +$$
$$+ C) + D]\,D.$$

Wird dieser letzte Ausdruck für Z^2 in Worte gekleidet, indem hiebei berücksichtigt wird, daß die Potenzen von 10 die Stellenwerte der einzelnen Posten bezeichnen, so ergibt sich folgende Regel für die Bildung des Quadrates einer mehrziffrigen Zahl:

Zuerst wird das Quadrat der höchsten Ziffer der Basis gebildet. Alsdann wird jede folgende Ziffer der Basis mit einer Zahl multipliziert, welche die Summe aus dieser folgenden Ziffer und dem Zwanzigfachen des ihr vorausgehenden Basisteiles ist. Das Quadrat der höchsten Ziffer und die Produkte werden der Reihe nach um je 2 Stellen weiter nach rechts angeschrieben und addiert. Z. B.:

$$2378^2 = ?$$

$$\begin{array}{lll} & & 2^2 = 4 \\ 3 + 20 \times 2 = 43, & \ldots & 43 \times 3 = 129 \\ 7 + 20 \times 23 = 467, & \ldots & 467 \times 7 = 3269 \\ 8 + 20 \times 237 = 4748 & \ldots & 4748 \times 8 = 37984 \\ & & 5{,}654.884 = 2378^2. \end{array}$$

Beispiele:

$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,.-b + (-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2.$*)

$(3\,x - y)^2 = (3\,x)^2 + 2\,.\,3\,x\,.-y + (-y)^2 = 9\,x^2 - 6\,x\,y + y^2.$

$(x - 2y + 3z)^2 = (x - 2y)^2 + 2\,(x - 2y)\,.\,3z + (3z)^2 = x^2 + 2x\,.\,(-2y) + (-2y)^2 +$
$+ 6\,x\,z - 12\,y\,z + 9\,z^2 = x^2 - 4\,x\,y + 4\,y^2 + 6\,x\,z - 12\,y\,z + 9\,z^2.$

Aufgaben:

a) $(x + 1)^2$; $(x - 1)^2$; $(3\,a + 4\,b)^2$, $\left(\frac{3x}{4} - \frac{5y}{6}\right)^2$.

b) $(a + 2\,b + 3\,c)^2$; $(x - 2\,y - 32)^2$; $(2\,a + 4\,b - 6\,c)^2$.

c) $(m + 2\,n + 3\,o + 4\,p)^2$; $(5\,x - 3\,y + 4\,z - 6\,n)^2$.

§ 68. Das Quadratwurzelziehen.

Hat man aus einem geordneten mehrgliedrigen Ausdrucke die Quadratwurzel zu ziehen, d. i. eine Zahl zu finden, welche, mit sich selbst multipliziert, den gegebenen mehrgliedrigen Ausdruck (Radikand) gibt, so muß man das Verfahren beim Quadrieren umkehren. Hienach ist in dem Beispiele

$$\begin{array}{l} \sqrt{a^2 + 2\,a\,b + b^2} = a + b. \\ -a^2 \\ \hline = \quad + 2\,a\,b + b^2 \ldots + 2\,a\,b : + 2\,a = + b. \\ \quad\; + 2\,a\,b + b^2 \\ \quad\; - \qquad\;\; - \\ \hline \quad\; = \qquad\;\; = \end{array}$$

das erste Glied des Radikanden das Quadrat des ersten Gliedes der Wurzel; letztere ist daher $\sqrt{a^2} = a$. Subtrahiert man nun das Quadrat des ersten Gliedes der Wurzel, so enthält das erste Glied des Restes $2\,a\,b + b^2$ das doppelte Produkt aus dem ersten und zweiten Gliede, und das zweite Glied des Restes das Quadrat des zweiten Gliedes der Wurzel. Es ist daher $2\,a\,b : 2\,a = b$, d. i. dem zweiten Gliede der Wurzel. Alsdann wird das doppelte Produkt aus dem ersten und zweiten Gliede und das Quadrat des zweiten Gliedes gebildet und subtrahiert. Wären noch mehrere Glieder im Radikand vorhanden, so müßte das Verfahren im Sinne des Quadrierens fortgesetzt, also der verbleibende Rest durch das doppelte Produkt aus den beiden ersten Gliedern der Wurzel dividiert werden, um das dritte Glied der Wurzel zu erhalten usw.

Hieraus ist die Regel für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einer dekadischen Zahl leicht zu erkennen.

Aufgaben:

a) Erhebe zum Quadrat $(3\,a - 4\,b)$, $(a^2 + 1)$, $(2\,a + 3\,b - 4\,c)$, und ziehe aus jedem Resultate die Quadratwurzel.

b) $\sqrt{a^2 - 2\,a\,b + b^2}$; *c)* $\sqrt{9\,x^2 - 6\,x\,y + y^2}$; *d)* $\sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2 + 6xz - 12yz + 9z^2}$.

§ 69. Das Kubieren.

Der Kubus der Zahl a ist a^3, der Kubus eines Binoms $a + b$ ist $(a + b)^3$; $(a + b)^3 = (a + b)\,.\,(a + b)\,.\,(a + b) = (a + b)^2\,.\,(a + b) = (a^2 + 2\,a\,b + b^2)\,.\,(a + b) =$

$$\begin{array}{l} (a^2 + 2\,a\,b + b^2)\,.\,(a + b) \\ \hline a^3 + 2\,a^2 b + \quad a\,b^2 \\ \qquad\quad a^2 b + 2\,a\,b^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3, \text{ also } (a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3. \end{array}$$

---

*) Denn $(-b)\,.\,(-b) = + b^2$.

Der Kubus eines Binoms ist sonach gleich dem Kubus des ersten Gliedes, mehr dem dreifachen Produkte aus dem Quadrate des ersten Gliedes mit dem zweiten Gliede, mehr dem dreifachen Produkte aus dem ersten Gliede mit dem Quadrate des zweiten Gliedes, mehr dem Kubus des zweiten Gliedes.

Ist der Kubus des Trinoms $a + b + c$ zu bilden, so erhält man denselben nach vorstehender Regel, indem man $(a + b)$ als das erste und $+ c$ als das zweite Glied eines Binoms betrachtet. Es ist sonach $(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3\,(a + b)^2 . c + 3\,(a + b) . c^2 + c^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2 . c + 3\,(a + b) . c^2 + c^3$.

Stellt man sich unter $a + b + c$ eine nach dem dekadischen Zahlensysteme gebaute Zahl vor, so ergibt sich aus dem obigen Ausdrucke für $(a + b + c)^3$ folgende Regel für die Bildung des Kubus einer mehrziffrigen Zahl:

Zuerst wird der Kubus der höchsten (linken) Ziffer der Basis gebildet. Jede folgende Basisziffer gibt 3 Bestandteile: 1. Das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl, multipliziert mit dieser Basisziffer, 2. die dreifache vorangehende Zahl, multipliziert mit dem Quadrate dieser Basisziffer, 3. den Kubus dieser Basisziffer. Diese Bestandteile werden so untereinander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert. Z. B.:

$$248^3 = ?$$

2^3	8
$3 \times 2^2 \times 4$	48
$3 \times 2 \times 4^2$	96
4^3	64
$3 \times 24^2 \times 8$	13824
$3 \times 24 \times 8^2$	4608
8^3	512
	$15.252.992 = 248^3$.

Beispiele:

$$(a - b)^3 = a^3 + 3 . a^2 . - b + 3 . a . (- b)^2 + (- b)^3 = a^3 - 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 - b^3.$$

$$(2\,a - 3\,b)^3 = (2\,a)^3 + 3 . (2\,a)^2 . - 3\,b + 3 . 2\,a . (- 3\,b)^2 + (- 3\,b)^3 = 8\,a^3 - 36\,a^2 b + \\ + 54\,a\,b^2 - 27\,b^3.$$

$$(x + 2\,y - 3\,z)^3 = (x + 2\,y)^3 + 3 . (x + 2\,y)^2 . - 3\,z + 3\,(x + 2\,y) . (- 3\,z)^2 + (- 3\,z)^3 = x^3 + \\ + 3 . x^2 . + 2\,y + 3 . x . (+ 2\,y)^2 + (+ 2\,y)^3 + (x^2 + 4\,x\,y + 4\,y^2) . - 9\,z + (3x + 6\,y) . + 9\,z^2 + \\ + (- 27\,z^3) = x^3 + 6\,x^2 y + 12\,x\,y^2 + 8\,y^3 - 9\,x^2 z - 36\,x\,y\,z - 36\,y^2 z + 27\,x\,z^2 + 54\,y\,z^2 \\ - 27\,z^3.$$

Aufgaben:

a) $(x + 1)^3$; $(a - 1)^3$; $(3\,x + y)^3$; $(z + 4\,u)^3$; $(y - 4)^3$; $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{8}\right)^3$.

b) $(4\,x - 2\,y + 3\,z)^3$; $(a - 3\,b + c)^3$; $(7\,x + 9\,y - 4\,z)^3$.

§ 70. Das Kubikwurzelziehen.

Aus einem mehrgliedrigen geordneten Ausdrucke die Kubikwurzel ziehen heißt, eine Zahl suchen, welche, dreimal als Faktor gesetzt, den gegebenen mehrgliedrigen Ausdruck (Radikand) gibt. Der hiebei einzuschlagende Vorgang ergibt sich durch das Zerlegen des Radikanden in jene Bestandteile, aus welchen derselbe beim Kubieren hervorgegangen ist, sowie weiters durch das Abziehen dieser Bestandteile in entsprechender Reihenfolge von dem Radikand.

$$\sqrt[3]{a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3} = a + b.$$

$$\begin{array}{ll} a^3 \; . \; . \; . & + a^3 \\ \hline & \qquad + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3 : + 3\,a^2 b : + 3 . a^2 = + b. \\ 3 . a^2 . b \; . \; . \; . \; . & + 3\,a^2 b \\ 3 . a \; . b^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \qquad + 3\,a\,b^2 \\ b^3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \qquad\qquad + b^3 \\ \hline \end{array}$$

Das erste Glied des Radikands ist der Kubus des ersten Gliedes der Wurzel; letztere ist $\sqrt[3]{a^3} = a$. Subtrahiert man nun den Kubus des ersten Gliedes der Wurzel vom Radikand, so enthält das erste Glied des Restes das dreifache Produkt aus

dem Quadrate des ersten Gliedes der Wurzel mit dem zweiten Gliede. Es muß daher $3a^2b : 3a^2 = b$, d. i. dem zweiten Gliede der Wurzel. Alsdann wird der Reihe nach gebildet und abgezogen $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3. Wären noch mehrere Glieder im Radikand vorhanden, so müßte das erste Glied des Restes dividiert werden durch $3(a+b)^2$, um ein drittes Glied c der Wurzel zu erhalten, worauf der Reihe nach wieder zu subtrahieren kämen $3(a+b)^2 . c$, $3(a+b) . c^2$ und c^3 usw.

Aus diesen Darlegungen ist das Gesetz, nach welchem aus einer dekadischen Zahl die Kubikwurzel gezogen wird, mit Leichtigkeit zu entnehmen.

Aufgaben:

a) Erhebe zur dritten Potenz: $(2a + 3b)$, $(x + 3y)$, $(a - 2b)$, $(2x - 4z)$ und ziehe aus den erhaltenen Kuben die Kubikwurzel.

b) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$; $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3}$.

c) $\sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$; $\sqrt[3]{8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3}$.

V. Kapitel.

Einiges Wesentliche von den einfachsten Gleichungen.

§ 71. Begriffsfeststellungen.

Der Begriff „Gleichung" wurde bereits S. 3 festgestellt und S. 75 erweitert. Es erübrigt daher nur noch folgende Unterscheidungen zu treffen:

Eine Gleichung von der Form $4 = 4$, oder $x = x$, oder $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ heißt eine identische Gleichung;*) sie besteht für jeden besonderen Wert, den man für die in ihr vorkommenden allgemeinen Zahlen einsetzt. Eine Gleichung von der Form $x + 7 = 15$ hingegen heißt eine Bestimmungsgleichung; sie gilt nur für einen oder einige wenige besondere Werte der in ihr vorkommenden allgemeinen Zahlen. In unserem Beispiele besteht die Gleichung $x + 7 = 15$ nur, wenn $x = 8$ ist, denn $8 + 7 = 15$.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit den Bestimmungsgleichungen, welche eine allgemeine Größe enthalten, und es wird dabei unsere Aufgabe sein, den Wert dieser allgemeinen Größe zu ermitteln. Die allgemeine unbekannte Größe wird kurz als Unbekannte, und die Gleichung selbst als „Gleichung mit einer Unbekannten" bezeichnet.**) Kommt die Unbekannte nur in der ersten Potenz vor, so spricht man von einer Gleichung ersten Grades, z. B. $x + 7 = 15$, kommt sie jedoch auch in höheren Potenzen vor, so hat man eine Gleichung zweiten, dritten Grades usf. vor sich, z. B. $x^2 + 2x = 13$. Den Vorgang, nach welchem die Unbekannte bestimmt wird, nennt man das Auflösen der Gleichung.

§ 72. Das Auflösen der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

I. Grundsätze und Regeln.

Der Hauptgrundsatz für das Auflösen der Gleichungen wurde bereits Seite 75 und 76 aufgestellt. Er lautet: Wenn man Gleiches mit Gleichem vornimmt, erhält man wieder Gleiches. Aus diesem Satze ergeben sich die Seite 75 und 76 abgeleiteten Grundsätze 1 bis 6, die sich nun wie folgt erweitern lassen:***)

---

*) identisch (lat.) = ebendasselbe, ein- und dasselbe, Identität = Einerleiheit.

**) Es gibt auch Gleichungen mit 2, 3 und mehreren Unbekannten. Man spricht dann von Gleichungen mit 2, 3 und mehreren Unbekannten, zum Unterschiede von den für uns in Betracht kommenden Gleichungen mit einer Unbekannten.

***) Wenn die Auflösung der einfachsten Gleichungen obligat verlangt wird, kommen diese bei der „Formellehre" aufgeführten Gesetze hier einzuflechten. In diesem Falle wird man aber die „Formellehre" erst nach den Gleichungen vornehmen, die sich dann in allen Punkten von selbst ergibt und daher beinahe ganz entfallen kann.

7. Jedes Glied einer Gleichung kann auf die andere Seite mit dem entgegengesetzten Zeichen überstellt werden.

Es ist $x + 7 = 15$, allgemein $x + m = n$

nach Grundsatz 2) $-7 = -7$ $\qquad -m = -m$

also auch $x = 15 - 7$ $\qquad x = n - m$.

Man kann daher beispielsweise die Gleichung:

$8x + 12 = 24 + 4x$ auch schreiben $8x - 4x = 24 - 12$.

8. Brüche lassen sich aus einer Gleichung dadurch wegschaffen, daß man sämtliche Glieder mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller Nenner multipliziert.

Es ist $\frac{x}{4} = 2$, oder $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{1}{6}$

nach Grundsatz 3) $\frac{x}{4} . 4 = 2 . 4$ $\qquad \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) . 6 = \frac{1}{6} . 6$

$x = 8$; $\qquad \frac{x}{2} . 6 + \frac{x}{3} . 6 = \frac{1}{6} . 6$

$3x + 2x = 1$.

9. Die Unbekannte läßt sich von dem ihr anhaftenden Koeffizienten befreien, wenn man die ganze Gleichung durch diesen Koeffizienten dividiert.

Ist $6x = 12$, $\qquad$ oder $3x + 2x = 1$

so ist $\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$ $\qquad 5x = 1$

$x = 2$, $\qquad x = \frac{1}{5}$.*)

Nach diesen Erklärungen ergibt sich für das Auflösen der Gleichungen folgende Regel:

1. Auflösung der durch Klammern verbundenen Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung. Z. B. $2(x-4) = -(x-1)$; aufgelöst $2x - 8 = -x + 1$.

2. Wegschaffen der Brüche, falls solche in der Gleichung vorkommen, durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der vorhandenen Nenner. Z. B. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13$; Brüche weggeschafft $6x + 4x + 3x = 13 . 12$.

3. Zusammenbringen und Zusammenziehen sämtlicher Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf der einen, und jener, welche bekannte Größen bedeuten, auf der anderen Seite der Gleichung (nach Satz 7, S. 94). Z. B. $2x - 8 = -x + 1$; Glieder geordnet $2x + x = 1 + 8$, oder $3x = 9$.

4. Befreien der Unbekannten von dem Koeffizienten, indem man beide Seiten der Gleichung durch den letzteren dividiert (nach Satz 9). Z. B. $3x = 9$, $x = \frac{9}{3} = 3$.

5. Erscheint in einer Gleichung, welche man nach der Regel 1, 2, 3 und 4 auf die einfachste Form gebracht hat, die Unbekannte in der zweiten oder dritten Potenz, so zieht man aus beiden Seiten der Gleichung die Quadrat-, beziehungsweise die Kubikwurzel, um die Unbekannte selbst zu erhalten, z. B. $x^2 = 16$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$, also $x = 4$; oder $y^3 = 27$, $\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{27}$, $y = 3$.

6. Erhält man, nachdem die Gleichung auf die einfachste Form gebracht wurde, die Quadrat- oder Kubikwurzel der Unbekannten, so erhebt man beide Seiten der Gleichung auf die zweite, beziehungsweise die dritte Potenz, um die Unbekannte selbst zu erhalten. Z. B. $\sqrt{x} = 2$, $(\sqrt{x})^2 = 2^2$, also $x = 4$; oder $\sqrt[3]{y} = 3$, $(\sqrt[3]{y})^3 = 3^3$, also $y = 27$.

II. Übungsbeispiele.

a) $3(x + 8) = 5(x - 8)$

$3x + 24 = 5x - 40$ . . . (Regel 1)

$24 + 40 = 5x - 3x$ . . . (Regel 3)

$64 = 2x$

$32 = x$ . . . . (Regel 4)

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 39 = 3x$

$3x + 2x + 234 = 18x$ . . . . (Regel 2)

$234 = 18x - 3x - 2x$. (Regel 3)

$234 = 13x$

$18 = x$ . . . . (Regel 4)

*) Dieses Wegschaffen des Koeffizienten ergibt sich auch aus der einfachen Schlußrechnung. Wenn $5x = 1$, also das 5fache einer Größe $= 1$ ist, so ist das Einfache dieser Größe $=$ dem 5ten Teile $= \frac{1}{5}$. Wenn $a . y = b$, also das a-fache einer Größe y gleich b ist, so ist das Einfache dieser Größe y der a-te Teil von b, also $y = \frac{b}{a}$.

c) $5x^2 - 8 = 37$
$5x^2 = 37 + 8$ . . . . (Regel 3)
$x^2 = \frac{37+8}{5}$ . . . . (Regel 4)
$x = \sqrt{\frac{37+8}{5}}$ . . (Regel 5)
$x = 3.$

d) $\sqrt{x+5} = 3$
$(\sqrt{x+5})^2 = 3^2$ . . . . (Regel 6)
$x + 5 = 9$
$x = 9 - 5$ . . . . (Regel 3)
$x = 4$

III. Aufgaben.

a) $6x + 8 = 26$; *b)* $9y - 5 = 31$; *c)* $105 + 6u = 195$; *d)* $13u - 17 = 4u + 68$;
e) $312 + 16x = 12 + 46x$; *f)* $85 = 13 + 8x$; *g)* $2x - 3 + 5x = 2x + 2$;
h) $x + 2x + 13 + 16x = 13x + 9x - 11$; *i)* $20 - (y - 4) = 2y$;
k) $3(x+5) = 5(x-5)$; *l)* $7(2x+28) - 3(x+21) = 5(2x+25) - 4(5x-40)$;
m) $20 + 5[5 - (8 - 2y)] = 7 + 2(3y - 5)$; *n)* $\frac{x}{3} + 2 = 4$; *o)* $\frac{4x}{5} + 16 = x + 15$;
p) $\frac{8}{x+1} + 18 = 20$; *q)* $\frac{x+4}{x-4} = 2$; *r)* $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x + 34$; *s)* $(x+1)(x-1) = 26$;
t) $\sqrt{x-1} = 5$; *u)* $6x^2 - 15 = 5x^2 + 49$.

IV. Anleitung für das Auflösen von Wortaufgaben mittels Gleichungen.

Die Lösung von Aufgaben mittels der Gleichungen nennt man die **algebraische Auflösung** derselben.

Für die in der Aufgabe vorkommende Unbekannte setzt man gewöhnlich einen der drei letzten Buchstaben des Alphabetes (x, y oder z) und nimmt dieselbe also als durch eine allgemeine Zahl gegeben an. Sodann bringt man die Unbekannte nach den in jeder Aufgabe gestellten Bedingungen mit den anderen gegebenen Zahlen so in Verbindung, daß daraus eine Gleichung aufgestellt werden kann. Das Ausdrücken der gegebenen Bedingungen durch Rechnungsoperationen bezeichnet man als das **Ansetzen der Gleichung**.

Die Auflösung der so erhaltenen Gleichung gibt den gesuchten Wert für die Unbekannte. Die Auflösung ist dann **richtig**, wenn der für die Unbekannte gefundene Wert den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Da sich für das Auflösen von Aufgaben mittels Gleichungen keine allgemeinen Regeln geben lassen, so mögen nachstehende Beispiele als Anleitung hiezu dienen.

Beispiele:

1. Wie heißt die Zahl, deren 8faches um 9 vermehrt 81 gibt?

Wäre die gesuchte Zahl . . . . x,
so ist deren 8faches . . . . $8x$,
und das 8fache um 9 vermehrt . . . . . . $8x + 9$;
letzteres ist = 81, also . . . . $8x + 9 = 81$.
$8x = 81 - 9$
$8x = 72$
$x = 9.$

Probe:
$8 . 9 + 9 = 81$
$72 + 9 = 81$
$81 = 81.$

2. Welche Zahl muß man zu dem Zähler und dem Nenner des Bruches $\frac{11}{17}$ addieren, damit man den Bruch $\frac{3}{4}$ erhalte?

Die gesuchte Zahl sei . . . . y.
Diese Zahl zu dem Zähler 11 addiert gibt . . . . . $11 + y$.
und zu dem Nenner 17 addiert . . . . $17 + y$.
Der Bruch $\frac{11+y}{17+y}$ soll aber gleich sein . . . . . . $\frac{3}{4}$,

also $\frac{11+y}{17+y} = \frac{3}{4}$
$(11 + y) . 4 = 3 . (17 + y)$
$44 + 4y = 51 + 3y$
$4y - 3y = 51 - 44$
$y = 7.$

Probe: $\frac{11+7}{17+7} = \frac{3}{4}$
$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ (gekürzt mit 3 und 4)
3   3
1   1

3. Eine Unternehmermannschaft A vollendet eine bestimmte Arbeit in 30 Tagen, eine zweite B dieselbe Arbeit in 27 Tagen. In wie viel Tagen wird diese Arbeit fertiggestellt, wenn beide Unternehmermannschaften zugleich arbeiten?

Die Mannschaft A braucht . . . . 30 Tage,
vollendet also in einem Tage . . . . $\frac{1}{30}$ der Arbeit.
Die Mannschaft B braucht . . . . 27 Tage,
leistet also in einem Tage . . . . $\frac{1}{27}$ der Arbeit.
Arbeiten beide Mannschaften gemeinschaftlich, so
ist daher ihre tägliche Leistung . . . . $\frac{1}{30} + \frac{1}{27}$ der Arbeit.
Ist nun die Anzahl der Tage, welche beide Mannschaften gemeinschaftlich arbeiten . . . . x,
so muß die tägliche Leistung beider Mannschaften
auch gleich sein . . . . $\frac{1}{x}$ der Arbeit,
also . . . . $\frac{1}{30} + \frac{1}{27} = \frac{1}{x}$.

$$27\,x + 30\,x = 30\,.\,27$$
$$57\,x = 810$$
$$x = 14{\cdot}2105 \text{ Tage.}$$

4. Ein Käufer verlangt 15 *rm* Brennholz à 3 *K*. Auf dem betreffenden Holzplatze befinden sich aber nur 2 Brennholzsorten, nämlich zu 4·30 und 2·80 *K* pro 1 *rm*. Zu welchen Anteilen muß man die vorhandenen Brennholzsorten mengen, um die gewünschte Mischsorte zu erhalten?

Bezeichnet man die Anzahl der Raummeter von der Sorte a mit x,
so kosten diese . . . . x . 4·30 = 4·3 x *K*;
der Rest, welcher von der Sorte b zu nehmen ist, beträgt 15 — x
und kostet, da 1 *rm* zu 2·80 *K* verkauft wird, ... (15 — x) . 2·80 *K*
Beide Anteile zusammengenommen kosten . . . . 15 . 3 *K*
Es besteht daher die Gleichung . . . . $4{\cdot}3\,x + (15 - x)\,.\,2{\cdot}80 = 15.3$

$$4{\cdot}3\,x + 42 - 2{\cdot}8\,x = 45$$
$$1{\cdot}5\,x = 3$$
$$x = 2.$$

Es sind somit von der ersten Sorte 2 *rm*, von der zweiten Sorte 15 — 2 = 13 *rm* zu nehmen.

5. Einem Boten, der vor 4 Stunden vom Orte A abging und in einer Stunde 5 *km* macht, wird vom Orte B aus, den der Bote passierte, ein Reiter nachgesendet, welcher in einer Stunde 12 *km* zurücklegt. In wie viel Stunden wird der Reiter den Boten einholen, wenn A und B 6 *km* voneinander entfernt sind?

Bezeichnet man die Zeit, welche der Reiter braucht, um den Boten einzuholen, mit . . . . x,
so legt der Reiter, der pro Stunde 12 *km* macht, in x Stunden x . 12 = 12 . x *km* zurück.

Da nun der Ausgangspunkt B des Reiters 6 *km* von A entfernt ist, so beträgt die Strecke, in welcher der Reiter den Boten einholt, von A aus . . . . 6 + 12 x *km* 1.

Der Bote, der pro Stunde 5 *km* macht, ist zur Zeit, zu welcher der Reiter abgeht, bereits 4 Stunden marschiert, hat also schon vorher einen Weg von . . . . 4 . 5 = 20 *km* zurückgelegt;

er geht nun noch solange, bis ihn der Reiter einholt, also ebenfalls noch x Stunden, und legt während dieser Zeit zurück . . . . x . 5 = 5 x *km*
so daß er nach der Zeit x von A entfernt ist . . . . 20 + 5 x *km* 2.

Da nun im Momente des Zusammentreffens Bote und Reiter gleichweit von A entfernt sind, so besteht die Gleichung

$$6 + 12\,x = 20 + 5\,x$$
$$12\,x - 5\,x = 20 - 6$$
$$7\,x = 14$$
$$x = 2 \text{ Stunden.}$$

Aufgaben:

1. Die Zahl 51 soll in drei Zahlen zerlegt werden, von denen jede folgende um 5 größer ist, als die vorhergehende.

2. Die Zahl 180 soll in zwei Teile geteilt werden, von denen der erste doppelt so groß ist als der zweite.

3. Von welcher Zahl ist der Unterschied zwischen $\frac{5}{8}$ und $\frac{3}{8}$ von ihr 18?

4. Ein Beamter verwendet von seinem Gehalte die Hälfte auf Kost, Wohnung und Beheizung, ein Viertel auf Bekleidung und Wäsche, ein Zwölftel auf Verschiedenes. Am Schlusse des Jahres bleiben ihm noch 200 *K*. Wie groß war seine Besoldung?

5. In einem Bestande sind doppelt so viele Buchen als Lärchenstämme. Entnimmt man demselben 80 Rotbuchen und 80 Lärchen, so bleiben viermal so viele Buchen als Lärchen; wie viele Buchen und Lärchen hatte der Bestand?

6. Zwei Personen gehen von demselben Orte hintereinander aus. Die eine legt in 8 Minuten 700 *m*, die andere in 7 Minuten 800 *m* zurück; in welcher Zeit holt die letztere die erstere ein, wenn beide anfänglich 1500 *m* voneinander entfernt waren?

7. Von zwei Röhren füllt die eine ein Bassin in zwei, die andere in drei Tagen; in wieviel Tagen wird der Raum gefüllt, wenn beide Röhren zugleich geöffnet werden?

8. Jemand dingt einen Handwerker unter der Bedingung, ihm täglich die Kost und 2 *K* zu zahlen. Arbeitet er nicht, so zahlt der Handwerker 1 *K* 50 *h* für die Kost. Nach 70 Tagen ist keiner dem anderen etwas schuldig; wie viele Tage hat der Handwerker gearbeitet und wie viele Tage hat er ausgesetzt?

9. Pflanzt man eine gewisse Anzahl junger Bäume in Form eines Quadrates, so bleiben 66 Stück übrig; vermehrt man die Anzahl der Bäume in jeder Seite um 1, so fehlen 79 Stück. Wie groß ist die Anzahl der Bäume?

10. Von einer Kultur sind $\frac{1}{4}$ der gesamten Pflanzenanzahl und noch 154 Stück durch Engerlingfraß, $\frac{1}{6}$ und 436 Stück durch Rüsselkäferfraß eingegangen, und $\frac{1}{8} + 77$ Stück verdorrt. Zum Schlusse fehlten auf die Hälfte der ausgesetzten Pflanzen noch 1308 Stück. Wieviel Pflanzen wurden zur Kultur verwendet?

II. Teil.

Geometrie.

§ 1. Begriffsfeststellungen.

Die Geometrie ist die Lehre von den Raumgrößen.*) Wir können uns von den letzteren durch die Anschauung eine Vorstellung bilden und an der Hand dieser letzteren leicht die einzelnen Begriffe aufbauen.

1. Der Gegenstand der Geometrie: Körper, Flächen, Linien (und Punkte).

In dem uns umgebenden Raume nehmen wir zunächst die Körper, z. B. einen Würfel, eine Kugel u. dgl. wahr. Jeder solche Körper stellt sich als ein von allen Seiten begrenzter Raum dar, der neben einer bestimmten Form und Größe eine ihm eigentümliche Farbe, eine gewisse Härte u. dgl. besitzt, kurz aus einem bestimmten Stoffe (z. B. Holz, Eisen) besteht. Man nennt solche Körper mit stofflichen Eigenschaften wirkliche, auch physische oder materielle Körper.**) Für die Geometrie ist der Stoff der materiellen Körper gleichgiltig: sie behandelt daher die Körper nur nach ihrer Größe und Form als den begrenzten Raum allein.

Obwohl sich jeder Körper nach sehr vielen Richtungen im Raume ausdehnt, so sind doch nur drei derselben als maßgebende Richtungen der Ausdehnung zu betrachten, nämlich Länge, Breite und Höhe (Dicke oder Tiefe). Die Grenzen eines Körpers heißen Flächen und die gesamte Begrenzung bildet die Oberfläche desselben.

Jede Fläche hat nur 2 Hauptausdehnungen, nach der Länge und nach der Breite. Sie läßt sich nicht als ein für sich greifbares Gebilde von einem Körper lostrennen, etwa in papierdünnen Streifen. Ein so abgetrennter Streifen besitzt schon eine, wenn auch sehr kleine Dicke und ist daher selbst als Körper anzusehen. Eine Fläche ist somit kein Teil eines Körpers, sondern nur dessen Grenze.

Die Grenzen der Flächen heißen Linien. Eine Linie ist ohne Breite und Dicke und hat nur eine einzige Ausdehnung, die Länge. Wie die Fläche, so läßt sich auch die Linie nur denken, denn die mit dem feinsten Bleistift gezogene Linie, unter einem starken Vergrößerungsglase betrachtet, stellt schon einen langgestreckten materiellen Körper dar, was beweist, daß die Linien nur als Grenzen der Flächen, nicht aber für sich selbst vorkommen können.

---

*) Siehe S. Seite 1.

**) Weil sie aus Stoff, was gleichbedeutend mit Materie, bestehen.

Die Grenzen der Linien sind Punkte. Ein Punkt besitzt gar keine Ausdehnung und kann daher nur gedacht werden. Ein mit dem Stift auf dem Papier angezeigter Punkt stellt sich unter dem Vergrößerungsglase schon als ein kleiner materieller Körper dar, der nur die Stelle bezeichnet, wo sich der mathematische Punkt befinden soll.

Körper, Flächen und Linien bezeichnet man als Raumgrößen.

2. Die Entstehung der Raumgrößen durch Bewegung.

Gleichwie wir im vorhergehenden, vom Körper ausgehend, die Begriffe: Fläche, Linie und Punkt feststellen konnten, so ist es auch umgekehrt möglich, vom Punkte ausgehend, sich der Reihenfolge nach Linien, Flächen und Körper im geometrischen Sinne entstanden zu denken.

Wenn sich ein Punkt im Raume fortbewegt, so bezeichnet der von ihm zurückgelegte Weg eine Linie. Wir stellen uns dabei vor, daß von dem sich bewegenden Punkte eine Spur zurückgelassen wird, welche als die Bahn desselben zu betrachten ist.

Durch die Bewegung einer Linie entsteht eine Fläche. Die Schneide eines Messers hinterläßt eine Fläche, wenn man mit dem letzteren einen Gegenstand, z. B. Brot durchschneidet.

Bewegt sich endlich eine Fläche in einer anderen Richtung, als in der ihrer Erweiterung fort, so entsteht ein Körper.

3. Einteilung der Linien, Flächen und Körper.

Man unterscheidet gerade und krumme Linien. Erstere, auch kurzweg Gerade genannt, entstehen, wenn sich ein Punkt stets in derselben Richtung fortbewegt (Fig. 1, ab); letztere entstehen, wenn der sich bewegende Punkt die Richtung der Bewegung beständig ändert (cd).

Setzt sich eine Linie aus Geraden verschiedener Richtung oder aus geraden und krummen Linien zusammen, so bilden diese Linien einen Linienzug (ef und gh).

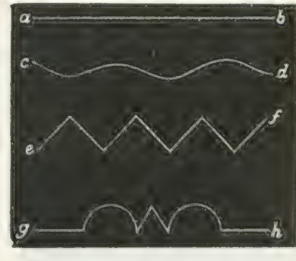


Fig. 1.

Die Flächen werden als ebene und krumme Flächen unterschieden. Wir sprechen von einer ebenen Fläche oder einer Ebene, wenn sich auf derselben durch jeden Punkt nach allen Richtungen Gerade ziehen lassen; im gegenteiligen Falle spricht man von einer krummen Fläche. Eben ist die Oberfläche eines gewöhnlichen Spiegels, eine Tischplatte u. dgl., krumm ist die Oberfläche einer Kugel, einer Walze usf.

Die Körper teilt man in eckige und runde ein. Ein von lauter Ebenen begrenzter Körper wird als eckiger, ein von lauter krummen oder nur teilweise von ebenen Flächen begrenzter Körper als runder Körper bezeichnet; z. B.: Kugel, Walze, Kegel.

4. Einteilung des Gegenstandes Geometrie.

Die Geometrie wird in Planimetrie und Stereometrie eingeteilt.

Die Planimetrie oder die Geometrie der Ebene ist die Lehre von den Eigenschaften jener Raumgrößen, welche in einer und derselben Ebene liegen; die Stereometrie oder die Geometrie des Raumes beschäftigt sich mit denjenigen Raumgrößen, welche nur im dreifach ausgedehnten Raume dargestellt werden können.

Für unsere Zwecke*) wird es notwendig, auch jeden Gegenstand, und zwar insbesondere Körper, auf dem Papiere (also in einer Ebene) so darzustellen, daß sich jedermann denselben nach dieser Zeichnung genau vorstellen und die Größe der einzelnen Teile des betreffenden Gegenstandes sofort entnehmen kann. Wir schließen deshalb an die Planimetrie und Stereometrie noch einen dritten Abschnitt, die darstellende Geometrie, an, und behandeln also im folgenden I. die Planimetrie, II. die Stereometrie, III. das Wesentlichste aus der darstellenden Geometrie.

I. Abschnitt.

Die Planimetrie.

I. Kapitel.

Der Punkt, die gerade Linie und die Kreislinie.

§ 2. Vom Punkte.

Nach den im § 1 festgestellten Begriffen kann der Punkt im mathematischen Sinne als ein Raumgebilde ohne Ausdehnung nur gedacht, nicht aber dargestellt werden. Um aber doch die Stelle, an der man sich einen Punkt denkt, andeuten zu können, macht man als Zeichen dafür ein Ringelchen, ein Sternchen oder einen kleinen Tupfen, ○ * •. Einen Namen oder eine Bezeichnung gibt man jedem Punkte durch Beisetzung eines Buchstaben oder einer Ziffer, z. B. Punkt a, Punkt 1.

§ 3. Die gerade Linie oder die Gerade.

1. Darstellung und Bestimmung der Geraden.

Nach der obigen Erklärung, Seite 99, kann eine gerade Linie ebenfalls nur gedacht werden. Wenn wir nun trotzdem eine gerade Linie auf dem Papiere zeichnen, so stellt dieselbe keine wirkliche Linie, sondern nur das Zeichen für eine Linie vor. Die gezeichneten Linien, Fig. 2, werden in vollen Linien, oder punktiert, gestrichelt (strichliert) und strichpunktiert dargestellt.

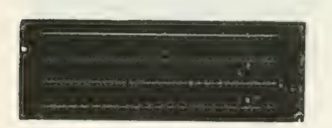


Fig. 2.

Durch einen Punkt lassen sich unzählige Gerade ziehen. Zwischen zwei Punkten ist aber nur eine Gerade möglich; die letztere ist zugleich die kürzeste Verbindungslinie von allen Linien, welche durch zwei gegebene Punkte gezogen werden können. Eine Gerade ist somit durch zwei Punkte auch vollkommen bestimmt; sie gibt zugleich die Entfernung oder den Abstand der beiden Punkte an.

Eine nur auf einer Seite begrenzte gerade Linie heißt ein Strahl, eine beiderseits begrenzte Gerade eine Strecke. Die beiden Grenzpunkte heißen die Endpunkte der Strecke. Jede Strecke wird dadurch bezeichnet, daß man zu den Endpunkten derselben Buchstaben, seltener auch Ziffern setzt, z. B. Strecke ab, cd. Ein Strahl wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt benannt.

---

*) Insbesondere zum Verständnisse der Zeichnungen in den Gegenständen: Praktische Geometrie, eigentliche Fachgegenstände und Hilfsfächer.

2. Richtung der geraden Linien untereinander; Lage der Geraden im Raume.

Haben zwei Gerade dieselbe Richtung, oder stehen sie überall gleich weit voneinander ab, so heißen sie gleichlaufend oder parallel (Fig. 3). Man bezeichnet die Parallelität zweier Linien mit dem Zeichen || und schreibt *ab* || *cd*.

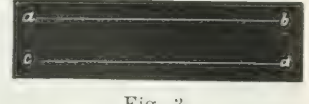


Fig. 3.

Zwei Linien, welche eine verschiedene Richtung einnehmen, heißen nichtparallel. Nach derjenigen Seite, nach welcher sie sich einander nähern, nennt man sie konvergierend,*) nach der entgegengesetzten Seite (nach welcher sie sich voneinander entfernen) divergierend.**) In Fig. 4 sind *e f* und *g h* konvergierend, *f e* und *h g* divergierend.



Fig. 4.

Zwei nichtparallele Gerade müssen sich bei hinreichender Verlängerung in einem Punkte schneiden; man nennt diesen gemeinschaftlichen Punkt den Schnitt- oder Durchschnittspunkt; Fig. 5, Punkt *n*.

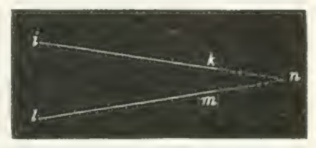


Fig. 5.

Eine Gerade, welche im Raume die Richtung eines freihängenden, gespannten Fadens besitzt, heißt vertikal oder lothrecht. Besitzt eine Gerade die Richtung eines im vollkommenen Gleichgewichte befindlichen Wagebalkens oder einer vollkommen ruhigen Wasserfläche, so liegt eine solche Gerade wagrecht, wasserrecht oder horizontal. Eine Gerade endlich, die weder vertikal noch horizontal ist, wird als schräg bezeichnet.

3. Die Vergleichung der Strecken. Die Rechnungsoperationen mit denselben.

a) Die Vergleichung der Strecken.

Um zwei Strecken *a b* und *c d* (Fig. 6) miteinander vergleichen zu können, denken wir uns dieselben so aufeinander gelegt, daß der Anfangspunkt der ersten Strecke mit dem Anfangspunkte der zweiten Strecke zusammenfällt. Fallen nun auch die beiden Endpunkte der Strecken genau übereinander, so sagt man, die beiden Strecken sind gleich. Man schreibt dann $a\,b = c\,d$.

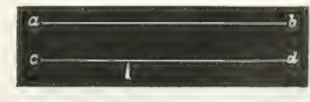


Fig. 6.

Fällt hingegen (Fig. 7) der Endpunkt der zweiten Strecke nicht mit dem Endpunkte der ersten zusammen, sondern liegt derselbe innerhalb der ersten Strecke *e f* oder in der Verlängerung derselben, so sagt man, die beiden Strecken sind ungleich. Kommt *h* bei dem Übereinanderlegen von *g h* und *e f* innerhalb *e f* zu liegen, so ist *e f* größer als *g h*, und fällt *h* in die Verlängerung von *e f*, so ist *e f* kleiner als *g h*. Das Zeichen für diese Ungleichheit ist $>$ oder $<$; $e\,f > g\,h$ heißt, *e f* ist größer als *g h* (wie in Fig. 7), und $e\,f < g\,h$ heißt, *e f* ist kleiner als *g h*.***)

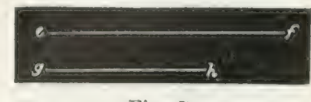


Fig. 7.

*) lat. = hinneigend, zusammenlaufend.

**) lat. = auseinandergehend.

***) Die Öffnung des Zeichens deutet immer auf die größere, die Spitze hingegen auf die kleinere der beiden ungleichen Größen.

b) Die Rechnungsoperationen mit Strecken.

Wie die Zahlen, so können auch die Strecken addiert, subtrahiert, vervielfacht und geteilt werden.

Fig. 8.

Zu einer Strecke $a\,b$ (Fig. 8) wird eine zweite Strecke $c\,d$ und eine dritte $e\,f$ addiert, wenn man sie in derselben Richtung unmittelbar nacheinander anreiht. Es ist dann $af = ab + cd + ef$.

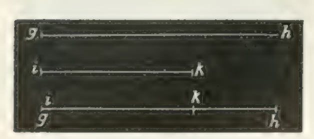


Fig. 9.

Soll von einer gegebenen Strecke $g\,h$ (Fig. 9) eine zweite, kürzere Strecke $i\,k$ subtrahiert werden, so geschieht dies dadurch, daß man die abzuziehende Strecke $i\,k$ (den Subtrahend) so auf die zu vermindernde Strecke $g\,h$ (den Minuend) legt, daß die Endpunkte g und i der beiden Strecken übereinander fallen. Der ungedeckt bleibende Teil $k\,h$ der längeren Strecke ist die Differenz oder der Unterschied der beiden Strecken.

Eine Gerade wird vervielfacht, indem man dieselbe auf eine zweite Gerade ein-, zwei- oder dreimal usf. aufträgt. Letztere ist dann das Einfache, Doppelte, Dreifache usf. der ersteren. So ist in Fig. 10, $n\,o$ das Einfache, $n\,p$ das Doppelte, $n\,q$ das Drei-, $n\,r$ das Vierfache der Strecke $l\,m$.



Fig. 10.

Ist in Fig. 11 die Strecke $u\,v$ in der gegebenen Strecke $s\,w$ zweimal und in der Strecke $s\,t$ dreimal enthalten, so heißt $u\,v$ die Hälfte von $s\,w$ oder ein Drittel der Strecke $s\,t$. Es ist somit die Strecke $s\,w$ durch den Punkt x in 2 und die Strecke $s\,t$ durch die Punkte x und w in 3 gleiche Teile geteilt. Man nennt diesen Vorgang das Teilen der Strecken.

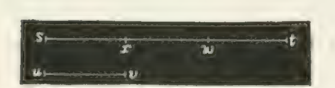


Fig. 11.

4. Das Messen von Strecken.

Die Bestimmung der Länge einer Strecke geschieht durch das Messen. Zu diesem Zwecke muß man eine Einheit annehmen und nun untersuchen, wie oft diese Einheit in der zu messenden Strecke enthalten ist. Als Längeneinheit gilt das Meter mit den Vielfachen und Unterabteilungen, wie sie Seite 17 vorgeführt wurden.*)

Trägt man die Längeneinheit mit ihren Unterabteilungen in der wahren Größe auf, z. B. auf einem Stabe aus Holz, Metall oder auch auf Papier, so erhält man einen natürlichen Maßstab. Derselbe dient zum Messen von Längen in der Natur. Die im praktischen Leben am meisten angewendete Form ist der zusammenlegbare Metermaßstab (Meterstab) und für größere Längen das Meßband, d. i. ein in Meter (gewöhnlich 20 *m*), Dezimeter und Zentimeter eingeteiltes Band aus Leinen oder Stahl.

Soll eine Strecke nach Metern gemessen werden, so legt man den Metermaßstab nacheinander so oftmal auf die Strecke, als es bis zum Endpunkte derselben notwendig ist. Konnte man den Meterstab z. B. 10 und $\frac{1}{2}$mal auflegen, so ist die Länge der Strecke 10·5 *m*.

*) Siehe an dieser Stelle auch die alten als Längeneinheiten ehedem in Verwendung gestandenen Maße.

Außer dem eben beschriebenen natürlichen Maßstabe ist oft noch eine zweite Art, der verjüngte Maßstab, erforderlich, welcher dann Anwendung findet, wenn größere in der Natur gemessene Linien auf dem Papiere, welches eine viel geringere Ausdehnung besitzt, bildlich dargestellt, d. i. gezeichnet werden sollen.

Man erhält einen verjüngten Maßstab, wenn man die Längeneinheit nicht in wahrer Größe, sondern in einem bestimmten Verhältnisse zur natürlichen Maßeinheit verkleinert (verjüngt) aufträgt. Sollen z. B. 25 *m* in der Natur *(N)* einem Zentimeter in der Zeichnung *(Z)* gleich sein, so hat, da 25 *m* gleich 2500 *cm* sind, 1 *cm* in der Zeichnung eine Länge von 2500 *cm* in der Natur. In diesem Falle hat man ein bestimmtes Verhältnis zwischen Zeichnung und Natur, welches die Verkleinerung oder Verjüngung genannt wird. Das Verhältnis bleibt immer gleich, ob man nun sagt, 1 *cm* in der Zeichnung = 2500 *cm* in der Natur, oder 1" *Z* = 2500 " *N*,*) oder 1 *dm Z* = 2500 *dm N*, oder 1 *m Z* = 2500 *m N*, denn in jedem Falle ist ein Teil der Natur, ob groß oder klein, 2500mal größer als in der Zeichnung. Man drückt deshalb jede Verjüngung gewöhnlich nur durch einen unbenannten Bruch aus, z. B. $\frac{1}{2500}$, 1:2500, oder legt mitunter der Einfachheit in der Rechnung wegen eine bestimmte Einheit zugrunde, und zwar jetzt 1 *cm*, früher 1" und sagt z. B. 1 *cm* = 25 *m* (d. h. 1 *cm* Papiermaß = 25 *m* Naturmaß), oder 1" = 40° (d. h. 1" Papiermaß = 40° Naturmaß) usw.

§ 4. Die Kreislinie.

Denkt man sich eine Strecke in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte so lange gedreht, bis dieselbe wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgelangt, so beschreibt der zweite Endpunkt dieser Strecke eine geschlossene, krumme Linie, welche Kreislinie oder Kreis genannt wird. Ein Kreis ist daher eine krumme, in sich selbst zurückkehrende Linie, welche die Eigenschaft hat, daß alle ihre Punkte von einem in ihrem Inneren gelegenen Punkte gleichweit abstehen.

Die krumme Linie selbst, Fig. 12, *ABDEGHJ*, wird der Umfang oder die Peripherie des Kreises, die durch diese begrenzte Fläche die Kreisfläche genannt. Der im Inneren gelegene Punkt *O* ist der Mittelpunkt oder das Zentrum des Kreises. Die Verbindungslinie eines Punktes der Peripherie mit dem Mittelpunkte des Kreises heißt Radius oder Halbmesser, *AO*, *GO*, *HO*. Verlängert man den Halbmesser eines Kreises, *AO*, bis zur entgegengesetzten Seite des Umfanges der Kreislinie, so entsteht ein Durchmesser oder Diameter, *AG*.

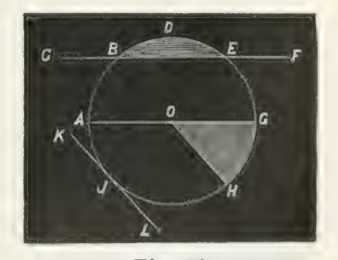


Fig. 12.

Nach der für die Kreislinie gegebenen Definition sind alle Halbmesser eines Kreises untereinander gleich; *AO* = *GO* = *HO*. Der Durchmesser eines Kreises hat die doppelte Länge eines Halbmessers; es sind daher auch alle Durchmesser desselben Kreises einander gleich.

Ein Durchmesser teilt den Kreis in zwei gleiche Hälften, Halbkreise genannt. Der vierte Teil eines Kreises heißt Quadrant oder Viertelkreis, der sechste Teil Sextant, der achte Teil Oktant usf.

*) *Z* hier kurz gewählt für Zeichnungsmaß, *N* kurz für Naturmaß.

Zwei Kreise sind gleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben; dieselben müssen sich, mit ihren Mittelpunkten übereinandergelegt, vollständig decken.

Verbindet eine Gerade zwei Punkte des Umfanges eines Kreises, so heißt dieselbe eine Sehne (BE); wird eine Sehne über die Peripherie des Kreises hinaus verlängert, so entsteht eine Sekante (CF). Eine Gerade, welche die Kreislinie nur in einem einzigen Punkte berührt, sonst aber ganz außerhalb des Kreises liegt, heißt Tangente (KL); der Punkt J heißt Berührungspunkt.

Einen Teil der Peripherie eines Kreises nennt man Kreisbogen oder kurz Bogen, auch arcus und bezeichnet denselben z. B. mit GH oder arc. GH, gelesen Bogen oder arcus GH.

Zwei Bogen sind gleich, wenn sie, übereinander gelegt, sich vollständig decken.

Wird ein Teil der Kreisfläche durch zwei Radien und den dazwischen liegenden Kreisbogen begrenzt, so nennt man diese Fläche einen Kreisausschnitt oder Sektor (GOH). Unter einem Kreisabschnitt oder Segment versteht man dagegen jene Fläche, welche durch eine Sehne und den dazu gehörigen Bogen eingeschlossen wird ($BDEB$).

Da, wie oben gezeigt wurde, zwei Bogen eines Kreises einander gleich sind, wenn sie, mit ihren Endpunkten übereinander gelegt, sich vollständig decken, so müssen auch die Verbindungslinien der beiden Endpunkte dieser Bogen, d. i. die Sehnen, übereinander zu liegen kommen und sich decken. Daraus folgt: **Zu gleichen Bogen gehören gleiche Sehnen und zu gleichen Sehnen auch gleiche Bogen in denselben oder in gleichen Kreisen.**

Zum Messen des Kreisumfanges oder eines Teiles desselben dient das Bogenmaß, dessen Einheit ein Grad ist. Ein Grad ist entweder der 360ste oder der 400ste Teil des Kreisumfanges. Ersterer heißt ein Grad alter Teilung (Sexagesimal-Teilung) und besteht aus 60 Minuten ($1^0 = 60'$), eine Minute gleich 60 Sekunden ($1' = 60''$). Letzterer wird ein Grad neuer Teilung (Zentesimal-Teilung) genannt und besteht aus 100 Minuten ($1^g = 100'$) und eine Minute aus 100 Sekunden ($1' = 100''$).

Einen Bogen messen heißt untersuchen, wie oft die Einheit des Bogenmaßes in dem zu messenden Bogen enthalten ist.

II. Kapitel.

§ 5. Der Winkel.

1. Entstehung und Bezeichnung der Winkel.

Zwei gerade Linien, welche von einem gemeinsamen Punkte nach verschiedenen Richtungen verlaufen, bilden einen Winkel. Die geraden Linien, welche den Winkel bilden, nennt man dessen Schenkel und den Ausgangspunkt derselben den Schnittpunkt oder Scheitel des Winkels.

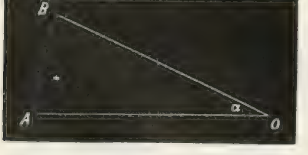


Fig. 13.

Ein Winkel entsteht, wenn sich ein Strahl AO, Fig. 13, welcher sich von einem Punkte O nur nach einer Seite A hin erstreckt, in einer Ebene um diesen Punkt nach einerlei Richtung dreht. Nachdem dieser Strahl eine beliebige Länge haben kann, ist es einleuchtend, daß die Größe eines Winkels nur von der Größe der Drehung abhängt und nicht von der Länge der Schenkel.

Das Zeichen für einen Winkel ist $\sphericalangle$. Die Bezeichnung eines Winkels geschieht entweder durch den Buchstaben am Scheitel ($\sphericalangle O$), oder durch einen zwischen beide Schenkel nahe am Scheitel gesetzten Buchstaben ($\sphericalangle a$), oder endlich durch 3 Buchstaben, wobei jedoch immer jener am Scheitel in der Mitte genannt werden muß, also $\sphericalangle A\ O\ B$ oder $\sphericalangle B\ O\ A$.

Zwei Winkel sind gleich, wenn zu ihrer Entstehung eine gleichgroße Drehung notwendig war. Zwei gleiche Winkel müssen sich, übereinander gelegt, decken, d. h. es müssen, wenn die beiden Scheitel übereinander liegen, und ein Schenkel des einen Winkels über einen Schenkel des anderen Winkels zu liegen kommt, auch die beiden anderen Schenkel der Winkel zusammenfallen. Decken sich zwei Winkel beim Übereinanderlegen nicht, so sind dieselben ungleich. In diesem Falle wird, wenn

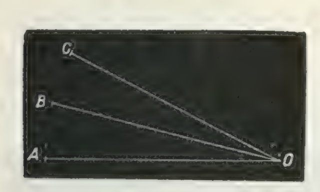


Fig. 14.

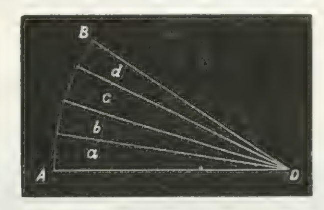


Fig. 15.

die beiden Scheitel und je ein Schenkel zusammenfallen, der zweite Schenkel des kleineren Winkels innerhalb der beiden Schenkel des größeren Winkels zu liegen kommen.

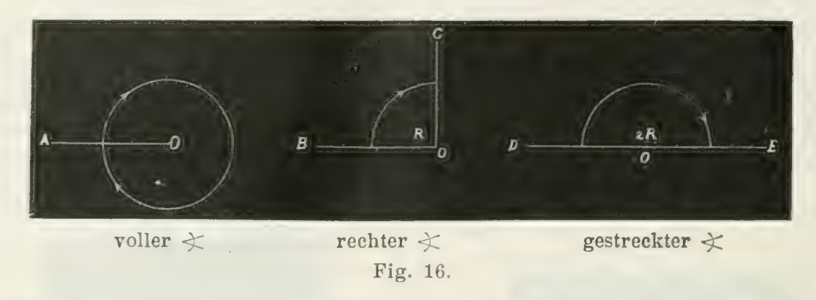
Der Winkel $A\ O\ C$ (Fig. 14) ist aus dem Winkel $A\ O\ B$ entstanden, indem man den Schenkel $B\ O$ bis in die Lage $C\ O$ weiter gedreht hat. Es kann also der Winkel $A\ O\ C$ als Summe der beiden Winkel $A\ O\ B$ und $B\ O\ C$ angesehen werden, oder $\sphericalangle A\ O\ C = \sphericalangle A\ O\ B + \sphericalangle B\ O\ C$. Wird der Schenkel $C\ O$ des Winkels $A\ O\ C$ in die frühere Lage $B\ O$ zurückgedreht, so bleibt wieder nur der Winkel $A\ O\ B$. Derselbe kann also als Differenz der beiden Winkel $A\ O\ C$ und $B\ O\ C$ angesehen werden, oder $\sphericalangle A\,O\,B = \sphericalangle A\,O\,C - \sphericalangle B\,O\,C$.

Werden die Winkel a, b, c und d (Fig. 15) als gleich groß angenommen, so ist der Winkel $A\ O\ B$ gleich dem 4fachen des Winkels a oder dem 2fachen des Winkels a und b, also $\sphericalangle A\,O\,B = 4 . \sphericalangle a$, oder auch $= 4 . \sphericalangle b = 4 . \sphericalangle c = 4 . \sphericalangle d$, oder $\sphericalangle A\,O\,B = 2 . (\sphericalangle a + \sphericalangle b)$. Umgekehrt kann aber unter derselben Voraussetzung der Winkel a auch als der vierte Teil des Winkels $A\ O\ B$ angesehen werden, oder $\sphericalangle a = \frac{1}{4} \sphericalangle A\,O\,B$; ebenso ist $\sphericalangle a + \sphericalangle b = \frac{1}{2} \sphericalangle A\,O\,B$, oder $\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = \frac{3}{4} \sphericalangle A\,O\,B$.

2. Die Arten der Winkel.

Ist der bei der Entstehung eines Winkels sich drehende Strahl in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt, so hat derselbe eine volle Umdrehung gemacht; der entstandene Winkel heißt ein voller (Fig. 16). Das Viertel einer vollen Umdrehung gibt einen rechten Winkel oder einen Rechten ($= R$), zwei Rechte bilden einen gestreckten Winkel ($= 2\ R$). Die Schenkel des letzteren gehen in einer geraden Linie vom Scheitel aus, aber nach gerade entgegengesetzten Richtungen. Alle vollen, ebenso auch alle rechten und gestreckten Winkel sind je untereinander gleich.

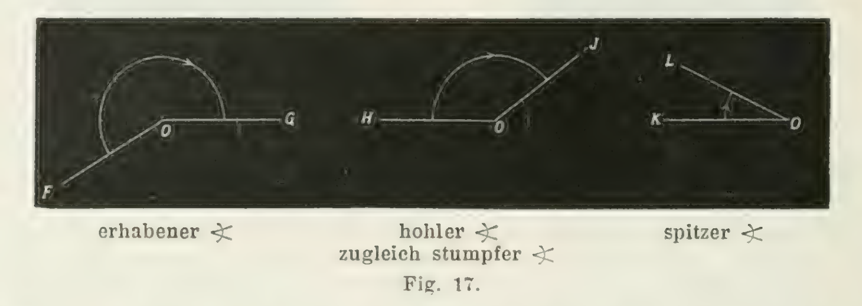
Ein Winkel, der größer ist als ein gestreckter, heißt ein erhabener (konvexer) Winkel (Fig. 17) und ein solcher, der kleiner ist als ein gestreckter, ein hohler (konkaver) Winkel. Ein hohler Winkel wird ein spitzer genannt, wenn er kleiner, und ein stumpfer, wenn er größer ist als ein Rechter.



voller ∢ rechter ∢ gestreckter ∢

Fig. 16.

Schließen zwei gerade Linien miteinander einen rechten Winkel ein, so sagt man, die beiden Geraden stehen aufeinander senkrecht (normal).



erhabener ∢ hohler ∢ zugleich stumpfer ∢ spitzer ∢

Fig. 17.

Das Zeichen dafür ist ⊥. Ist dies nicht der Fall, dann stehen die beiden Geraden schief oder schräg zueinander.

3. Das Messen der Winkel.

Zum Messen der Winkel bedient man sich des Winkelmaßes, dessen Einheit ein Winkelgrad oder kurz ein Grad ist. Dasselbe ist dem bereits erwähnten Bogenmaße nachgebildet. Auch hier gibt es die sogenannte alte oder Sexagesimal-Teilung und die sogenannte neue oder Zentesimal-Teilung.

Um die Größe eines Winkels zu bestimmen, d. i. denselben zu messen, sollte man untersuchen, wie oft die Einheit des Winkelmaßes in dem zu messenden Winkel enthalten ist. Da aber ein Winkel durch die Drehung eines Schenkels um einen seiner Endpunkte in einer Ebene entsteht, so kann derselbe auch durch den Kreisbogen gemessen werden, welchen der andere Endpunkt des Schenkels bei der Drehung beschreibt.

Teilt man den Umfang eines Kreises in 360 gleiche Teile, so entspricht ein solcher Teil einem Bogengrade (^{0}). Verbindet man weiters alle 360 Teilstriche mit dem Mittelpunkte des Kreises, so entstehen 360 Winkel, welche untereinander gleich sein müssen, da zur Entstehung eines jeden derselben die gleich große Drehung notwendig war. Die Größe eines dieser 360 Winkel stellt einen Winkelgrad der alten Teilung (1^0 a. T.) vor. Wird die Teilung noch weiter fortgesetzt, so

zerfällt jeder Bogengrad in 60 Bogenminuten und jede Bogenminute in 60 Bogensekunden. Durch Verbindung der entsprechenden Teilstriche mit dem Mittelpunkte des Kreises würden sich Winkel von der Größe einer Winkelminute ('), beziehungsweise einer Winkelsekunde alter Teilung (" a. T.) ergeben. Es enthält somit ein jeder Winkel ebenso viele Winkelgrade als der dazu gehörige Bogen Bogengrade, und es folgt daraus, daß ein jeder Winkel durch einen Kreisbogen gemessen werden kann, den man aus seinem Scheitel zwischen den Schenkeln beschrieben hat.

Durch einen ähnlichen Vorgang gelangt man auch zur Größe eines Winkels, eines Grades (^{0}), einer Minute (') und einer Sekunde neuer Teilung (" n. T.). Man müßte nur den Umfang des Kreises in 400 Bogengrade, 1 Bogengrad in 100 Bogenminuten, 1 Bogenminute in 100 Bogensekunden teilen und weiter wie oben verfahren.

Aus dem Gesagten folgt, daß ein voller Winkel $= 360^0\, a.\, T.$ oder $400^0\, n.\, T.$
ein gestreckter „ $= 180^0\, a.\, T.$ „ $200^0\, n.\, T.$
und ein Rechter $= 90^0\, a.\, T.$ „ $100^0\, n.\, T.$

In der Planimetrie werden wir es, wenn weiter nichts gesagt ist, meist nur mit dem Winkelmaße der alten Teilung zu tun haben, dagegen findet die neue Teilung wieder mehr Anwendung in der praktischen Geometrie.

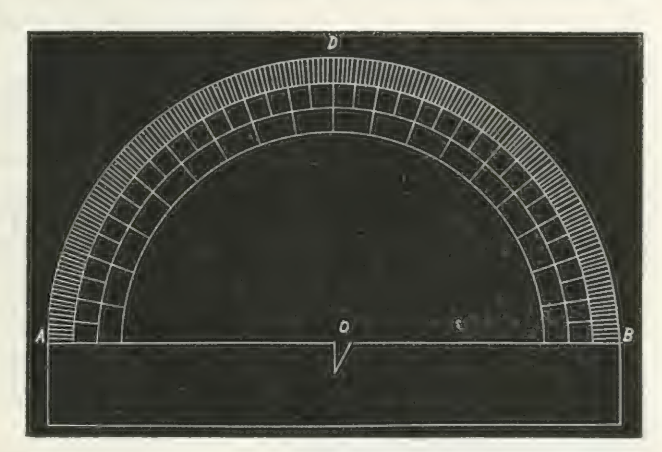


Fig. 18.

Zum Messen und Zeichnen der Winkel dient der Transporteur oder Winkelmesser, Fig. 18. Derselbe ist gewöhnlich eine halbkreisförmige Scheibe aus Karton-Papier oder Messingblech, deren Umfang ADB mit einer Teilung nach Graden, wohl auch $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ Graden versehen ist. Der Mittelpunkt O der Teilung ist durch einen dreieckigen Einschnitt ersichtlich gemacht, der an der Kante AB angebracht ist. Die Bezifferung der Teilung geht entweder im Sinne des Zeigers einer Uhr, oder im entgegengesetzten Sinne.

Zum Zwecke der Messung eines Winkels legt man den Mittelpunkt der Teilung über den Scheitel und den Nullpunkt (Anfangspunkt) derselben auf einen Schenkel des Winkels und liest dessen Größe nun beim Schnittpunkte des zweiten Schenkels mit der Teilung ab. Soll umgekehrt ein gegebener Winkel aufgetragen werden, so muß der Transporteur in derselben Weise gelegt und der zweite Winkelschenkel als Strahl vom Mittelpunkte nach der geforderten Gradmarke gezogen werden.

Ein solcher Transporteur heißt auch ein Halbkreistransporteur, zum Unterschiede von einem Vollkreistransporteur, der einen ganzen Vollkreis darstellt und in der Mitte zur Ersichtlichmachung des Zentrums gewöhnlich mit einem durchsichtigen, schwachen Hornblättchen überlegt ist.

4. Neben- und Scheitelwinkel, dann Gegen-, Wechsel- und Anwinkel.

A. *Neben- und Scheitelwinkel.*

Verlängert man den einen Schenkel eines Winkels über dessen Scheitel hinaus, so entsteht ein neuer Winkel, welcher der Nebenwinkel des gegebenen Winkels genannt wird. In Fig. 19 ist $\sphericalangle BOC$ der Nebenwinkel zu $\sphericalangle AOB$. Nebenwinkel zueinander sind daher zwei Winkel, wenn sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich haben und ihre beiden anderen Schenkel eine gerade Linie bilden. Nebenwinkel betragen zusammen 180^0 oder $2R$, denn es ist $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 2R$. Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein rechter Winkel.

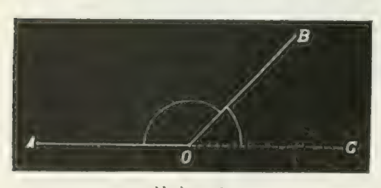


Fig. 19.

Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über dessen Scheitel hinaus, so erhält man den Scheitelwinkel desselben. Der Winkel b in Fig. 20 ist der Scheitelwinkel zu dem Winkel a und ebenso ist der Winkel c der Scheitelwinkel zu dem Winkel d. Scheitelwinkel sind also je 2 Winkel auf entgegengesetzten Seiten des Schnittpunktes zweier sich schneidender Geraden. Sie haben den Scheitel gemeinsam und die Schenkel des einen sind die Rückwärtsverlängerungen der Schenkel des anderen Winkels.

Fig. 20.

Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Mit Hilfe der von den Nebenwinkeln bekannten Eigenschaften läßt sich dieser Satz, wie folgt, beweisen:

Der $\sphericalangle c$ ist der Nebenwinkel zu dem $\sphericalangle a$ und zu dem $\sphericalangle b$; es ist daher $\sphericalangle a + \sphericalangle c = 2R$, und

$\sphericalangle c + \sphericalangle b = 2R$; sind zwei Größen $[(\sphericalangle a + \sphericalangle c)$ und $(\sphericalangle c + \sphericalangle b)]$ einer dritten Größe $(2R)$ gleich, so sind sie auch untereinander gleich; es ist daher

$\sphericalangle a + \sphericalangle c = \sphericalangle c + \sphericalangle b$; da jede Größe sich selbst gleich ist, so ist auch $\sphericalangle c = \sphericalangle c$. Subtrahiert man von beiden Seiten den $\sphericalangle c$, so bleibt*)

$\sphericalangle a = \sphericalangle b$.

B. *Gegen-, Wechsel- und Anwinkel.*

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten Geraden geschnitten werden, so erhält man um die beiden Schnittpunkte je 4 Winkel, welche zueinander in nachstehenden Beziehungen stehen und folgende Namen führen:

---

*) Vgl. Arithmetik, Formellehre, § 52: Gleiches von Gleichem subtrahiert, gibt Gleiches.

a) Innere Winkel, innerhalb der beiden geschnittenen Geraden und zu beiden Seiten der Schneidenden gelegen; Fig. 21, $\sphericalangle$ *c, d, e, f.*

b) Äußere Winkel, außerhalb der beiden geschnittenen Geraden und zu beiden Seiten der Schneidenden: $\sphericalangle$ *a, b, g, h.*

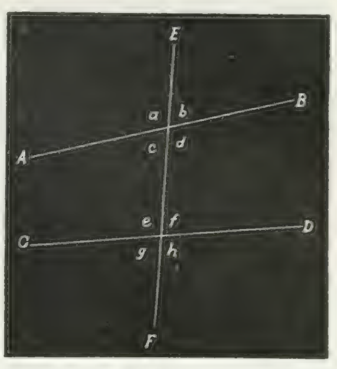


Fig. 21.

c) Gegenwinkel, ein äußerer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der Schneidenden, jedoch an verschiedenen Scheiteln: $\sphericalangle$ *a* und *e*, $\sphericalangle$ *b* und *f*, $\sphericalangle$ *c* und *g*, $\sphericalangle$ *d* und *h*.

d) Wechselwinkel, zwei äußere oder zwei innere Winkel auf entgegengesetzten Seiten der Schneidenden und an verschiedenen Scheiteln: $\sphericalangle$ *a* und *h*, $\sphericalangle$ *b* und *g*, $\sphericalangle$ *c* und *f*, $\sphericalangle$ *d* und *e*.

e) Anwinkel, zwei innere oder zwei äußere Winkel auf derselben Seite der Schneidenden, jedoch an verschiedenen Scheiteln: $\sphericalangle$ *a* und *g*, $\sphericalangle$ *b* und *h*, $\sphericalangle$ *c* und *e*, $\sphericalangle$ *d* und *f*.

Laufen die beiden geschnittenen Geraden parallel zueinander, Fig. 22, so entstehen um den Schnittpunkt immer dieselben 4 Winkel, wie weit die Parallelen auch voneinander entfernt sein mögen. Diese Winkel werden sich, wenn die Gerade CD längs der Schneidenden EF parallel bis in die Bahn AB fortbewegt wird, decken. Es fallen dann je 2 Gegenwinkel aufeinander, je 2 Wechselwinkel gehen in Scheitelwinkel über und je 2 Anwinkel werden zu Nebenwinkeln.

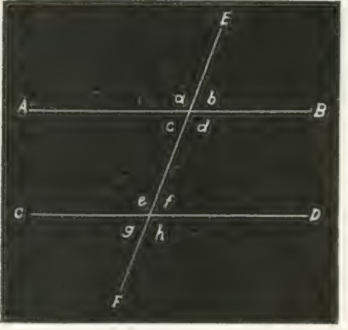


Fig. 22.

Es ist sonach:

1. bei den Gegenwinkeln:

$\sphericalangle a = \sphericalangle e$
$\sphericalangle b = \sphericalangle f$
$\sphericalangle c = \sphericalangle g$
$\sphericalangle d = \sphericalangle h$

2. bei den Wechselwinkeln:

$\sphericalangle a = \sphericalangle h$
$\sphericalangle b = \sphericalangle g$
$\sphericalangle c = \sphericalangle f$
$\sphericalangle d = \sphericalangle e$

3. bei den Anwinkeln:

$\sphericalangle a + \sphericalangle g = 2R$
$\sphericalangle b + \sphericalangle h = 2R$
$\sphericalangle c + \sphericalangle e = 2R$
$\sphericalangle d + \sphericalangle f = 2R$

oder in Worten:

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden geschnitten, so gelten die Regeln:

a) Je 2 Gegenwinkel sind einander gleich,
b) je 2 Wechselwinkel sind einander gleich, und
c) je 2 Anwinkel ergänzen sich zu $2R$.

5. Winkel, deren Schenkel zueinander parallel oder senkrecht sind.

Es wäre in Fig. 23 I. $AB \parallel DE$, und $BC \parallel EF$.

Verlängert man in Fig. 23 I. den Schenkel DE über den Scheitel E hinaus, bis er die Gerade BC trifft, so ist nach vorigem $\sphericalangle$ *c* als Gegen-

winkel $= \sphericalangle c$; $\sphericalangle c$ ist aber nach demselben Satze auch gleich $\sphericalangle b$, folglich ist $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$.

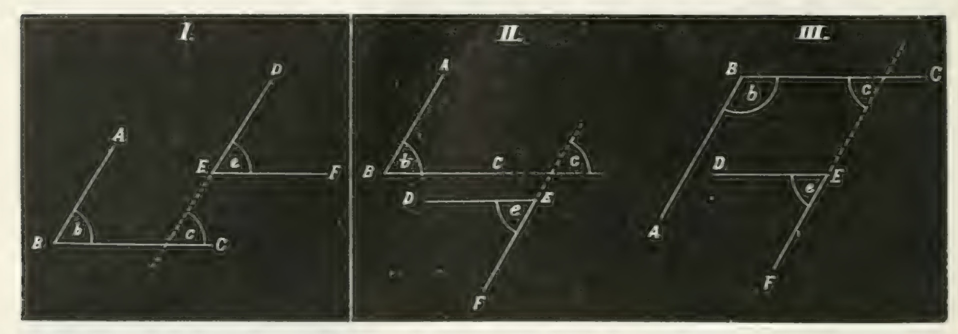


Fig. 23.

In derselben Weise erhalten wir in Fig. 23 II., $\sphericalangle e = \sphericalangle c$, und weiters $\sphericalangle c = \sphericalangle b$, daher auch $\sphericalangle e = \sphericalangle b$, oder $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$. Daraus folgt:

a) Zwei Winkel, deren beide Schenkelpaare nach derselben oder nach entgegengesetzter Richtung parallel gehen, sind einander gleich.

Verlängert man in Fig. 23 III. den Schenkel EF über den Scheitel E hinaus, so bildet diese Verlängerung mit der Geraden BC den $\sphericalangle c$, welcher als Gegenwinkel dem $\sphericalangle e$ gleich ist. Der $\sphericalangle c$ ist aber ein Anwinkel zu dem $\sphericalangle b$, und weil $AB \parallel EF$, so ergänzen sich beide auf $2R$; es ist demnach $\sphericalangle e + \sphericalangle b = 2R$, oder $\sphericalangle ABC + \sphericalangle DEF = 2R$, d. i. in Worten:

b) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel gehen, jedoch so, daß das eine Paar nach derselben, das andere Schenkelpaar aber nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist, ergänzen sich zu $2R$.

Die Schenkel der Winkel ABC und DEF in Fig. 24 I. und II. sind paarweise parallel, und zwar im ersten Falle beide Paare in der-

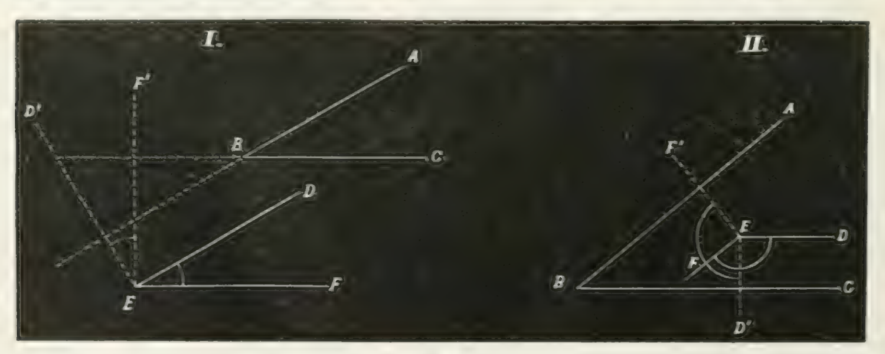


Fig. 24.

selben Richtung, im zweiten Falle ein Paar in derselben, das andere Schenkelpaar aber in entgegengesetzter Richtung. Es sind somit die Winkel im ersten Falle einander gleich, während sie sich im zweiten Falle zu $2R$ ergänzen. Denkt man sich nun in beiden Fällen den Winkel DEF um je 90^0 gedreht, d. i. in eine Lage gebracht, in welcher die

Schenkel der Winkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, so müssen auch diese Winkel, weil sie in ihrer Größe unverändert geblieben sind, mit dem ursprünglichen Winkel ABC gleich sein, beziehungsweise sich zu $2R$ ergänzen. Daraus folgt aber:

c) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind entweder einander gleich oder sie ergänzen sich auf $2R$.

6. Konstruktionsaufgaben.

a) Einen gegebenen Winkel, Fig. 25, $\sphericalangle ABC$, zu übertragen.

Man beschreibe mit dem beliebigen Halbmesser DB aus den Punkten B und B' der Geraden AB und $A'B'$ je einen Bogen und erhält hiedurch die Schnittpunkte D, D' und D'. Sodann übertrage man die Länge des Bogens DE auf den zweiten Bogen von D' aus und verbinde den Schnittpunkt E' mit dem Scheitel B'. Der Winkel ABC muß dann dem Winkel $A'B'C''$ gleich sein, weil beiden Winkeln die gleiche Bogenlänge DE entspricht.

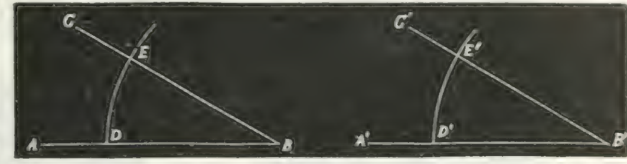


Fig. 25.

b) Einen gegebenen Winkel, Fig. 26, $\sphericalangle ABC$, zu halbieren.

Man beschreibe aus dem Scheitel des Winkels ABC einen Bogen AC und halbiere diesen, indem man aus den beiden Endpunkten A und C Bogen von gleichem Halbmesser zieht. Verbindet man nun die Schnittpunkte dieser Bogen, D und E, so wird der Bogen AC durch die Linie DE in dem Punkte F halbiert. Es ist somit arc. $AF =$ arc. FC, d. i. die beiden Winkel ABF und FBC haben die gleichen Bogen und sind somit einander gleich

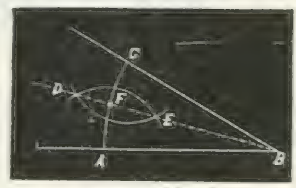


Fig. 26.

III. Kapitel.

Die geradlinig begrenzten Figuren.

§ 6. Das Dreieck.

1. Begriff und Bestandteile des Dreieckes.

Eine von drei geraden Linien begrenzte ebene Fläche wird ein **Dreieck** genannt. Das Zeichen hiefür ist $\triangle$. Die Begrenzungslinien eines Dreieckes heißen **Seiten**; in ihrer Summe bilden sie den **Umfang** des Dreieckes. Jedes Dreieck besteht aus drei Seiten, drei Ecken und drei Winkeln.

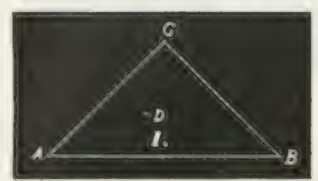


Fig. 27.

Eine ebene Fläche, welche nur von geraden Linien begrenzt ist, heißt eine **geradlinige Figur**. Es ist daher das Dreieck, weil dasselbe nur von drei Geraden begrenzt ist, die **einfachste geradlinige Figur**. Die Ecken eines Dreieckes entstehen dort, wo sich zwei Seiten desselben treffen. Die Bezeichnung eines Dreieckes geschieht entweder durch die Buchstaben an den Ecken, z. B. $\triangle ABC$, Fig. 27, oder durch einen in die Mitte desselben gesetzten Buchstaben, z. B. $\triangle D$, oder auch durch eine ebendort angebrachte Zahl, z. B. $\triangle 1$.

2. Grundsätze für die Seiten des Dreieckes.

a) In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Es ist z. B. in Fig. 27 die gerade Entfernung der Punkte A und B, also die Strecke AB kürzer, als die Strecken AC und CB zusammen genommen.

Aus der Umkehrung dieses Satzes folgt:

b) In jedem Dreiecke ist die Differenz zweier Seiten stets kleiner als die dritte Seite.

Jene Seite des Dreieckes, über welcher man sich das Dreieck errichtet denkt, wird als dessen Grundlinie bezeichnet. Der dieser Seite gegenüberliegende Eckpunkt heißt der Scheitel (Spitze) des Dreieckes.

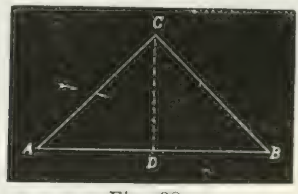


Fig. 28.

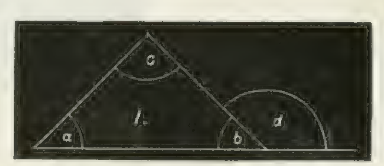


Fig. 29.

Fällt man aus dem Scheitel eines Dreieckes auf dessen Grundlinie eine Senkrechte, so wird diese die Höhe des Dreieckes genannt. In Fig. 28 wurde die Seite AB als Grundlinie angenommen; es ist deshalb die Linie CD die Höhe dieses Dreieckes.

3. Grundsätze für die Winkel des Dreieckes.

Jeder Winkel eines Dreieckes wird von zwei Seiten eingeschlossen; die dritte Seite liegt ihm gegenüber. Jede Seite eines Dreieckes hat zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel.

Verlängert man eine Seite eines Dreieckes, so bildet die Verlängerung mit der anstoßenden Dreieckseite einen Außenwinkel des Dreieckes; die drei Winkel des Dreieckes heißen im Gegensatze zu diesem innere Winkel (Innenwinkel). Der Winkel d in Fig. 29 ist ein Außenwinkel; der Nebenwinkel b ist der ihm anliegende, die Winkel a und c sind die ihm gegenüberliegenden inneren Winkel des Dreieckes I.

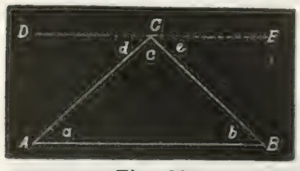


Fig. 30.

a) Die Summe der inneren Winkel eines Dreieckes beträgt $2\,R$.

Um diesen Satz zu beweisen, zieht man durch irgend einen Eckpunkt des Dreieckes eine Parallele zu der gegenüberliegenden Dreieckseite, z. B. $DE \parallel AB$, Fig. 30. Hiedurch entstehen um den Punkt C zwei neue Winkel d und e. Diese bilden mit dem bereits vorhandenen $\sphericalangle c$ einen gestreckten Winkel. Es ist daher

$\sphericalangle d + \sphericalangle c + \sphericalangle e = 2\,R$. Nachdem $DE \parallel AB$, so ist auch

$\sphericalangle d = \sphericalangle a$ als Wechselwinkel, und ebenso

$\sphericalangle e = \sphericalangle b$ als Wechselwinkel. Setzt man diese Werte für die Winkel d und e in obige Gleichung ein, so folgt

$\sphericalangle a + \sphericalangle c + \sphericalangle b = 2\,R$, oder

$\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = 2\,R$.

Aus diesem Satze läßt sich weiters ableiten:

b) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt, so findet man den dritten, indem man die Summe der beiden ersteren von $2\,R$ abzieht.

c) Die Summe zweier Winkel in einem Dreiecke muß stets kleiner sein als $2\,R$.

d) Sind je zwei Winkel zweier Dreiecke gleich, so müssen auch die beiden dritten Winkel der Dreiecke einander gleich sein, und

e) der Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel des Dreieckes.

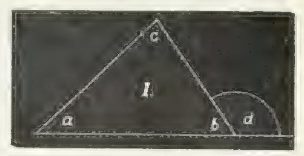


Fig. 31.

Der letzte Satz läßt sich wie folgt begründen:

Der Außenwinkel d des Dreieckes I in Fig. 31 bildet mit dem Innenwinkel b als Nebenwinkel $2\,R$; es ist also

$\sphericalangle d + \sphericalangle b = 2\,R$. Die Summe der Innenwinkel eines Dreieckes beträgt ebenfalls $2\,R$, also

$\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = 2\,R$. Schluß: Zwei Größen $[(\sphericalangle d + \sphericalangle b)$ und $(\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c)]$ einer dritten Größe ($2\,R$) gleich sind auch untereinander gleich, somit

$\sphericalangle d + \sphericalangle b = \sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c$. Zieht man von beiden Seiten dieser Gleichung die sich selbst gleiche Größe $\sphericalangle b = \sphericalangle b$ ab, so

$\sphericalangle b = \sphericalangle b$

bleibt $\sphericalangle d = \sphericalangle a + \sphericalangle c$.*)

4. Einteilung der Dreiecke.

A. Nach den Seiten.

Mit Rücksicht auf die Länge der Seiten können die Dreiecke sein:

a) Ungleichseitig, wenn alle drei Seiten untereinander verschieden lang sind, Fig. 32, $\triangle\,A\,B\,C$.

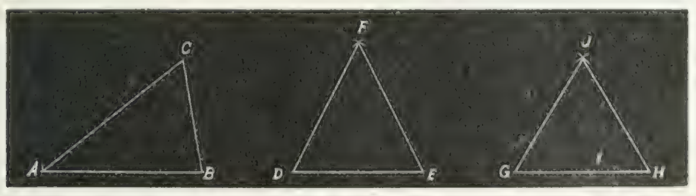


Fig. 32.

b) Gleichschenkelig, wenn zwei Seiten des Dreieckes gleich lang sind, die dritte aber verschieden ist, Fig. 32, $\triangle\,D\,E\,F$, und

c) gleichseitig, wenn alle drei Seiten des Dreieckes untereinander gleich lang sind, Fig. 32, $\triangle\,J\,G\,H$, wobei $G\,H = H\,J = J\,G$.

In einem gleichschenkligen Dreiecke nimmt man immer die ungleiche Seite als Grundlinie an, Fig. 32, $D\,E$; die beiden gleichen Seiten heißen die Schenkel des Dreieckes, Fig. 32, $D\,F$ und $E\,F$.

*) $\sphericalangle d + \sphericalangle b - \sphericalangle b = \sphericalangle a + \sphericalangle b - \sphericalangle b + \sphericalangle c$, gibt $\sphericalangle d = \sphericalangle a + \sphericalangle c$.

B. *Nach den Winkeln.*

Bezüglich der Winkel unterscheidet man drei Arten von Dreiecken.

a) Spitzwinklige Dreiecke, in welchen alle drei Winkel spitz sind, Fig. 33, ABC.

b) Rechtwinklige Dreiecke, in welchen ein Winkel ein rechter ist, Fig. 33, DEF; $\sphericalangle D = R$.

c) Stumpfwinklige Dreiecke, in welchen ein Winkel ein stumpfer ist, Fig. 33, HGJ; $\sphericalangle G < 2R$ und $\sphericalangle G > R$.

In rechtwinkligen Dreiecken heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, Fig. 33, FE, die Hypotenuse; die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten werden Katheten genannt, DE und DF.

Wird in einem stumpfwinkligen Dreiecke GHJ, Fig. 33, die Seite GH als Grundlinie angenommen, so ist J der Scheitel dieses Dreieckes.

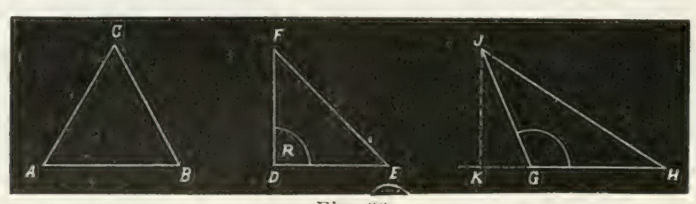


Fig. 33.

Die Höhe liegt in diesem Falle außerhalb des Dreieckes und es muß die Grundlinie über G hinaus verlängert werden, um von der Höhe getroffen zu werden. Es ist also GH die Grundlinie und JK die Höhe des Dreieckes GHJ.

5. Bestimmungsstücke des Dreieckes.

Bei allen geradlinigen Figuren, also auch beim Dreiecke, sind besonders zwei Merkmale vorhanden, nämlich die Größe und die Gestalt (auch Form genannt). Man kann somit zwei Dreiecke in dreierlei Beziehung miteinander vergleichen, und zwar: *a)* nur mit Rücksicht auf ihre Größe, *b)* nur mit Rücksicht auf ihre Gestalt und *c)* mit Rücksicht auf ihre Größe und Gestalt.

Zwei Dreiecke sind gleich groß, wenn die Flächen, welche von ihren Seiten eingeschlossen werden, einander gleich sind. Man sagt, die beiden Dreiecke sind flächengleich oder kurz gleich. Das Zeichen für „gleich" ist das bekannte Gleichheitszeichen $=$.

Zwei Dreiecke haben dieselbe Gestalt, wenn die gegenseitige Lage ihrer Seiten in beiden Dreiecken dieselbe ist. Die beiden Dreiecke sind dann ähnlich. Das Ähnlichkeitszeichen ist $\sim$.

Zwei Dreiecke haben dieselbe Größe und Gestalt, wenn sie, aufeinander gelegt, vollkommen zusammenfallen, d. i. sich vollständig decken. Die beiden Dreiecke sind dann kongruent.*) Das Zeichen für „kongruent" ist $\simeq$ oder $\cong$ (d. h. gleich und ähnlich). Da zwei kongruente Dreiecke, aufeinandergelegt, sich decken müssen, so müssen sie auch in allen ihren sechs Bestandteilen, nämlich in den drei Seiten und den drei Winkeln übereinstimmen. Hieraus folgt:

*) Kongruent stammt von dem lateinischen Worte congruens = übereinstimmend.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn alle ihre Seiten und Winkel in derselben Reihenfolge paarweise gleich sind, und weiters:

In kongruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Da durch die Größe zweier Winkel eines Dreieckes auch schon der dritte Winkel bestimmt ist, und ebenso von der Größe gewisser Seiten und Winkel auch die Größe der anderen Seiten abhängt, so kann man aus der Übereinstimmung von weniger als 6 Bestandteilen in zwei Dreiecken schon auf ihre Kongruenz schließen. Um nun zu sehen, wie viele und welche Bestandteile in zwei Dreiecken zu deren Kongruenz paarweise gleich sein müssen, muß man untersuchen, mit Hilfe wie vieler und welcher Stücke man in der Lage ist, zwei Dreiecke von bestimmter Größe und Gestalt zu konstruieren. Diese Untersuchung zeigt uns, daß drei Stücke notwendig sind, um mit denselben kongruente Dreiecke zeichnen zu können, wenn sich unter diesen Stücken wenigstens eine Seite befindet. Diese drei Stücke, welche die Gestalt und Größe eines Dreieckes unzweideutig bestimmen, nennt man Bestimmungsstücke. Es gilt daher der Satz:

Ein Dreieck ist bestimmt durch drei voneinander unabhängige Stücke.

Die vier verschiedenen Fälle, welche hier möglich sind, führen zu den vier Kongruenzfällen des Dreieckes, welche im nächsten Punkte behandelt werden sollen.

6. Die Kongruenz der Dreiecke.

A. Im allgemeinen.

a) Es ist ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel gegeben sind.

Man ziehe, Fig. 34, $AB = a$ und trage im Endpunkte A den Winkel b so auf, daß der eine Schenkel in die Lage AB, der andere Schenkel in die Richtung AC zu liegen kommt. Auf dieselbe Weise verfahre man mit dem Winkel c, welcher vom Punkte B aus so aufzutragen ist, daß der eine Schenkel mit der Linie BA zusammenfällt, während der andere Schenkel in der Richtung BC liegt. Der Schnittpunkt dieser beiden Schenkel AC und BC, also der Punkt C, ist der dritte Eckpunkt des gesuchten Dreieckes.

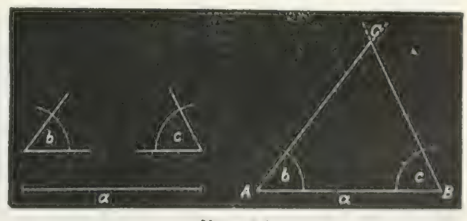


Fig. 34.

Jedes andere Dreieck, welches mit Hilfe dieser drei Bestimmungsstücke a, $\sphericalangle b$, $\sphericalangle c$ gezeichnet werden würde, muß auch mit dem Dreiecke ABC sowohl in Größe als Gestalt übereinstimmen, d. i. kongruent sein. Daraus folgt:

I. Kongruenzfall. Zwei Dreiecke, welche eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel paarweise gleich haben, sind kongruent.

b) Es ist ein Dreieck zu zeichnen, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Man mache, Fig. 35, $AB = a$ und trage von A aus den Winkel c so auf, daß der eine Schenkel in die Linie AB und der zweite in die Richtung AC fällt. Sodann mache man $AC = b$ und verbinde den erhaltenen Schnittpunkt C mit B. Konstruiert man mit diesen drei Bestimmungsstücken a, b, $\sphericalangle c$ ein anderes Dreieck, so muß dieses mit dem früheren $\triangle ABC$ sowohl in Größe als Gestalt vollständig übereinstimmen, d. i. kongruent sein. Es folgt sonach:



Fig. 35.

II. Kongruenzfall. Zwei Dreiecke, welche je zwei Seiten und den von diesen eingeschlossenen Winkel gleich haben, sind kongruent.

c) Es ist ein Dreieck zu zeichnen, wenn zwei Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Man mache, Fig. 36, $AB = a$, übertrage von A aus den Winkel c so, daß der eine Schenkel in die Linie AB fällt und verlängere den zweiten Schenkel in der Richtung AC. Sodann beschreibe man von B aus einen Bogen mit Halbmesser b; im Schnittpunkte C liegt alsdann der gesuchte dritte Eckpunkt des Dreieckes. Wollte man mit diesen drei Bestimmungsstüken a, b, $\sphericalangle c$, ein anderes Dreieck konstruieren, so muß auch dieses mit $\triangle ABC$ in Größe und Gestalt vollständig gleich, d. i. kongruent sein. Daraus folgt:

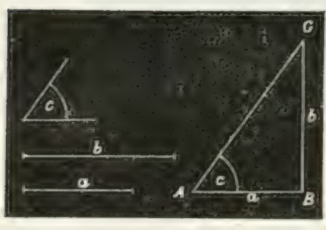


Fig. 36.

III. Kongruenzfall. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie je zwei Seiten und den der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel gleich haben.

d) Es ist ein Dreieck zu konstruieren, wenn alle drei Seiten gegeben sind.

Man ziehe, Fig. 37, $AB = a$ und beschreibe aus B einen Bogen mit dem Halbmesser b und aus A einen Bogen mit dem Radius c. Im Schnittpunkte C dieser Bogen liegt der dritte Eckpunkt des Dreieckes. Jedes andere Dreieck, welches dieselben Bestimmungsstücke a, b, c enthält, wird mit dem Dreiecke ABC flächengleich und ähnlich, d. i. kongruent sein. Hieraus folgt:

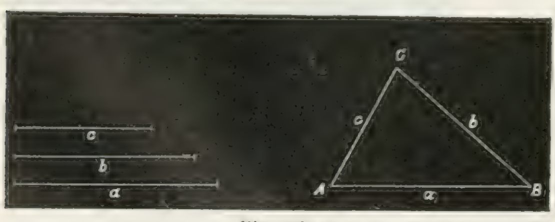


Fig. 37.

IV. Kongruenzfall. Zwei Dreiecke, welche alle drei Seiten paarweise gleich haben, sind kongruent.

B. Kongruenz rechtwinkliger Dreiecke.

Da bei allen rechtwinkligen Dreiecken der von den Katheten eingeschlossene Winkel gleich, d. i. 1 R ist, so ändern sich vor-

stehende 4 Kongruenzfälle in ihrer Anwendung auf rechtwinklige Dreiecke, wie folgt:

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie

a) eine Kathete und einen spitzen Winkel oder die Hypotenuse und einen spitzen Winkel, oder

b) beide Katheten, oder

c) je eine Kathete und die Hypotenuse paarweise gleich haben.

7. Anwendung der Kongruenzsätze.

Aus der Beschaffenheit der gleichschenkligen Dreiecke lassen sich noch nachstehende Eigenschaften derselben ableiten:

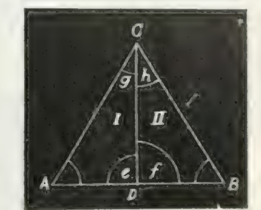


Fig. 38.

Halbiert man die Grundlinie des gleichschenkligen Dreieckes ABC, Fig. 38, und verbindet man weiters diesen Halbierungspunkt D mit dem Scheitel C dieses Dreieckes, so entstehen die beiden Dreiecke I und II, von welchen sich behaupten läßt, daß sie kongruent sind, denn es ist


$AC = BC$ als Schenkel des gleichschenkligen Dreieckes ABC,


$AD = DB$, weil AB halbiert wurde und

$CD = CD$, weil diese Seite beiden Dreiecken gemeinsam angehört.

$\triangle I \cong \triangle II.$

Die beiden Dreiecke sind somit nach dem IV. Kongruenzfalle kongruent. Aus der Eigenschaft kongruenter Dreiecke, daß gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber liegen, folgt, daß $\sphericalangle c = \sphericalangle f = R$,*) $\sphericalangle g = \sphericalangle h$ und $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

Aus der Gleichheit dieser Winkel ergeben sich folgende Sätze:

a) Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes sind einander gleich.

b) Die Verbindungslinie des Halbierungspunktes der Grundlinie mit dem Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes halbiert den Winkel am Scheitel und steht senkrecht auf der Grundlinie dieses Dreieckes.

c) Die Senkrechte aus dem Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie halbiert die letztere.

Das gleichseitige Dreieck ist zugleich auch ein gleichschenkliges; es ist somit leicht einzusehen, daß vorstehende Sätze auch für das gleichseitige Dreieck Anwendung finden und daß in diesem, da alle drei Seiten einander gleich sind, auch alle Winkel untereinander gleich sein müssen, also einer $\frac{2R}{3} = \frac{180^0}{3} = 60^0$ mißt

8. Konstruktionsaufgaben.

a) In dem Punkte C, Fig. 39, der Geraden AB eine Senkrechte zu errichten.

Man trage von C aus nach beiden Seiten gleichgroße Strecken Ca und Cb auf, beschreibe aus a und b mit genügend großem Halbmesser zwei gleiche Bogen und verbinde den erhaltenen Schnittpunkt mit C; CD steht dann $\perp$ auf AB (warum?).

b) Eine Strecke durch eine Senkrechte zu halbieren.

---

*) $\sphericalangle e$ und $\sphericalangle f$ sind Nebenwinkel; wenn diese einander gleich sind, muß jeder einem Rechten gleich sein. Vgl. § 5, Punkt 4.

Man beschreibe. Fig. 40, aus den Endpunkten der Strecke mit genügend großen Zirkelöffnungen zwei gleiche Bogen nach oben und nach unten und verbinde die Schnittpunkte; $EG = GF$ (warum?).

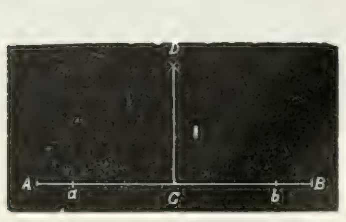


Fig. 39.

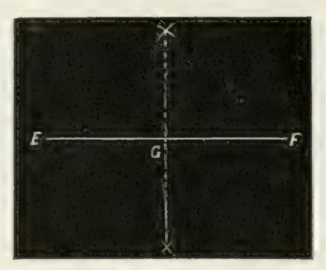


Fig. 40.

c) Einen Winkel zu halbieren.

Man beschreibe, Fig. 41, aus dem Scheitel des Winkels einen Bogen, der beide Schenkel desselben trifft. Aus diesen Schnittpunkten beschreibe man wieder mit

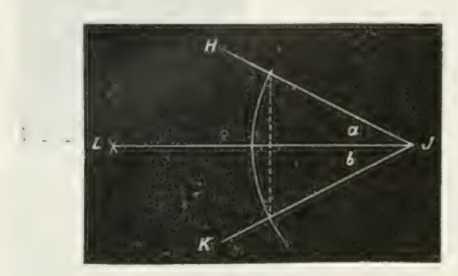


Fig. 41.

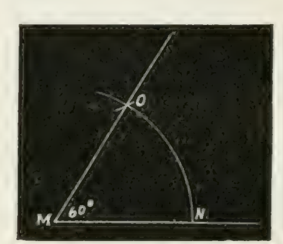


Fig. 42.

beliebiger Zirkelspannung zwei sich schneidende Bogen und verbinde den Schnittpunkt L mit dem Scheitel des Winkels. Es ist dann $\sphericalangle a = \sphericalangle b$ (warum?).

d) Über einer Geraden von einem Punkte aus einen Winkel von 60^0 a. T. zu errichten.

Man schneide, Fig. 42, auf der Geraden von M aus ein Stück MN ab, beschreibe mit dieser Strecke als Halbmesser von M und N aus zwei Kreisbogen und verbinde den Schnittpunkt O mit M; $\sphericalangle OMN = 60^0$ a. T. (warum?).

e) Im Endpunkte einer Strecke eine Senkrechte zu errichten.

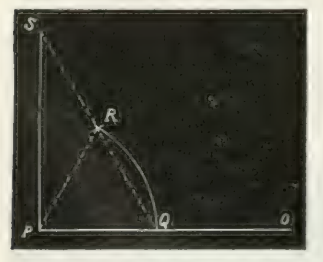


Fig. 43.

Man konstruiere, Fig. 43, nach *d)* in P einen Winkel von 60^0 und beschreibe von R aus mit der gleichen Zirkelöffnung (PQ) einen Bogen gegen S, verbinde Q mit R und verlängere diese Gerade, bis sie den Bogen in S trifft. $\sphericalangle SPQ = 1\,R$ (warum?).

9. Über weitere besondere Eigenschaften des Dreieckes.

a) Das Dreieck ABC in Fig. 44 ist gleichseitig; es ist demnach $AB = BC = CA$, und $\sphericalangle a = \sphericalangle b = \sphericalangle c$. Verlängert man in diesem Dreiecke die Seite AB bis D und verbindet man D mit C, so entsteht ein neues Dreieck ADC. Dieses Dreieck hat mit dem früheren die Seite AC und den $\sphericalangle a$ gemeinschaftlich. Die Seite AB wurde um das Stück BD verlängert, und ebenso ist der Winkel c um den Winkel e größer geworden. Wenn nun der Winkel a gleich war dem Winkel b und ebenso dem Winkel c, der Winkel a aber unverändert blieb und der Winkel c um den Winkel e größer wurde, so mußte, weil die Winkelsumme in einem Dreiecke immer $2\,R$ beträgt, der Winkel b um den Winkel e kleiner werden, d. h. es ist der Winkel d um den Winkel e kleiner als der Winkel b.

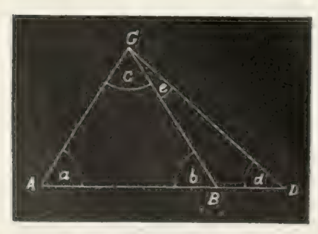


Fig. 44.

Das Dreieck ADC besteht also aus folgenden Winkeln: $\sphericalangle A = \sphericalangle a = \frac{2R}{3}$, $\sphericalangle D = \sphericalangle b - \sphericalangle e$, daher $< \frac{2R}{3}$, und $\sphericalangle C = \sphericalangle e + \sphericalangle c$, somit $> \frac{2R}{3}$. Vergleicht man nun die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten, so zeigt es sich, daß dem größten Winkel C die längste, dem kleinsten Winkel D die kürzeste und dem mittelgroßen Winkel A die Seite von mittlerer Größe gegenüberliegt. Hieraus folgt:

Der größeren Seite eines Dreieckes liegt der größere Winkel, und der kleineren Seite der kleinere Winkel gegenüber.

Aus diesem Grunde ist in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse die längste Dreieckseite.

b) Zieht man aus einem Punkte C, Fig. 45, auf die Gerade AB eine Senkrechte CD und zugleich mehrere schiefe Strecken CE, CF, CG, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke CDE, CDF und CDG. In diesen Dreiecken ist die Kathete CD kürzer als jede der Hypotenusen CE, CF oder CG. Hieraus folgt:

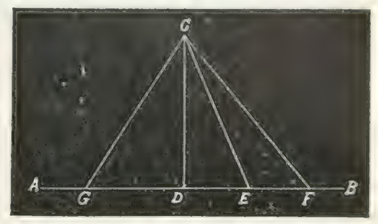


Fig. 45.

Die Senkrechte ist die kürzeste Linie, die aus einem Punkte zu einer Geraden gezogen werden kann. Die Senkrechte gibt den Abstand eines Punktes von einer Geraden an.

c) Wenn man die Halbierungspunkte der Seiten eines Dreieckes mit den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten verbindet, so schneiden sich diese drei Linien in einem Punkte. Dieser Punkt, Fig. 46, O, heißt der Schwerpunkt des Dreieckes.

d) Wählt man in einem Dreiecke der Reihe nach alle drei Seiten als Grundlinien und errichtet man in jedem Falle die zugehörige Höhe, so treffen sich die drei Höhen ebenfalls in einem einzigen Punkte, Fig. 47, O.

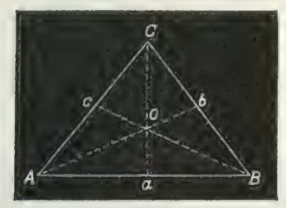


Fig. 46.

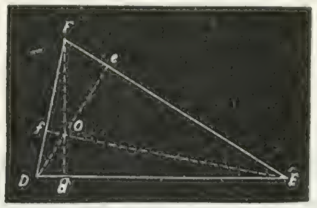


Fig. 47.

e) Errichtet man in den Halbierungspunkten der Seiten eines Dreieckes Senkrechte, so treffen diese in einem Punkte zusammen. Dieser Punkt, Fig. 48, O, hat die Eigenschaft, daß er von allen Eckpunkten des Dreieckes gleichweit absteht; man kann daher aus diesem Punkte einen Kreis beschreiben, der durch alle drei Eckpunkte des Dreieckes geht.

f) Halbiert man die drei Winkel eines Dreieckes, so treffen sich die Halbierungslinien in einem Punkte, Fig. 49, O. Dieser Punkt hat die Eigenschaft, daß er von allen Seiten des Dreieckes den gleichen Abstand hat; man kann daher aus diesem Punkte einen Kreis beschreiben, der alle drei Seiten des Dreieckes berührt.



Fig. 48.



Fig. 49.

Diese vier unter *c)* *d)* *e)* und *f)* erhaltenen Punkte nennt man die vier merkwürdigen Punkte des Dreieckes. Bei einem gleichseitigen Dreiecke fallen diese 4 Punkte alle in einen Punkt zusammen. Verbindet man diesen dann mit den drei Eckpunkten, so zerfällt das gleichseitige Dreieck in drei kongruente Dreiecke, deren jedes gleich dem dritten Teile des ursprünglichen Dreieckes ist. Der Beweis hiefür ist wohl einleuchtend.

§ 7. Das Viereck.

1. Begriff und Bestandteile des Viereckes.

Ist eine ebene Fläche von vier geraden Linien begrenzt, so heißt sie ein Viereck. Jedes Viereck besteht aus vier Seiten, vier Winkeln und vier Ecken. Die Summe der vier Seiten bildet den Umfang des Viereckes. Die Bezeichnung eines Viereckes geschieht entweder durch die Buchstaben an den Eckpunkten, also Viereck $ABCD$, Fig. 50, oder durch einen Buchstaben oder eine Zahl in der Mitte desselben, z. B. Viereck A, oder Viereck I.

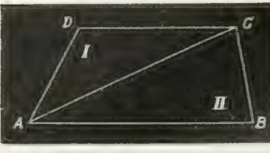


Fig. 50.

Verbindet man zwei nicht an einer Seite gelegene Eckpunkte des Viereckes, z. B. A und C, oder D und B, Fig. 50, so erhält man eine Diagonale. Eine Diagonale teilt das Viereck in zwei Dreiecke; Viereck $ABCD = \triangle I + II$. Da nun die Summe der Innenwinkel eines Dreieckes $2R$ beträgt, so beträgt die Winkelsumme eines Viereckes, weil dasselbe aus zwei Dreiecken bestehend gedacht werden kann, $2 \; 2R$ oder $4R$. Sind in einem Vierecke alle vier Winkel untereinander gleich, so entfällt auf einen $(\frac{4R}{4} = R)$ ein Rechter.

2. Arten der Vierecke.

Die Vierecke werden eingeteilt nach der gegenseitigen Lage der Seiten.

a) Ist in einem Vierecke keine Seite mit der anderen parallel, so heißt dasselbe ein Trapezoid oder ein unregelmäßiges Viereck, Fig. 51, $ABCD$.

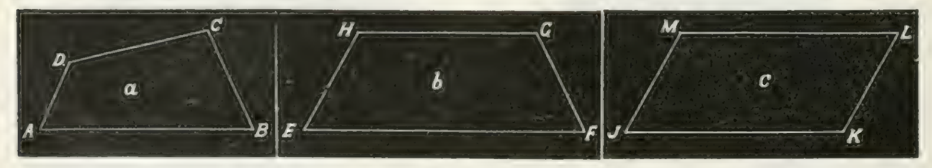


Fig. 51.

b) Sind in einem Vierecke zwei Seiten parallel, die beiden anderen Seiten aber nicht parallel, so wird dasselbe ein Trapez genannt, Fig. 51, $EFGH$; $EF \parallel GH$.

c) Ein Viereck, in welchem je zwei Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm, Fig. 51, $JKLM$; $JK \parallel LM$, $JM \parallel KL$.

In einem Trapeze nimmt man als Grundlinie eine der parallelen Seiten an; der senkrechte Abstand zwischen dieser und der zu ihr parallelen Seite ist dann die Höhe dieses Trapezes.

3. Das Parallelogramm, Einteilung desselben und Lehrsätze vom Parallelogramm.

Sind in einem Parallelogramme alle vier Seiten gleich lang, so heißt es gleichseitig; ist dies nicht der Fall, so wird es ungleichseitig genannt. Ein Parallelogramm, in welchem alle vier Winkel untereinander

gleich sind, heißt **rechtwinklig**. Sind die Winkel in demselben nicht gleich, so nennt man das Parallelogramm **schiefwinklig**; es enthält dann zwei spitze und zwei stumpfe Winkel.

Die Parallelogramme werden, je nachdem ihre Winkel und Seiten untereinander gleich sind oder nicht, wie folgt, benannt:

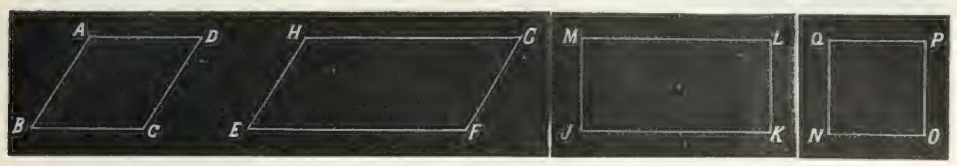


Fig. 52.

Schiefwinklig und gleichseitig — **Rhombus** (Raute), Fig. 52, $ABCD$.
Schiefwinklig und ungleichseitig — **Rhomboïd**, Fig. 52, $EFGH$.
Rechtwinklig und ungleichseitig — **Rechteck**, Fig. 52, $JKLM$
Rechtwinklig und gleichseitig — **Quadrat**, Fig. 52, $NOPQ$.

Zieht man in einem Parallelogramme, Fig. 53, $ABCD$ eine Diagonale, so zerfällt dasselbe in zwei Dreiecke, $\triangle I$ und $\triangle II$. Diese beiden Dreiecke haben eine Linie, die Diagonale AC, gemeinschaftlich, es ist also $AC = AC$; da weiters die beiden Winkel an dieser Seite in jedem Dreiecke als Wechselwinkel paarweise gleich sind, also . . . . . . $\sphericalangle a = \sphericalangle d$

und $\sphericalangle c = \sphericalangle b$,

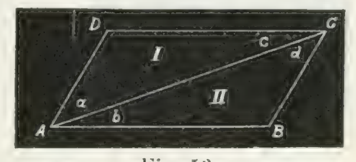


Fig. 53.

so sind die beiden Dreiecke nach dem I. Kongruenzfalle kongruent . . . . $\triangle I \cong \triangle II$.

Daraus folgt, daß auch . . . . $DC = AB$,

$AD = BC$,

und $\sphericalangle D = \sphericalangle B$,

oder in Worten:

a) Eine Diagonale teilt ein Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke.

b) In jedem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, oder Parallele zwischen Parallelen sind gleich und

c) in einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Zieht man in einem Parallelogramme, Fig. 54, $EFGH$, beide Diagonalen, so zerfällt dasselbe in vier Dreiecke, $\triangle I$, $\triangle II$, $\triangle III$, $\triangle IV$, von welchen je zwei gegenüberliegende kongruent sind.

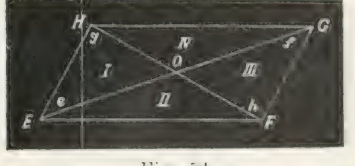


Fig. 54.

Es ist z. B. in den beiden Dreiecken I und III $EH = FG$ als gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms,

ferner $\sphericalangle e = \sphericalangle f$ und $\sphericalangle g = \sphericalangle h$ } als Wechselwinkel.

Die beiden Dreiecke sind somit nach dem I. Kongruenzfalle kongruent, also $\triangle I \cong \triangle III$.

Auf gleiche Weise läßt sich nachweisen, daß $\triangle II \cong \triangle IV$.

Hieraus folgt, daß $EO = OG$ und $HO = OF$, oder in Worten:

d) Die beiden Diagonalen in einem Parallelogramme halbieren sich.

Zieht man in einem Rhombus beide Diagonalen, so zerfällt derselbe ebenfalls in vier Dreiecke. Der Rhombus, Fig. 55, $ABCD$, besteht aus den vier Dreiecken $\triangle I + \triangle II + \triangle III + \triangle IV$. In den beiden Dreiecken I und II ist $AD = AB$, als Seiten des Rhombus, dann $AO = AO$, als beiden Dreiecken gemeinschaftliche Seite und endlich $DO = OB$, denn in jedem Parallelogramme halbieren sich die Diagonalen.

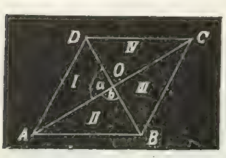


Fig. 55.

Es ist somit $\triangle I \cong \triangle II$.

Daraus folgt, daß $\sphericalangle a = \sphericalangle b = R$,*) demnach $AO \perp DB$, oder in Worten:

e) Die Diagonalen eines Rhombus stehen aufeinander senkrecht.

Zieht man in einem Rechtecke, Fig. 56, $EFGH$, beide Diagonalen EG und FH, so entstehen die beiden Dreiecke HEF und GFE. In denselben ist EF beiden Dreiecken gemeinsam, daher $EF = EF$, dann ist $HE = GF$, als zwei gegenüberliegende Seiten eines Parallelogrammes, und $\sphericalangle E = \sphericalangle F = R$ (Eigenschaft der Rechtecke).

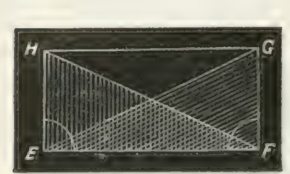


Fig. 56

Es ist somit $\triangle HEF \cong \triangle GFE$. Daraus folgt, daß $HF = EG$, oder in Worten:

f) Die beiden Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Ziehen wir endlich auch in einem Quadrate die beiden Diagonalen so finden wir, wie leicht einzusehen ist, daß dasselbe die Eigenschaften des Rhombus und des Rechteckes in sich vereinigt, d. h.:

g) Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und stehen aufeinander senkrecht.

4. Lehrsätze vom Trapez.

Zieht man in einem Trapeze, Fig. 57, $ABCD$, durch den Punkt C eine Parallele CH zu AB und aus der Mitte E der einen nichtparallelen Seite CB eine Parallele GH zu der zweiten nichtparallelen Seite, so entstehen die beiden Dreiecke CEH und GEB. In diesen Dreiecken ist $CE = EB$, weil die Seite CB halbiert wurde, dann $\sphericalangle a = \sphericalangle b$, als Scheitelwinkel und $\sphericalangle C = \sphericalangle B$, als Wechselwinkel.



Fig. 57.

Die beiden Dreiecke sind somit nach dem I. Kongruenzfalle kongruent, $\triangle CEH \cong \triangle GEB$.

Daraus folgt, daß $EH = EG = \frac{1}{2} HG$.

Zieht man nun auch durch die Mitte E die Linie $EF \parallel AB$, so muß nach dem Satze: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich, auch $EH = FD$ und $EG = FA$ sein.

---

*) Sind zwei Nebenwinkel gleich, dann ist jeder $= R$; vgl. § 5, Punkt 4.

Da nun $EH = EG$, so ist auch $FD = FA = \frac{1}{2} AD$.

Weiters ist $AB = AG + GB$,
und $DC = DH - CH$; durch Addition
ergibt sich $AB + DC = AG + GB + DH - CH$,*)
oder $AB + DC = 2FE$ und

$$FE = \frac{AB + DC}{2}, \text{ oder in Worten:}$$

Zieht man aus der Mitte der einen nichtparallelen Seite eines Trapezes eine Parallele zu den beiden parallelen Seiten, so halbiert diese die zweite nichtparallele Seite und ist gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten.

5. Bestimmungsstücke der Vierecke.

Die Gestalt eines Dreieckes ist durch drei Seiten unzweideutig gegeben. Nicht so ist aber auch ein Viereck durch seine vier Seiten bestimmt. Ein einfacher Versuch, z. B. ein Viereck aus vier miteinander verbundenen Stäben zusammenzusetzen, belehrt uns, daß wir durch Verschiebung dieser Stäbe unzählig viele Vierecke erhalten können, daß somit ein Viereck durch vier Seiten allein nicht bestimmt ist. Nehmen wir aber zu diesen vier Seiten noch einen Winkel oder eine Diagonale als bekannt an, so sehen wir, daß sich mit diesen fünf Stücken, welche voneinander unabhängig sind, nur ein Viereck konstruieren läßt und daß jedes andere, welches diese Bestandteile enthält, mit dem ersteren kongruent sein muß. Daraus folgt: Ein Viereck ist durch fünf voneinander unabhängige Stücke gegeben.

6. Die Kongruenz der Vierecke.

Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie in allen vier Seiten und allen vier Winkeln in derselben Reihenfolge übereinstimmen. Diese Übereinstimmung wird nach den Erläuterungen des Punktes 5 schon erreicht, wenn zwei Vierecke fünf voneinender unabhängige Stücke gleich haben.

Dieser allgemeine Kongruenzsatz stellt sich für Parallelogramme in viel einfacherer Form dar, wie die folgende Konstruktion zeigt:

Es ist ein Parallelogramm zu konstruieren, wenn zwei anstoßende Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

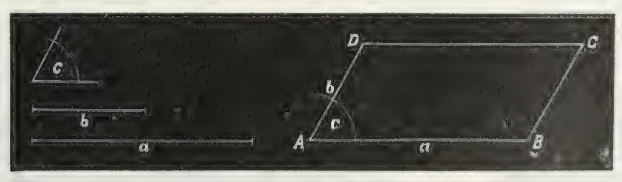


Fig. 58.

In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich und je zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich. Da überdies die Winkelsumme $4R$ beträgt, so sind somit alle 4 Seiten und Winkel gegeben.

---

*) $GB = CH$ folgt aus der Kongruenz der beiden Dreiecke CEH und GEB; es ist also $AG + GB + DH - CH = AG + DH$. Nach der Voraussetzung ist $AD \cdot GH$, somit $AG = DH = FE$ und $AG + DH = 2FE$.

Man mache in Fig. 58 $AB = a$, trage im Punkte A den Winkel c so auf, daß dessen Schenkel in die Richtungen AB und AD fallen, mache $AD = b$ und beschreibe aus B einen Bogen mit dem Halbmesser b und aus D einen Bogen mit dem Radius a. $ABCD$ ist das gesuchte Parallelogramm. Dasselbe muß mit jedem anderen Parallelogramme, welches diese Stücke enthält, kongruent sein. Daraus folgt:

a) Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn sie zwei anstoßende Seiten und den eingeschlossenen Winkel paarweise gleich haben.

Aus diesem Satze ergibt sich auch die weitere Folgerung:

b) Zwei Rhomben sind kongruent, wenn sie eine Seite und einen Winkel, zwei Rechtecke, wenn sie beide anstoßenden Seiten, und zwei Quadrate, wenn sie je eine Seite wechselweise gleich haben.

7. Konstruktionsaufgaben.

a) Ein Quadrat zu zeichnen, wenn eine Seite gegeben ist.

Man konstruiert einen rechten Winkel, macht dessen Schenkel AB und AD, Fig. 59, der gegebenen Seite a gleich und beschreibt aus B und D Kreisbogen mit dem Halbmesser a. Der Schnittpunkt C ist der vierte Eckpunkt des verlangten Quadrates $ABCD$.

b) Es ist ein Rechteck zu konstruieren, wenn zwei anstoßende Seiten gegeben sind.

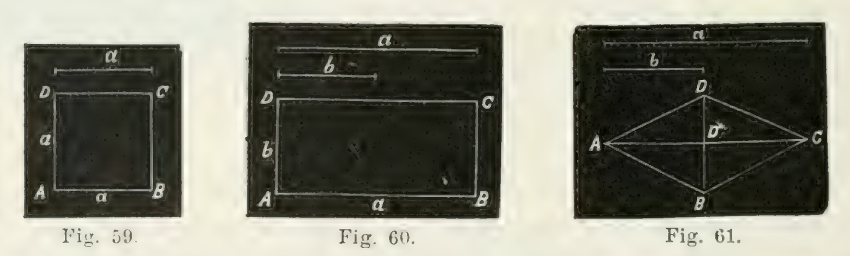


Fig. 59. Fig. 60. Fig. 61.

Man verfährt wie vor, macht, Fig. 60, $AB = a$ und $AD = b$ und beschreibt aus D mit dem Halbmesser a und aus B mit dem Radius b je einen Bogen. Beide Bogen schneiden sich in C. Dann ist $ABCD$ das gewünschte Rechteck.

c) Einen Rhombus zu zeichnen, wenn die beiden Diagonalen gegeben sind. Man macht $AC = a$, Fig. 61, errichtet im Halbierungspunkte O nach beiden Seiten eine Senkrechte und trägt jederseits $\frac{b}{2}$ auf. Durch die Verbindung der vier so erhaltenen Punkte $ACBD$ erhält man den Rhombus $ABCD$.

d) Ein Quadrat zu konstruieren, wenn eine Diagonale gegeben ist. Man verfährt wie vor, nur macht man die beiden Senkrechten von dem Halbierungspunkte aus gleich $\frac{a}{2}$ (Fig. 62).

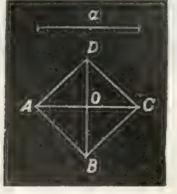


Fig. 62.



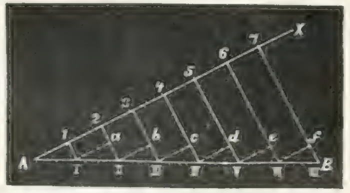
Fig. 63.

e) Zu einer Geraden AB in einem gegebenen Abstande a eine Parallele zu ziehen.

Man errichtet auf die Gerade AB, Fig. 63, in zwei verschiedenen Punkten Senkrechte von der Länge der Strecke a und verbindet die Endpunkte. CD ist dann parallel zu AB.

f) Eine gegebene Strecke AB in mehrere, z. B. 7 gleiche Teile, zu teilen.

Man zieht aus dem Endpunkte A, Fig. 64, der Strecke AB einen Strahl Ax unter einem beliebigen Winkel, trägt auf demselben einen beliebig großen Teil siebenmal auf, verbindet den letzten Teilstrich 7 mit B und zieht zu dieser Linie $B\,7$ durch alle 1—6 Teilstriche Parallele, wodurch auch AB in 7 gleiche Teile geteilt wird.


Fig. 64.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Teilung läßt sich leicht erbringen. Zieht man aus den erhaltenen Teilungspunkten *I, II, III* usf. Parallele zu Ax, so sind die entstandenen Dreiecke mit dem Dreiecke $A\,I\,1$ nach dem I. Kongruenzfalle kongruent. Es ist $I\,a = 1\,2$ (als Parallele zwischen Parallelen); $1\,2$ ist aber gleich gemacht worden der Strecke $A\,1$, somit ist auch $A\,1 = I\,a$; dann ist $\sphericalangle A = \sphericalangle I$ und $\sphericalangle 1 = \sphericalangle a$ (als Parallelwinkel). $\triangle A\,I\,1 \cong I\,II\,a \cong II\,III\,b$ usf. Folglich $A\,I = I\,II = II\,III$ usf.

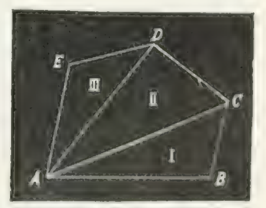
§ 8. Vielecke.

1. Begriff und Bestandteile des Vieleckes.

Eine von mehreren geraden Linien begrenzte ebene Fläche heißt ein Vieleck oder Polygon. Je nachdem dasselbe 3, 4, 5, 6 oder mehr Seiten hat, wird es als Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck usf. bezeichnet. Jedes Vieleck hat ebensoviele Seiten als Winkel oder Eckpunkte. Die Winkel eines Vieleckes können spitze, rechte, stumpfe oder auch erhabene sein. Die drei ersteren nennt man ausspringende, die erhabenen dagegen einspringende Winkel des Vieleckes.

Eine gerade Linie, welche zwei nicht an einer Seite liegende Eckpunkte des Vieleckes verbindet, wird Diagonale genannt. Die Anzahl der aus einem Eckpunkte eines Vieleckes möglichen Diagonalen beträgt um 3 weniger, als die Anzahl der Seiten desselben, oder allgemein $n - 3$, wenn n die Seitenanzahl des Vieleckes bedeutet. Zieht man die aus einem Eckpunkte möglichen Diagonalen in einem Vielecke, so zerfällt dasselbe in soviele Dreiecke, als das Polygon Seiten hat, weniger 2, oder allgemein $n - 2$ Dreiecke, wenn n die Anzahl der Seiten des Vieleckes vorstellt.

In dem Fünfecke $ABCDE$, Fig. 65, sind aus einem Punkte, z. B. A, $5 - 3 = 2$ Diagonalen möglich; das Fünfeck wird dadurch in 3 $(= 5 - 2)$ Dreiecke geteilt. Es ist $ABCDE = \triangle I + \triangle II + \triangle III$. Die Summe der Innenwinkel eines jeden Dreieckes beträgt $2\,R$; es ist somit die Winkelsumme des Fünfeckes $ABCDE = 2\,R + 2\,R + 2\,R = 6\,R$.


Fig. 65.

Die Anzahl der Dreiecke, in welche ein Vieleck durch die aus einem Eckpunkte desselben möglichen Diagonalen zerfällt, läßt sich wie oben durch die Formel $n \triangle - 2 \triangle$ allgemein darstellen. Es ist somit, wenn wir für ein Dreieck dessen Winkelsumme $(2\,R)$ einsetzen, auch die allgemeine Formel für die Winkelsumme jedes Polygons durch $n.\,2\,R - 4\,R$ gegeben, oder in Worten:

In jedem Vielecke beträgt die Winkelsumme doppelt soviel Rechte als es Seiten hat, weniger 4 Rechten.

2. Einteilung der Vielecke.

Die Vielecke werden nach ihren Seiten oder Winkeln, oder nach ihren Seiten und Winkeln eingeteilt und benannt. Ein Vieleck heißt:

a) gleichseitig, wenn alle Seiten gleich sind,
b) ungleichseitig, wenn die Seiten nicht gleich sind,
c) gleichwinklig, wenn alle Winkel gleich sind,
d) ungleichwinklig, wenn die Winkel untereinander nicht gleich sind,
e) regelmäßig, wenn alle Seiten und alle Winkel gleich sind, und
f) unregelmäßig, wenn sowohl Seiten als Winkel untereinander ungleich sind.

3. Die regelmäßigen Vielecke.

Da die Winkel eines regelmäßigen Vieleckes untereinander gleich sind, läßt sich ihre Größe leicht bestimmen. Man berechnet zu diesem Zwecke vorerst die Winkelsumme des Vieleckes und dividiert dann durch die Anzahl der Winkel. Z. B. die Winkelsumme eines regelmäßigen Sechseckes beträgt: $6 \times 2R - 4R = 12R - 4R = 8R$; es ist somit ein Winkel $= \frac{8R}{6} = \frac{4\;8 \times 90\;30}{6\;2} = 4 \cdot 30 = 120^{\circ}$.

Will man ein regelmäßiges Vieleck zeichnen, so zieht man vorerst eine gerade Linie, macht dieselbe mit der gegebenen Seite gleich lang, trägt in ihren Endpunkten den berechneten Vieleckswinkel, auf dem so erhaltenen Schenkel aber neuerdings die Länge der Vielecksseite auf und setzt dieses Verfahren fort, bis das Vieleck geschlossen ist.

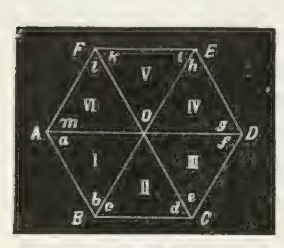


Fig. 66.

Halbiert man die Winkel eines regelmäßigen Vieleckes, z. B. des regelmäßigen Sechseckes *ABCDEF*, Fig. 66, so treffen sich die Halbierungslinien derselben in einem Punkte *O*; das Vieleck zerfällt durch die Halbierungslinien in gleichschenklige (ein regelmäßiges Sechseck in gleichseitige) kongruente Dreiecke *I, II, III, IV, V, VI.*

Diese Dreiecke haben alle je eine Seite (als Vielecksseite) und die beiden ihr anliegenden Winkel wechselweise gleich und sind somit nach dem ersten Kongruenzfalle kongruent; es müssen daher auch die beiden anderen Dreiecksseiten in allen Dreiecken paarweise gleich sein. Daraus folgt, daß der Punkt *O* von allen Eckpunkten des Vieleckes gleichen Abstand hat. Man nennt daher den Punkt *O* den Mittelpunkt des gegebenen regelmäßigen Vieleckes. Aus der Kongruenz der Dreiecke *I* bis *VI* folgt aber auch noch weiter, daß die Höhen dieser Dreiecke, d. i. die Entfernung des Mittelpunktes von einer Vielecksseite, untereinander gleich sind. Es folgt sohin der Satz:

Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes ist von allen Eckpunkten und von allen Seiten desselben gleich weit entfernt.

4. Die Kongruenz der Vielecke.

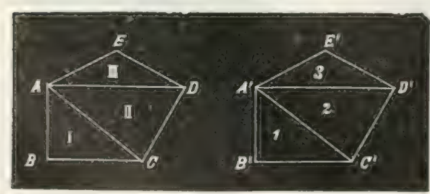


Fig. 67.

Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel in derselben Reihenfolge gleich haben. Wenn die beiden Vielecke *ABCDE* und *A'B'C'D'E'*, Fig. 67, kongruent sind, dann müssen auch die Dreiecke, in welche dieselben durch die Diagonalen *AC, AD* und *A'C', A'D'* zerfallen, kongruent sein. Die Dreiecke *I* und 1, dann *III* und 3, haben folgende Bestandteile nach der Voraussetzung gleich:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' \end{array}\right\}$$ (II. Kongruenzfall) $$\left.\begin{array}{l} AE = A'E' \\ ED = E'D' \\ \sphericalangle E = \sphericalangle E' \end{array}\right\}$$ (II. Kongruenzfall)

$\triangle I \cong \triangle 1$, ferner $\triangle III \cong \triangle 3$.

Aus der Kongruenz der Dreiecke I und 1, dann III und 3, folgt, daß
$AC = A'C'$ und
$AD = A'D'$; nach der Voraussetzung ist aber auch
$CD = C'D'$, es ist somit nach dem IV. Kongruenzfalle
$\triangle II \cong \triangle 2$.

Daraus folgt: Kongruente Vielecke werden durch gleichliegende Diagonalen in gleichviele kongruente Dreiecke zerlegt.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie in derselben Reihenfolge aus gleichvielen kongruenten Dreiecken zusammengesetzt sind.

5. Symmetrische Figuren.

Unter Symmetrie*) versteht man die Übereinstimmung der Teile eines Ganzen untereinander.

Fällt man aus den Eckpunkten des unregelmäßigen Fünfeckes $ABCDE$, Fig. 68, Senkrechte auf die Linie AB und denkt man sich diese Figur um die feste Verbindungslinie AB als Achse gedreht, so erhält man das Gebilde $ABC'D'E'$. Dieses Gebilde $ABC'D'E'$ bezeichnet man als mit der gegebenen Figur $ABCDE$ symmetrisch und nennt die Gerade AB, um welche die Drehung geschah, die Symmetrieachse oder Symmetrale. Zwei symmetrische Gebilde haben daher die Eigenschaft, daß die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte derselben senkrecht steht zur Symmetrieachse und von dieser zugleich halbiert wird. Zwei symmetrische ebene Gebilde sind auch immer kongruent; ihre gleichen Bestandteile liegen in gleicher Reihenfolge auf entgegengesetzten Seiten der Symmetrale.

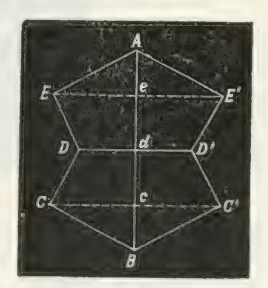


Fig. 68.

Ein ebenes Gebilde, welches sich durch eine Gerade als Symmetrale in zwei symmetrische Teile teilen läßt, heißt symmetrisch. So ist z. B. symmetrisch: Ein gleichschenkliges Dreieck, in Bezug auf die Höhe, ein gleichseitiges Dreieck, in Bezug auf jede der drei Höhen, ein Rhombus, in Bezug auf jede seiner Diagonalen, ein Rechteck, in Bezug auf jede Gerade, welche zwei gegenüberliegende Seiten halbiert, ein Quadrat, in Bezug auf jede Diagonale und jede Gerade, welche zwei gegenüberliegende Seiten halbiert, ein regelmäßiges Vieleck, in Bezug auf jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt und entweder durch einen Eckpunkt oder durch den Halbierungspunkt einer Seite geht.

6. Konstruktionsaufgaben.

a) Ein Sechseck zu zeichnen, wenn 5 Seiten (a, b, c, d, e) und die von diesen eingeschlossenen Winkel mit 90°, 150°, 120°, 135° gegeben sind. Lösung aus Fig. 69 ersichtlich.

b) Ein regelmäßiges Fünfeck zu zeichnen, wenn eine Seite a gegeben ist.

aa) Man mache die Strecke $AB = a$, Fig. 70, und trage in beiden Endpunkten den halben Umfangswinkel auf.**) Die beiden neuen Schenkel dieser Winkel schneiden

*) Symmetrie, aus dem Griechischen, bedeutet Ebenmaß, Gleichmaß.

**) Die Summe der Innenwinkel ist $n \cdot 2R - 4R = 5 \cdot 2R - 4R = 6R = 540°$. Es ist daher ein innerer Winkel $540 : 5 = 108°$, und ein halber innerer Winkel $108° : 2 = 54°$.

sich im Punkte O. Aus diesem Punkte O, als Mittelpunkt des regelmäßigen Fünfeckes, beschreibe man einen Kreis mit dem Radius OA und trage auf dessen Umfang die Strecke a noch viermal als Sehne auf.

bb) Man trage in beiden Endpunkten der Strecke AB ($= a$) den Winkel von 108^0 auf, mache die erhaltenen neuen Schenkel AE und $BC = a$ und wiederhole im Punkte E und C dasselbe Verfahren. $ABCDE$ ist das verlangte Fünfeck.

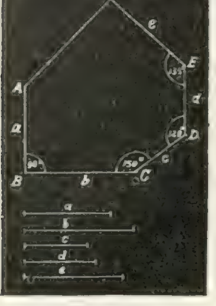


Fig. 69.

c) Ein Vieleck zu übertragen. Diese Aufgabe kann auf zweierlei Art gelöst werden.

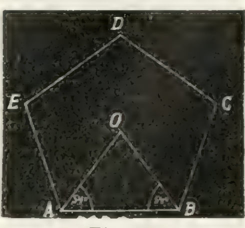


Fig. 70.

aa) Durch Zerteilen des gegebenen Vieleckes in Dreiecke mittels der aus einem Endpunkte möglichen Diagonalen und Übertragen dieser Dreiecke. Hienach zerfällt z. B. das unregelmäßige Siebeneck, Fig. 71, $ABC DEFG$, durch die aus F möglichen 4 Diagonalen in die Dreicke I, II, III, IV, V. Macht man nun $A'F' = AF$ und bestimmt man weiters G' durch den Schnitt der Kreisbögen aus A' und F' mittels der Halbmesser AG und FG, so sind die beiden Dreiecke I und 1 nach dem IV. Kongruenzsatze kongruent, denn $AF = A'F'$, $AG = A'G'$, $FG = F'G'$. Fährt man mit dem Übertragen der anderen Dreiecke II, III, IV und V in der bereits angedeuteten Weise fort, so ist das so erhaltene neue Siebeneck $A'B'C'D'E'F'G'$ aus lauter Dreiecken,

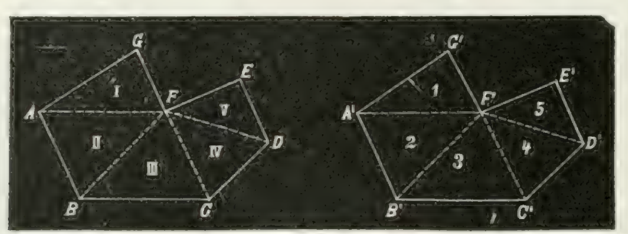


Fig 71.

welche mit den gleichliegenden Dreiecken des gegebenen Vieleckes kongruent sind, in derselben Reihenfolge zusammengesetzt; es müssen somit auch die beiden Vielecke kongruent sein.

bb) Mittels Koordinaten.



Fig. 72.

Zieht man in einer Ebene aus einem gegebenen Punkte x, Fig. 72, einen Strahl xx' und aus einem anderen Punkte A eine Senkrechte Ay auf diesen Strahl, so heißt das hiedurch abgeschnittene Stück xy des Strahles die Abszisse, die Senkrechte Ay aber die Ordinate des Punktes A. Der Strahl xx' wird Abszissenachse, der Punkt x Anfangspunkt genannt. Abszisse und Ordinate zusammen bilden die Koordinaten eines Punktes.

Wenn der Anfangspunkt und die Richtung der Abszissenachse, sowie die Koordinaten gegeben sind, so ist auch der Punkt selbst vollkommen bestimmt. Man braucht dann nur auf der Abszissenachse vom Anfangspunkte aus eine Strecke von der Länge der Abszisse abzuschneiden, in dem Endpunkte eine Senkrechte zu errichten, auf diese die Ordinate aufzutragen und erhält so den fraglichen Punkt.

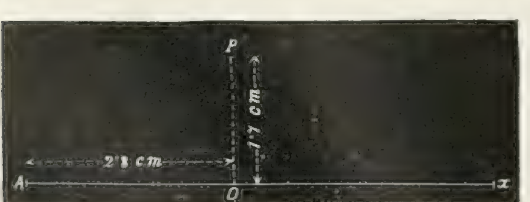


Fig 73.

In Fig. 73 ist ein Punkt P durch Koordinaten bestimmt, dessen Abszisse 2·8 *cm* und dessen Ordinate 1·7 *cm* beträgt, wenn der Anfangspunkt der Abszissenachse durch den Punkt A gegeben ist.

Wäre ein Vieleck, Fig. 74, $ABCDEFGHJK$, mittels Koordinaten zu übertragen, so wählt man einen Eckpunkt A desselben als Anfangspunkt, verbindet diesen mit dem am weitesten entfernten zweiten Eckpunkte G dieses Vieleckes und fällt

aus allen anderen Ecken Senkrechte (Ordinaten) auf die Abszissenachse. Sodann zieht man eine Linie $A' G'$, trägt auf dieser alle Abszissen $A b$, $A c$, $A k$, $A d$, $A i$ . . . . auf, $A' b'$, $A' c'$, $A' k'$, $A' d'$, $A' i'$ . . . . ., errichtet in den so erhaltenen Endpunkten b', c', k', d', i' . . . . . als den Fußpunkten der Ordinaten Senkrechte und macht letztere mit den

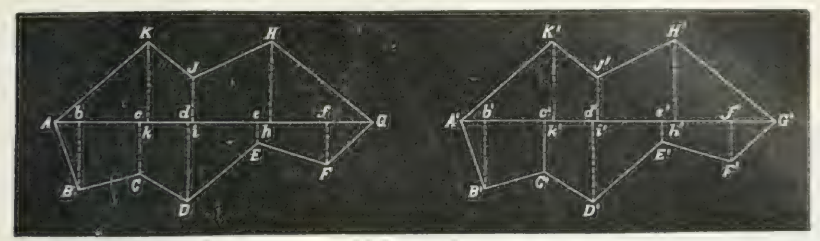


Fig. 74.

bezüglichen Ordinaten der Eckpunkte des zu übertragenden Vieleckes gleich lang; $b' B'$, $c' C'$, $k' K'$, $i' J'$ . . . . . Auf diese Weise ist die Lage aller Eckpunkte genau bestimmt, und man braucht dieselben nur in der gegebenen Reihenfolge zu verbinden, um ein mit dem ersten Vielecke kongruentes neues Vieleck zu erhalten.

IV. Kapitel.

Die krummlinigen Figuren.

§ 9. Der Kreis.

1. Gerade Linien im Kreise.

Jede Sehne eines Kreises kann als die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, angesehen werden. Z. B. Fig. 75, $\triangle ABO$; $OA = OB$ als Halbmesser eines Kreises. Es können somit die auf Seite 117, § 6, Punkt 7, für das gleichschenklige Dreieck abgeleiteten Sätze auch hier angewendet und zu nachstehenden Folgerungen verwertet werden:

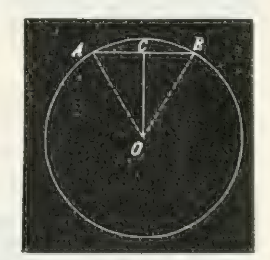


Fig. 75.

a) Verbindet man den Halbierungspunkt einer Sehne mit dem Mittelpunkte des Kreises, so steht diese Verbindungslinie senkrecht auf der Sehne.

b) Fällt man aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne eine Senkrechte, so wird dadurch die Sehne halbiert.

c) Errichtet man im Halbierungspunkte einer Sehne eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt des Kreises.

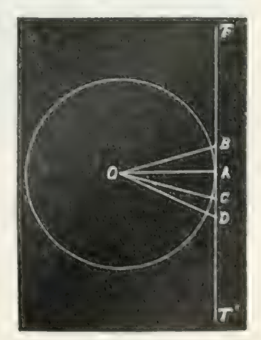


Fig. 76.

Errichtet man im Endpunkte A des Halbmessers AO, Fig. 76, eine Senkrechte, so hat diese mit der Kreislinie nur diesen einen Punkt A gemeinschaftlich, denn jede andere Verbindungslinie BO, CO, DO zwischen der Geraden TT' und dem Mittelpunkte O ist als Schiefe länger als die Senkrechte AO, und überdies liegen auch die Punkte B, C, D außerhalb der Kreislinie; es ist daher TT' eine Tangente (vgl. Seite 104) des Kreises und A der Berührungspunkt. Daraus folgt:

Errichtet man in dem Endpunkte eines Halbmessers auf denselben eine Senkrechte, so ist diese eine Tangente des Kreises.

2. Die gegenseitige Lage der Kreise.

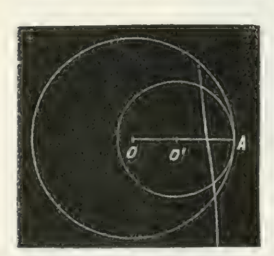
Zwei Kreise, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen konzentrische Kreise, Fig. 77. Die zwischen ihren Peripherien liegende, in der Fig. 77 schraffierte Fläche heißt Kreisring.

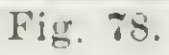
Fig. 77.

Zwei Kreise, welche keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen exzentrische Kreise. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier exzentrischer Kreise heißt die Zentrale oder Zentrallinie dieser Kreise.

Zwei exzentrische Kreise können sich entweder berühren oder schneiden, oder es ist keines von beiden der Fall.

a) Zwei exzentrische Kreise berühren sich, wenn ihre beiden Peripherien nur einen Punkt gemeinschaftlich haben. Die Berührung kann von innen, Fig. 78, wenn der eine Kreis innerhalb, oder von außen, Fig. 79, wenn der eine Kreis außerhalb des anderen liegt, stattfinden. Ersteres ist der Fall, wenn die Zentrale OO' der beiden Kreise der Differenz ihrer Radien entspricht, $OA - O'A$. Letzteres tritt ein, wenn die Zentrale OO' der beiden Kreise gleich ist der Summe ihrer Halbmesser $OA + O'A$.




Fig. 78.

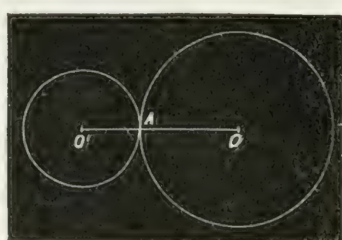


Fig. 79.

b) Zwei exzentrische Kreise schneiden sich, wenn ihre Umfänge zwei Punkte gemeinschaftlich haben. Das gemeinschaftliche Stück beider Kreisflächen nennt man Linse, und jedes der beiden nicht gemeinschaftlichen Stücke heißt Mond, Fig. 80. Die Zentrale beider Kreise ist in diesem Falle größer als die Differenz der Radien, $OO' > OA - O'B$, Fig. 80, und kleiner als die Summe derselben, $OO' < OA + O'B$.

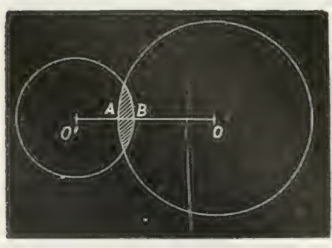


Fig. 80.

Zwei exzentrische Kreise werden sich weder berühren noch schneiden, wenn ihre Peripherien gar keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Die beiden Kreise werden entweder ganz ineinander, Fig. 81, oder ganz außerhalbeinander, Fig. 82, liegen. Die Zentrale ist im ersten Falle kleiner als die Differenz der Radien, $OO' < OA - O'B$, Fig. 81, im anderen Falle aber größer als die Summe derselben, $OO' > OA + O'B$, Fig. 82.

3. Die Winkel im Kreise.

Ein Winkel, welcher seinen Scheitel im Umfange (in der Peripherie) des Kreises hat und dessen Schenkel Sehnen dieses Kreises sind, heißt

ein Umfangs- oder Peripheriewinkel; z. B. Winkel ABC, Fig. 83. Ein Winkel, welcher seinen Scheitel im Mittelpunkte (Zentrum) des Kreises hat und dessen Schenkel Halbmesser dieses Kreises sind, wird ein Mittelpunkts- oder Zentriwinkel genannt; z. B. Winkel DOE,

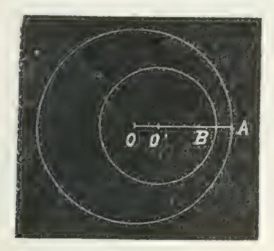


Fig. 81.

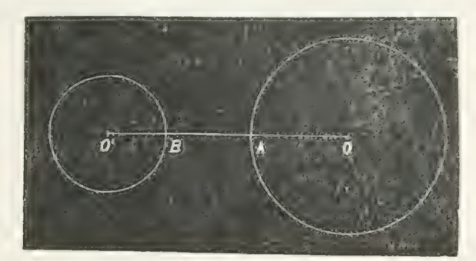


Fig. 82.

Fig. 83. Von beiden Winkeln sagt man, sie „stehen über dem Bogen auf", welcher zwischen ihren Schenkeln liegt. Der Peripheriewinkel ABC steht über dem Bogen AC, der Zentriwinkel DOE über dem Bogen DE auf. Steht ein Peripheriewinkel über einem Halbkreise auf, so nennt man einen solchen Winkel einen Winkel im Halbkreise. Die Verbindungslinie der beiden Endpunkte der Schenkel dieses Winkels bildet einen Durchmesser.

Fig. 83.

a) Verbindet man in zwei gleichen Zentriwinkeln eines Kreises die Endpunkte je zweier zusammengehöriger Schenkel durch die entsprechenden Sehnen, Fig. 84, so entstehen zwei gleichschenklige kongruente Dreiecke AOB und COD.

In diesen ist $\left.\begin{array}{l} AO = DO \\ BO = CO \end{array}\right\}$ als Halbmesser des Kreises

und $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$ nach der Voraussetzung.

Es ist also $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (II. Kongruenzfall), folglich auch $AB = CD$, und in Worten: Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören auch gleiche Sehnen, und umgekehrt zu gleichen Sehnen in einem und demselben Kreise (oder in zwei gleichen Kreisen) gehören gleiche Zentriwinkel.

b) Denkt man sich die beiden Kreisausschnitte AOB und COD, Fig. 84, übereinander gelegt, so werden sich zufolge der Kongruenz der Dreiecke AOB und COD nicht nur die gleichliegenden Seiten, sondern auch die Bögen AB und CD decken, nachdem die letzteren in allen ihren Punkten gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben. Daraus folgt:

Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Bögen und umgekehrt.



Fig. 84.

c) Wenn ein Peripherie- und ein Zentriwinkel in einem Kreise über einem gemeinschaftlichen Bogen errichtet sind, so sagt man, sie stehen über demselben Bogen auf. Verbindet man die Scheitel eines Peripheriewinkels ABC, Fig. 85, und eines Zentriwinkels AOC, welche über demselben Bogen aufstehen, durch eine Gerade BOD, so werden beide Winkel in zwei Teile geteilt.

Es ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle a + \sphericalangle b$
und $\sphericalangle AOC = \sphericalangle e + \sphericalangle f.$

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle \quad e &= \sphericalangle a + \sphericalangle c \\ \sphericalangle \quad f &= \sphericalangle b + \sphericalangle d \end{aligned}\right\}$$ als Außenwinkel der Dreiecke AOB und COB.

Die beiden Dreiecke AOB und COB sind aber gleichschenklig, $AO = BO$, und $CO = BO$ (als Radien eines Kreises); folglich ist

$$\sphericalangle a = \sphericalangle c$$
$$\text{und } \sphericalangle d = \sphericalangle b.$$

Man kann daher für den Winkel c den Winkel a und für den Winkel d den Winkel b einsetzen und erhält

$$\sphericalangle e = \sphericalangle a + \sphericalangle a$$
$$\sphericalangle f = \sphericalangle b + \sphericalangle b, \text{ oder}$$
$$\sphericalangle e = 2 \, . \sphericalangle a$$
$$\sphericalangle f = 2 \, . \sphericalangle b, \text{ und}$$

durch Addition $\sphericalangle e + \sphericalangle f = 2 \, . \sphericalangle a + 2 \, . \sphericalangle b = 2 \, . (\sphericalangle a + \sphericalangle b).$



Fig. 85.

Nach der Voraussetzung gibt $\sphericalangle e + \sphericalangle f$ den Zentriwinkel AOC, und $\sphericalangle a + \sphericalangle b$ den Peripheriewinkel ABC; es ist daher

$\sphericalangle AOC = 2 \, . \sphericalangle ABC$, oder in Worten:

Steht ein Zentri- und ein Peripheriewinkel über demselben Bogen auf, so ist der Zentriwinkel doppelt so groß als der Peripheriewinkel über demselben Bogen, oder der Peripheriewinkel ist gleich dem halben Zentriwinkel, welcher über demselben Bogen aufsteht.

Daraus folgt auch, daß ein Winkel im Halbkreise einen Rechten beträgt, weil der zugehörige Zentriwinkel ein gestreckter ist.

4. Dem Kreise eingeschriebene und umschriebene Vielecke.

Liegen alle Eckpunkte eines regelmäßigen Vieleckes im Umfange eines Kreises, so bilden die Seiten des ersteren Sehnen des Kreises. Man nennt ein solches Vieleck ein Sehnenvieleck; das Vieleck ist dem Kreise eingeschrieben, oder der Kreis ist dem Vielecke umschrieben, Fig. 86.

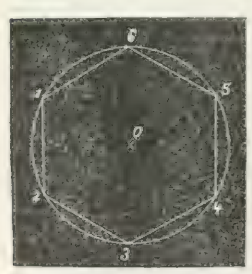


Fig. 86.

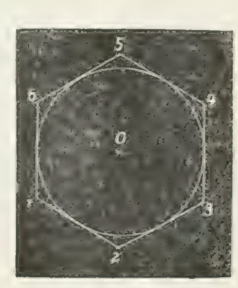


Fig. 87.

Bilden dagegen die Seiten des Vieleckes Tangenten eines Kreises, so daß alle Eckpunkte des Vieleckes außerhalb dieses Kreises liegen, so heißt das Vieleck ein Tangentenvieleck; dasselbe ist dem Kreise umschrieben, oder der Kreis ist dem Vielecke eingeschrieben, Fig. 87.

Wir haben bereits im § 8, Punkt 4, hervorgehoben, daß der Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes sowohl von allen Eckpunkten als auch von allen Seiten des Vieleckes den gleichen Abstand hat. Beschreibt man daher aus dem Mittelpunkte eines regelmäßigen Vieleckes einen

Kreis, welcher durch einen Eckpunkt desselben geht, so muß derselbe auch alle anderen Eckpunkte des Vieleckes treffen. Der Kreis wird dem Vielecke umschrieben sein, er ist ein umschriebener Kreis. Konstruiert man aber aus dem Mittelpunkte desselben Vieleckes einen Kreis, welcher den Abstand einer Seite vom Mittelpunkte zum Radius hat, so wird dieser alle Vieleckseiten berühren müssen. Dieser Kreis wird dem Vielecke eingeschrieben sein, er ist ein eingeschriebener Kreis. Hieraus folgt:

Jedem regelmäßigen Vielecke kann man einen Kreis um- oder einschreiben. Jedem Kreise kann man umgekehrt ein regelmäßiges Vieleck ein- oder umschreiben.

Will man einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck von einer bestimmten Seitenanzahl ein- oder umschreiben, so teilt man die Peripherie dieses Kreises in so viele gleiche Teile als das Vieleck Seiten haben soll, und zieht durch die Teilungspunkte für den ersten Fall Sehnen, für den zweiten Fall Tangenten. Wenn man einem Kreise mehrere regelmäßige Vielecke ein- und umschreibt, so wird jedes eingeschriebene Vieleck kleiner, jedes umschriebene Vieleck größer sein als der Kreis. Dieser Unterschied zwischen dem Kreise und dem Vielecke wird aber immer kleiner, je größer die Anzahl der Seiten des Vieleckes wird, und man sagt dann in diesem Sinne: Der Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten.

5. Konstruktionsaufgaben.

a) Durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, einen Kreis zu legen.

Die drei gegebenen Punkte seien A, B, C, Fig. 88. Man verbinde dieselben durch die Linien AB und BC, halbiere jede dieser Geraden, errichte in den Halbierungspunkten Senkrechte und bringe diese zum Schnitt. D ist der Mittelpunkt, DA, DB oder DC sind Halbmesser des gesuchten Kreises. (Warum?)



Fig. 88.

b) Aus einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte zu dem Kreise zwei Tangenten zu ziehen.

Der gegebene Kreis, Fig. 89, hat den Mittelpunkt O und den Radius OB, der außerhalb dieses Kreises gegebene Punkt ist A. Man verbinde O mit A durch die Gerade OA, halbiere dieselbe und beschreibe mit dem Halbmesser AC einen Kreis. AD und AE sind die verlangten Tangenten. (Warum?)

c) Konstruktion regelmäßiger Vielecke aus einer gegebenen Seite.

aa) Das regelmäßige Fünfeck. Man halbiere die gegebene Fünfeckseite 12, Fig. 90, indem man mit dieser Seite als Halbmesser aus 1 und 2 zwei Kreisbogen

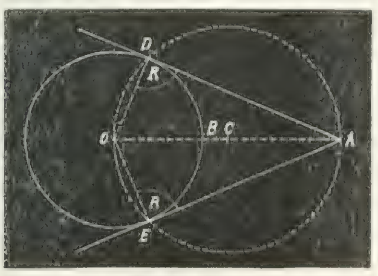


Fig. 89.



Fig. 90.

beschreibt, und die Schnittpunkte verbindet. Hierauf errichte man in dem Punkte 1 der Seite 12 eine Senkrechte von der Länge der gegebenen Fünfeckseite und konstruiere

aus c mit dem Halbmesser cd einen Kreisbogen, der die verlängerte Seite $1\,2$ in den Punkten e und f trifft. Beschreibt man dann noch aus den Punkten 1 und 2 je einen Bogen mit dem Halbmesser $2\,e$ oder $1\,f$, so erhält man in den Schnittpunkten 3, 4 und 5 die Eckpunkte des gesuchten regelmäßigen Fünfeckes.

bb) Das regelmäßige Sechseck. Man beschreibe aus den beiden Endpunkten 1 und 2, Fig. 91, mit der gegebenen Seite $1\,2$ als Halbmesser Kreisbögen, welche sich im Punkte O schneiden. Betrachtet man nun O als Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius $1\,2$ ist, so läßt sich die gegebene Seite auf dieser Kreislinie sechsmal als Sehne auftragen.

cc) Das regelmäßige Siebeneck.*) Beschreibt man aus den beiden Endpunkten einer gegebenen Siebeneckseite, Fig. 92, mit der Länge dieser Seite als Halbmesser Kreis-

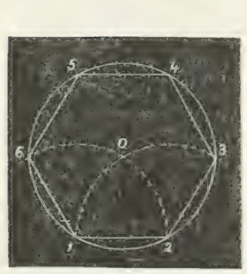


Fig. 91.



Fig. 92.

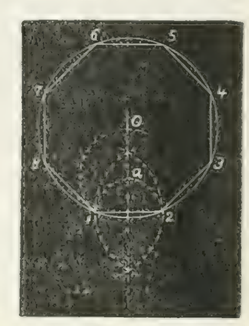


Fig. 93.

bögen und halbiert man dann noch den Bogen $2\,c$, so schneidet die Senkrechte $2\,e$, welche man aus dem Endpunkte 2 der gegebenen Seite nach abwärts errichtet, die Halbierungslinie dieses Bogens im Punkte e. Die Strecke $1\,e$ kann nun als Radius eines Kreises angesehen werden, auf dessen Umfange sich die gegebene Seite $1\,2$ annähernd siebenmal als Sehne auftragen läßt

dd) Das regelmäßige Achteck. Man halbiert die gegebene Seite und beschreibt aus dem Halbierungspunkte über dieser Seite einen Halbkreis. Dieser trifft die Halbierungslinie im Punkte a, Fig. 93. Beschreibt man nun aus a mit dem Radius $1\,a$ einen Bogen, so wird die Verlängerung der Halbierungslinie in O getroffen. O ist der Mittelpunkt des dem regelmäßigen Achtecke umschriebenen Kreises.

§ 10. Die Ellipse.

Denkt man sich in jedem Endpunkte der Strecke ff', Fig. 94, je ein Ende eines Fadens befestigt, welcher um ein gegebenes Stück länger ist als die Strecke ff' selbst, so beschreibt ein in diesen Faden eingeführter Stift, wenn er um die beiden festen Punkte ff' so herumbewegt wird, daß die beiden Fadenteile stets straff gespannt bleiben, eine geschlossene krumme Linie, welche Ellipse genannt wird. Aus der Entstehung der Ellipse geht hervor, daß die beiden Fadenteile in jedem Punkte der Ellipse zwar verschieden lang sind, daß aber ihre Summe immer einer bestimmten Strecke, nämlich der Länge des ganzen Fadens gleich ist.

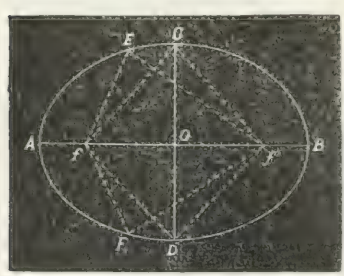


Fig. 94.

Die Ellipse ist daher eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, welche die Eigenschaft hat, daß die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes ihrer Peripherie von zwei gegebenen Punkten immer derselben gegebenen Strecke gleich ist.

*) Diese Konstruktionen wurden nur deshalb hier aufgenommen, weil sie als Übung im geometrischen Zeichnen vorgenommen werden.

Die zwei gegebenen festen Punkte f und f' heißen die Brennpunkte der Ellipse und die Entfernungen Ef, Ef' eines Punktes E von den beiden Brennpunkten die Leitstrahlen dieses Punktes. Die gerade Linie AB, welche die beiden Brennpunkte verbindet und zwei entgegengesetzte Punkte der Ellipse trifft, heißt die große Achse und die Punkte A und B derselben werden die Scheitel der Ellipse genannt. Der Halbierungspunkt O ist der Mittelpunkt der Ellipse und die Strecke CD, welche im Mittelpunkte der Ellipse auf der großen Achse senkrecht steht und zwei entgegengesetzte Punkte derselben trifft, wird die kleine Achse der Ellipse genannt.

Es ist $Af' + Af = Bf + Bf'$, oder, weil $Af' = ff' + Af$ und $Bf = ff' + Bf'$,
auch $\underline{ff' + 2\,Af = ff' + 2\,Bf'}$.
somit $2\,Af = 2\,Bf'$ und $Af = Bf'$, oder in Worten:

1. Die Scheitel einer Ellipse sind von den Brennpunkten derselben gleichweit entfernt, und als weitere Folgerung:

2. Der Mittelpunkt einer Ellipse ist von den beiden Brennpunkten gleichweit entfernt.

Der Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkte der Ellipse, fO oder $f'O$, heißt die Exzentrizität der Ellipse. Je kleiner dieselbe ist, desto mehr nähert sich die Ellipse einem Kreise.

Es ist weiter $Ef + Ef' = Af' + Af$; nach vorigem ist aber

$$\overline{Af' = Bf},$$ weshalb man auch schreiben kann

$$Ef + Ef' = \underbrace{Bf + Af}, \text{ oder}$$

$$Ef + Ef' = \quad AB, \text{ d. i. in Worten:}$$

3. Die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist der großen Achse gleich.

Aus der Kongruenz der Dreiecke fOD und $f'OD$ (nach dem II. Kongruenzfalle) folgt, daß $Df = Df'$, oder $2\,Df = AB$, daher auch $Df = \frac{AB}{2}$, d. i. in Worten:

4. Der Abstand eines Endpunktes der kleinen Achse der Ellipse von einem Brennpunkte ist der halben großen Achse gleich.

Mit Hilfe der eben abgeleiteten vier Grundsätze für die Ellipse wird es leicht möglich sein, nachstehende Aufgaben zu lösen.

1. Von einer Ellipse ist die große Achse und die beiden Brennpunkte gegeben; die kleine Achse ist zu suchen.
2. Die beiden Achsen der Ellipse sind bekannt; wie findet man die Brennpunkte?
3. Es ist eine Ellipse zu konstruieren, wenn die beiden Achsen gegeben sind.
4. Es ist eine Ellipse zu beschreiben, wenn große Achse und Exzentrizität gegeben sind.

§ 11. Die Parabel.

Gegeben ist die Gerade OX, Fig. 95, mit dem in ihr gelegenen Punkte f und die im Endpunkte O dieser Geraden errichtete Senkrechte YY'. Der Punkt s, als Halbierungspunkt der Strecke Of, ist sowohl von O als auch von f gleichweit entfernt. Errichtet man im Punkte t der Geraden OX eine Senkrechte und schneidet man diese durch zwei

Kreisbögen, deren Radius gleich $O\,1$, aus f, so erhält man zwei Punkte a und a'. Diese beiden Punkte haben sowohl von f als auch von der Geraden YY' den gleichen Abstand, denn die senkrechte Entfernung des Punktes a oder a' von der Geraden YY' muß gleich sein der Strecke $O\,1$. (Senkrechte zwischen Parallelen sind gleich.) Auf gleiche Weise könnte man mit Hilfe der Punkte 2, 3 usf. noch mehrere Punkte von obiger Eigenschaft bestimmen. Durch entsprechende Verbindung aller dieser Punkte erhält man eine krumme, nicht geschlossene Linie $g\,c\,s\,c'\,g'$, welche Parabel genannt wird.

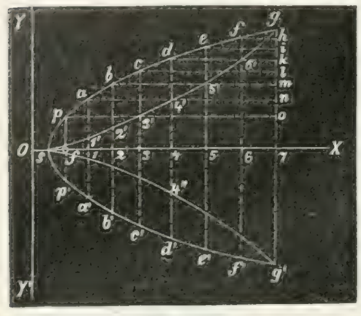


Fig. 95.

Eine Parabel ist sonach eine krumme, nicht geschlossene Linie, welche die Eigenschaft hat, daß jeder ihrer Punkte von einem gegebenen Punkte und von einer gegebenen Geraden gleichweit absteht.

Die Linie OX wird die Achse, YY' die Leitlinie, der Punkt f der Brennpunkt und s der Scheitel der Parabel genannt; jede der oberhalb und unterhalb der Achse gelegenen Hälften der Parabel ist ein Ast der letzteren. Die Verbindungslinie eines Punktes der Parabel mit dem Brennpunkte heißt Leitstrahl und die im Brennpunkte f errichtete Senkrechte pf nennt man Parameter. Nach der Eigenschaft der Parabel muß der Parameter pf gleich sein dem Abstande Of des Brennpunktes von der Leitlinie.

Neben der eben beschriebenen Parabel ist für forstliche Zwecke noch die sogenannte Neil'sche Parabel (Fig. 95, $g\,4'\,s\,4''\,g'$) von Wichtigkeit. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß sie zu beiden Seiten der Achse OX eingebaucht ist, während die gewöhnliche Parabel zu beiden Seiten der Achse ausgebaucht erscheint. Man kann daher die gewöhnliche Parabel wohl auch als ausgebauchte, die Neil'sche Parabel hingegen als eingebauchte Parabel bezeichnen.

V. Kapitel.

Die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.

§ 12. Die Proportionalität der Strecken.

1. Die Verhältnisse.

Unter dem Verhältnisse zweier Strecken versteht man das Ergebnis der Vergleichung ihrer Längen.

Man drückt das Verhältnis zweier Strecken gewöhnlich durch die Maßzahlen ihrer Längen aus, oder wohl auch durch jene Zahl, welche man erhält, wenn man die kürzere Strecke auf der längeren so oft als tunlich aufträgt. Ist hienach im ersten Falle die Länge einer Strecke 12 Einheiten, etwa 12 *cm* und die Länge einer zweiten Strecke 17 gleich große Einheiten, also 17 *cm*, so ist das Verhältnis dieser beiden Strecken 12 : 17. Läßt sich weiters im zweiten Falle eine Strecke auf einer anderen 5mal auftragen, so ist das Verhältnis dieser beiden Strecken 1 : 5; ist die

Auftragung der kleineren Strecke auf der größeren aber nur 4·5mal möglich, so ist das Verhältnis 1 : 4·5, oder, beide Glieder mit 2 multipliziert, 2 : 9.

2. Die Proportionen.

Die beiden Streckenpaare AB und CD, dann EF und GH in Fig. 96 haben dasselbe Verhältnis 5 : 4. Verbindet man diese beiden gleichen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen, so erhält man die Proportion: $AB : CD = EF : GH$. Man sagt, die beiden Streckenpaare AB und CD, sowie EF und GH sind einander proportioniert oder proportional.

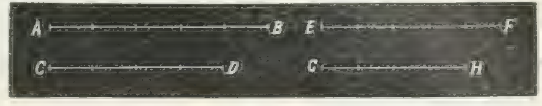


Fig. 96.

Sind die beiden Strecken CD und EF gleich, so hat man eine stetige Proportion, $AB : CD = CD : GH$, vor sich und nennt CD dann die mittlere geometrische Proportionale zwischen AB und GH.

3. Die Teilung der Strecken nach einem gegebenen Verhältnisse.

Die Strecke AB, Fig. 97, soll nach dem Verhältnisse 2 : 3 geteilt werden.

Man trage auf dem beliebig von A ausgehenden Strahle AC zuerst 2, dann 3 untereinander gleichgroße Teile auf, verbinde C mit B und ziehe durch jeden Teilungspunkt der AC Parallele zu CB. Es verhält sich dann $AD : DC = 2 : 3$; nach § 7, Punkt 7, Aufgabe f verhält sich aber auch $AE : EB = 2 : 3$, denn AE enthält 2 und EB 3 untereinander gleich große Teile. Ähnlich würde man verfahren, wenn eine gegebene Strecke in drei oder mehr Teile nach einem bestimmten Verhältnisse zu teilen wäre.

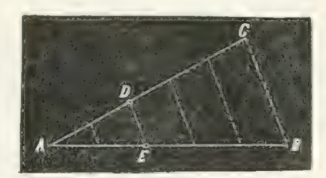


Fig. 97.

Ist also von zwei unter einem Winkel sich schneidenden Strecken die eine in einem bestimmten Verhältnisse geteilt, so wird die zweite Strecke in eben demselben Verhältnisse geteilt, wenn man die Endpunkte beider Strecken miteinander verbindet und zu dieser Verbindungslinie durch die Teilungspunkte der ersten Strecke Parallele zieht.

§ 13. Die Ähnlichkeit der Dreiecke.

1. Allgemeines über die Ähnlichkeit.

Zwei Figuren, welche nur in ihrer Gestalt oder Form übereinstimmen, werden ähnlich genannt. Es kommt somit bei der Ähnlichkeit der Figuren nicht die Größe, sondern nur die Gestalt in Betracht. Es müssen demnach alle verschieden großen Kreise, dann alle gleichseitigen Dreiecke, oder alle regelmäßigen Vielecke mit gleicher Seitenzahl untereinander ähnlich sein. Das Zeichen für ähnlich ist $\sim$.

Teilt man eine Seite eines Dreieckes in eine beliebige Anzahl gleichgroßer Teile und zieht man durch alle Teilpunkte Parallele zu einer der anderen Seiten, so entsteht in dem ursprünglichen Dreiecke eine

bestimmte Anzahl von Dreiecken, welche durchaus dieselbe Gestalt wie das ursprüngliche Dreieck besitzen, d. h. sowohl mit diesem als auch untereinander ähnlich sind. In Fig. 98 ist z. B. AC in drei gleiche Teile geteilt, und DF und EG parallel zu AB. Es ist also $\triangle DFC \sim \triangle EGC \sim \triangle ABC$. Vergleicht man diese ähnlichen Dreiecke in Bezug auf ihre Bestandteile miteinander, z. B. $\triangle DFC$ mit $\triangle ABC$, so zeigt sich, daß alle drei Winkel wechselweise gleich sind: $\sphericalangle D = \sphericalangle A$ und $\sphericalangle F = \sphericalangle B$ als Gegenwinkel, und $\sphericalangle C = \sphericalangle C$, weil derselbe beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist.



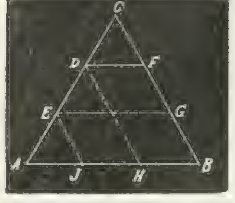


Fig 98.

Das Verhältnis der Seiten DC und AC ist, weil DC einen und AC drei gleichgroße Teile (DC) enthält, $1:3$. Nachdem aber die Seite BC durch die Parallellen DF und EG ebenfalls in drei untereinander gleiche Teile geteilt wurde, so haben auch die Seiten FC und BC dasselbe Verhältnis $1:3$. Zieht man weiters noch EJ und DH parallel zu BC, so müssen, da $BH = FD$, auch die Seiten DF und AB dasselbe Verhältnis $1:3$ besitzen. Es besteht somit die Proportion $DC : AC = FC : BC = DF : AB = 1:3$, d. h. in ähnlichen Dreiecken sind die gleichliegenden Seiten proportional.

Alles in allem ergeben sich nach dem Vorhergehenden folgende Sätze:

a) In ähnlichen Dreiecken sind die drei Winkel wechselweise gleich und die gleichliegenden Seiten proportional.

b) Zieht man in einem Dreiecke eine Parallele zu einer Seite, so werden die beiden anderen Seiten proportional geschnitten.

c) Eine Gerade, welche zwei Seiten eines Dreieckes proportional schneidet, geht parallel zur dritten Seite dieses Dreieckes. (Umkehrung von *b*.)

2. Die Ähnlichkeitssätze bei Dreiecken.

Nach dem Vorhergehenden sind zwei Dreiecke ähnlich, wenn alle Winkel wechselweise gleich und die gleichliegenden Seiten proportional sind. Man kann aber auch schon aus dem Eintreffen nur einiger dieser Bedingungen, ebenso wie bei der Kongruenz der Dreiecke, auf die Ähnlichkeit von Dreiecken schließen, wenn man aus den gegebenen Voraussetzungen auch das Vorhandensein der übrigen Bedingungen erweisen kann.

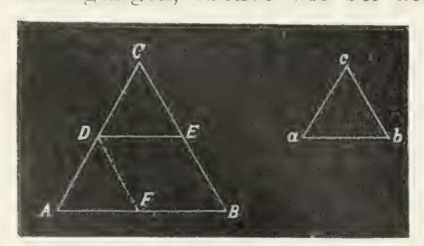


Fig. 99.

a) Je zwei Seiten AC und ac, BC und bc (Fig. 99) sind proportional, also $AC : ac = BC : bc$, und der von ihnen eingeschlossene Winkel ist gleich.

Um unter dieser Voraussetzung nachzuweisen, daß $\triangle ABC \sim \triangle abc$, muß man die wechselweise Gleichheit der anderen Winkel, sowie die Proportionalität der dritten Dreieckseiten, nämlich $AC : ac = AB : ab$, nachweisen. Zu diesem Behufe macht man $DC = ac$ und $EC = bc$. Nun ist (nach dem II. Kongruenzfalle) $\triangle DEC \cong \triangle abc$; man kann somit in der ersten Proportion, $AC : ac = BC : bc$, für ac und bc die gleichen Strecken DC und EC einsetzen und erhält $AC : DC = BC : EC$. Hieraus folgt, daß AC und BC durch die Gerade DE proportional ge-

schnitten werden; somit ist $DE \parallel AB$, und demzufolge auch $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ und $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ (als Gegenwinkel). Da nun $\triangle DEC \cong \triangle abc$, so ist auch $\sphericalangle A = \sphericalangle a$ und $\sphericalangle B = \sphericalangle b$. Die beiden Dreiecke haben somit alle drei Winkel gleich.

Zum Nachweise der Proportionalität der dritten Seite zieht man noch $DF \parallel CB$. Es ist dann nach § 13, Punkt 1

$$AC : DC = AB : FB.$$

Da nun als Parallele zwischen Parallelen $FB = DE$, so hat man

$$AC : DC = AB : DE.$$

Aus der Kongruenz der Dreiecke DEC und abc folgt

$$DE = ab,$$

wonach die Proportion besteht

$$AC : ac = AB : ab,$$

d. h. es sind in den Dreiecken ABC und abc neben der Gleichheit aller Winkel auch die dritten Seiten proportional, daher $\triangle ABC \sim \triangle abc$. Daraus folgt:

I. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten proportional sind und der von denselben eingeschlossene Winkel in beiden Dreiecken gleich ist.

b) Alle drei Winkel sind wechselweise gleich. Kann unter dieser Voraussetzung die Proportionalität aller Seiten erwiesen werden, so sind die Dreiecke ähnlich.

Man macht, Fig. 99, $DC = ac$, $EC = bc$. Es ist dann $\triangle DEC \cong \triangle abc$ nach dem II. Kongruenzsatze, und daraus

$$\sphericalangle D = \sphericalangle a, \quad \sphericalangle E = \sphericalangle b.$$

Da nun nach der Voraussetzung

$$\sphericalangle A = \sphericalangle a, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle b,$$

so ist auch

$$\sphericalangle D = \sphericalangle A, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle E,$$

somit auch $DE \parallel AB$. Aus der Parallelität dieser Seiten folgt

$$AC : DC = BC : EC,$$

oder, da $DC = ac$ und $EC = bc$,

$$AC : ac = BC : bc.$$

Die beiden Dreiecke ABC und abc haben nebst der eben erwiesenen Proportionalität zweier Seiten nach der Voraussetzung auch den eingeschlossenen Winkel ($\sphericalangle C = \sphericalangle c$) gleich und sind somit nach dem I. Ähnlichkeitssatze ähnlich, also $\triangle ABC \sim \triangle abc$. Daraus folgt:

II. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie alle drei Winkel wechselweise gleich haben, oder, da mit dem Übereinstimmen zweier Winkel die dritten ohnehin gleich sind, zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Winkel wechselweise gleich haben.

c) Alle drei Seiten (Fig. 99) sind proportional. Kann unter dieser Voraussetzung die gleichzeitige Gleichheit der Winkel nachgewiesen werden, so sind die Dreiecke ähnlich.

Dieser Nachweis kann ähnlich wie unter *a)* und *b)* geführt werden, wenn man $DC = ac$ und $EC = bc$ macht und $DF \parallel BC$ zieht. Man kann hienach die Kongruenz der Dreiecke DEC und abc nachweisen und hat dann $\sphericalangle A = \sphericalangle a$, $\sphericalangle B = \sphericalangle b$, $\sphericalangle C = \sphericalangle c$, also $\triangle ABC \sim \triangle abc$. Daraus folgt:

III. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen Dreieckes den Seiten des anderen proportional sind.

Von zwei rechtwinkligen Dreiecken kann man behaupten, daß sie ähnlich sind, wenn sie in einem spitzen Winkel übereinstimmen. In diesem Falle ist dann auch der zweite spitze Winkel gegeben und die beiden Dreiecke stimmen wechselweise in allen drei Winkeln überein; sie müssen somit nach dem II. Ähnlichkeitssatze ähnlich sein.

3. Anwendungen von der Ähnlichkeit der Dreiecke.

a) Es sei in Fig. 100 $\triangle ABC \sim \triangle abc$; es ist daher auch die Proportion $AB : ab = AC : ac$ richtig. Ferner seien AB und ab die Grundlinien, dann CD und cd die Höhen dieser Dreiecke; es ist also $CD \perp AB$ und $cd \perp ab$, und deshalb auch $\sphericalangle D = \sphericalangle d$. Nach der Voraussetzung ist aber auch $\sphericalangle A = \sphericalangle a$, und somit nach dem II. Ähnlichkeitssatze $\triangle ADC \sim \triangle adc$, daher $CD : cd = AC : ac$. Da aber nach der Annahme $AB : ab = AC : ac$, so folgt die weitere Proportion $AB : ab = CD : cd$, d. h.: In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen wie die entsprechenden Grundlinien.

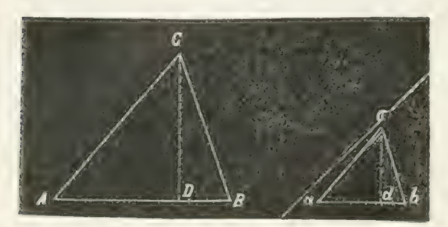


Fig. 100.

b) Mehrere gegebene Strecken nach einem gegebenen Verhältnissse zu vergrößern oder zu verkleinern.

Es seien z. B. die Strecken a und b, Fig. 101, nach dem Verhältnisse $3 : 4$ zu vergrößern. Zu diesem Zwecke trage man auf einem beliebigen Strahle Ax zuerst drei, dann vier gleiche Teile auf, beschreibe mit dem Radius $A3$ von A aus einen Bogen, schneide diesen durch einen zweiten Bogen mit dem Halbmesser $A4$ von 3 aus und ziehe den Strahl Ay. Es ist dann der Winkel yAx der sogenannte Reduktionswinkel. Verbindet man noch 3 mit B, so verhalten sich die Strecken $A3 : 3B = 3 : 4$. Beschreibt man hierauf mit der zu vergrößernden Strecke a von A aus einen Bogen, der beide Strahlen Ax und Ay trifft, so ist die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte CD die nach dem Verhältnisse $3 : 4$ vergrößerte Strecke a; ebenso ist EF die nach dem Verhältnisse $3 : 4$ vergrößerte Strecke von b.

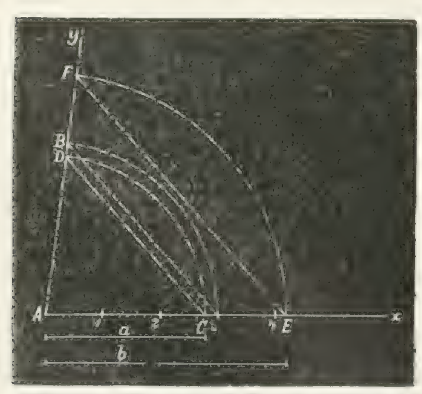


Fig. 101.

Wären die gegebenen Strecken in dem Verhältnisse $4 : 3$ zu verkleinern, so müßte man bei der Konstruktion des Reduktionswinkels von A aus mit dem Halbmesser $A4$ einen Bogen beschreiben und diesen mit $A3$ von 4 aus schneiden.

c) Die Anwendung der Ähnlichkeit der Dreiecke bei der Konstruktion von sogenannten Transversalmaßstäben folgt im III. Teile.

§ 14. Die Ähnlichkeit der Vielecke.

Denkt man sich die Seiten eines Vieleckes parallel zu sich selbst so verschoben, daß jeder Endpunkt desselben immer in einer Geraden verbleibt, so entstehen neue Vielecke, welche mit dem ursprünglichen gleiche Gestalt haben, daher mit demselben ähnlich sind.

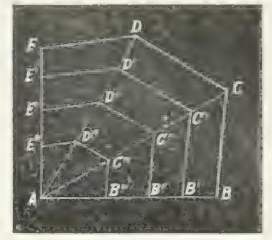


Fig. 102.

In Fig. 102 ist $ABCDE \sim AB'C'D'E' \sim \sim AB''C''D''E'' \sim AB'''C'''D'''E'''$, weil die gleichliegenden Winkel, z. B. $\sphericalangle B = \sphericalangle B' = = \sphericalangle B'' = \sphericalangle B'''$, da ihre Schenkel nach derselben Richtung parallel gehen, einander gleich und die gleichliegenden Seiten der einzelnen Vielecke proportional sind. Vergleicht man z. B. die Dreiecke ABC und $AB'C'$, dann ACD nnd $AC'D'$, so ersieht man, daß dieselben, da $BC \parallel B'C'$ und $CD \parallel C'D'$, ähnlich sein müssen, somit

$$AC : AC' = BC : B'C' \text{ und ebenso}$$
$$AC : AC' = CD : C'D', \text{ daher auch}$$
$$\overline{BC : B'C' = CD : C'D'} \text{ usf. Daraus folgt:}$$

1. In ähnlichen Vielecken sind die Winkel nach derselben Reihenfolge einander gleich und die gleichliegenden Seiten proportional.

Aus Fig. 102 ist zugleich zu ersehen, daß das Vieleck $ABCDE$ aus $\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE$ und das Vieleck $AB'C'D'E'$ aus $\triangle AB'C' + \triangle AC'D' + \triangle AD'E'$ besteht. In eben derselben Weise, wie oben nachgewiesen wurde, daß $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$, läßt sich auch nachweisen, daß $\triangle ACD \sim \triangle AC'D'$ und $\triangle ADE \sim \triangle AD'E'$. Daraus folgt:

2. Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie aus der gleichen Anzahl ähnlicher Dreiecke, in derselben Reihenfolge genommen, bestehen.

§ 15. Konstruktionsaufgaben.

a) Über einer gegebenen Strecke ab ein Dreieck zu zeichnen, welches mit einem gegebenen Dreiecke ABC ähnlich ist. (Fig. 103).

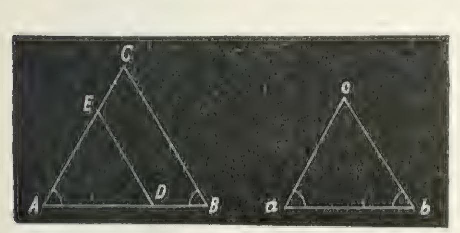


Fig. 103.

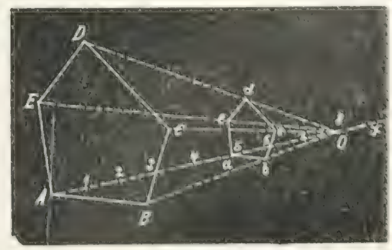


Fig. 104.

Man konstruiere in a den Winkel CAB und in b den Winkel CBA. Der Schnittpunkt der beiden Schenkel ac und bc gibt den dritten Eckpunkt des gesuchten Dreieckes abc. $\triangle ABC \sim \triangle abc$. (Warum?)

b) Zu einem gegebenen Dreiecke ABC ein ähnliches Dreieck zu zeichnen, so daß sich die Seiten des ersten Dreieckes zu jenen des zweiten Dreieckes wie $3:2$ verhalten.

Man bestimme in Fig. 103 zu AB eine Strecke nach dem Verhältnisse 3 : 2, trage diese Strecke auf AB von A aus bis D auf und ziehe durch D die Gerade $DE \parallel BC$. $ABC \sim \triangle ADE$, und $AB : AD = 3 : 2$. (Warum?)

c) Zu einem Vielecke $ABCDE$ ein diesem ähnliches zu zeichnen, so daß sich die gleichliegenden Seiten wie 8 : 3 verhalten.

Man ziehe den Strahl Ax, Fig. 104, trage auf demselben acht gleiche Teile auf, verbinde O mit B, C, D, E und ziehe $5b \parallel AB$, $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, $de \parallel DE$ und $e5 \parallel EA$, $ABCDE \sim 5bcde$, und $AB : 5b = BC : bc = 8 : 3$. (Warum?)

VI. Kapitel.

Umfang und Flächeninhalt der ebenen Figuren.

§ 16. Vorbegriffe von Umfang und Fläche. Die Maßeinheiten hiefür.

Die Summe der Begrenzungslinien einer Figur nennt man den Umfang derselben. Da sich der Umfang der ebenen Figuren aus Linien zusammensetzt, so kann derselbe auch nur durch das Längenmaß gemessen werden.

Will man den Umfang einer geradlinigen Figur ermitteln, so mißt man die einzelnen Seiten derselben und addiert die gefundenen Maßzahlen. Sind die Seiten einer Figur gleich lang, wie beispielsweise bei den regelmäßigen Vielecken oder bei den gleichseitigen Dreiecken, so bestimmt man die Länge einer Seite und multipliziert diese mit der Anzahl der vorhandenen Seiten.

Unter dem Flächeninhalte (auch Fläche) einer ebenen Figur versteht man die Größe jener Fläche, welche durch den Umfang dieser Figur eingeschlossen wird.

Haben zwei Figuren den gleichen Flächeninhalt, so werden sie flächengleich genannt; hienach sind zwei kongruente Figuren flächengleich.

Gleichwie eine Linie nur durch eine andere Linie gemessen werden kann, so kann auch eine Fläche nur durch eine andere Fläche gemessen werden. Um daher die Größe einer Fläche zu ermitteln, d. i. dieselbe zu messen, nimmt man eine Fläche von bestimmter und bekannter Größe als Flächeneinheit an und untersucht, wie oft diese Einheit des Flächenmaßes in der zu messenden Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, ist die Maßzahl dieser Fläche. Als Einheit des Flächenmaßes dient ein Quadrat, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes entspricht und welches nach letzterer die Bezeichnung „Quadratmeter" führt.*)

Die Ermittlung des Flächeninhaltes einer Figur geschieht nicht in der vorbeschriebenen Weise, also durch unmittelbares Auftragen der Flächeneinheit oder der Unterabteilung des Flächenmaßes, sondern einfach durch Rechnung, also mittelbar, indem man die Längen derjenigen Linien einer Figur, von welcher die Größe der letzteren abhängt, ermittelt und nach bestimmten Regeln aus diesen Längen die Fläche berechnet.

§ 17. Das Quadrat.**)

1. Die Seite s des Quadrates $ABCD$ in Fig. 105 sei 3 *cm* lang. Da die Seiten des Quadrates alle gleich lang sind, so ist der Umfang

*) Über das Flächenmaß, sowohl das metrische als auch das sogenannte „Wiener" Flächenmaß, vgl. Arithmetik I. Teil, Seite 18 u. ff.

**) Die Rechenaufgaben über sämtliche Flächenberechnungen siehe § 28 u. ff.

desselben gleich $3\,cm \times 4 = 12\,cm$, d. h.: Der Umfang eines Quadrates wird berechnet, indem man die Maßzahl einer Seite mit 4 multipliziert.

Wäre der Umfang dieses Quadrates gegeben, so berechnet man die Länge einer Seite desselben nach dem Schlusse: Wenn der ganze Umfang eines Quadrates der vierfachen Länge einer Seite entspricht, so muß die Länge einer Seite dem vierten Teile des Umfanges gleich sein, also $12\,cm : 4 = 3\,cm$.

Allgemein ist daher: $U_\square = 4 . s$, und

$$s = \frac{U_\square}{4}.$$

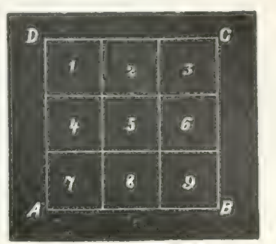


Fig. 105.

2. Teilt man jede Seite des Quadrates, Fig. 105, in drei gleiche Teile und verbindet man die gegenüberliegenden Teilungspunkte durch Gerade, so zerfällt das Quadrat $ABCD$ in lauter kleinere Quadrate; ein jedes derselben mißt ein Quadratzentimeter, da es $1\,cm$ zur Seite hat. Man erhält hiedurch drei Reihen zu je $3\,cm^2$; das ganze Quadrat hat somit $3 \times 3\,cm^2 = 9\,cm^2$.

Durch ähnliche Zeichnungen und Schlüsse würde man finden, daß der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite $4\,cm$ mißt, $4 \times 4\,cm^2 = 16\,cm^2$ beträgt, usf. Daraus folgt die Regel:

Der Flächeninhalt eines Quadrates wird gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliziert; d. i. zur zweiten Potenz erhebt.*)

Behalten wir für die Maßzahl der Seiten eines Quadrates obige Bezeichnung s bei und nehmen wir für den Flächeninhalt den Buchstaben F an, so erhalten wir allgemein die Formel:

$$F_\square = s^2.$$

Wäre der Flächeninhalt eines Quadrates beispielsweise mit $25\,m^2$ gegeben und hieraus die Länge einer Seite zu berechnen, so erhält man nach dem Schlusse: wenn $F_\square = s^2$, so ist $s = \sqrt{F_\square}$, die Seite s, somit für obigen Fall $s = \sqrt{25} = 5\,m$.

3. Sind F und S die Maßzahlen für den Flächeninhalt und die Seite des einen Quadrates und f und s die entsprechenden Maßzahlen des anderen Quadrates, so ist $F = S^2$

und $f = s^2$, daher auch

$F : f = S^2 : s^2$, oder in Worten:

Die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten.

§ 18. Das Rechteck.

1. In dem Rechtecke $ABCD$, Fig. 106, beträgt die Grundlinie (Länge) $4\,cm$ und die Höhe (Breite) $3\,cm$. Da in jedem Rechtecke je zwei gegenüberliegende Seiten die gleiche Länge haben und überdies die Länge mit der Grundlinie und die Breite mit der Höhe zusammenfällt, so ist der Umfang des Rechteckes, Fig. 106, $= 2 \times 4\,cm + 2 \times 3\,cm = 2\,(4 + 3)\,cm = 14\,cm$, d. h.:

*) Aus diesem Grunde nennt man auch die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben.

Der Umfang eines Rechteckes wird berechnet, indem man die Summe der Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe doppelt nimmt.

Stellt U den Umfang eines Rechteckes dar, dann g dessen Grundlinie und h dessen Höhe, so erhält man allgemein: $\boldsymbol{U_{\square} = 2\,(g + h)}$.

Ist der Umfang und die Grundlinie eines Rechteckes bekannt, so findet man die Höhe desselben nach folgendem Schlusse: Wenn der ganze Umfang des Rechteckes der doppelten Summe aus dessen $g + h$ entspricht, so ist der halbe Umfang $\frac{U}{2} = g + h$; vermindert man weiters den halben Umfang um die bekannte Grundlinie, so ist leicht einzusehen. daß die Differenz $\frac{U}{2} - g$ auch nur der Summe $g + h$ vermindert um dasselbe g entsprechen kann, somit $\frac{U}{2} - g = g + h - g$, oder $\frac{U}{2} - g = h$.

Durch einen ähnlichen Vorgang kann man, wenn der Umfang und die Höhe eines Rechteckes bekannt sind. die fragliche Grundlinie finden. Man erhält in diesem Falle $g = \frac{U}{2} - h$.

2. Teilt man in dem Rechtecke $ABCD$ (Fig. 106) die beiden Längsseiten in je 4 und die beiden Breitseiten in je 3 gleiche Teile, so daß ein Teil 1 *cm* lang ausfällt, und verbindet man die Teilungspunkte der gegenüberliegenden Seiten durch Gerade, so zerfällt das Rechteck in lauter Quadrate zu je 1 cm^2. Man erhält sohin 3 Reihen zu je 4 cm^2, oder $3 \times 4\,cm^2 = 12\,cm^2$.

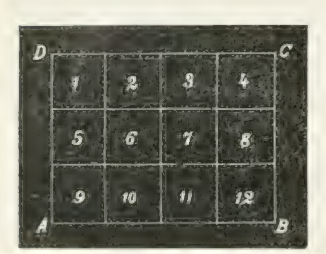


Fig. 106.

Auf ähnliche Weise würde man finden, daß die Fläche eines Rechteckes, dessen eine Längsseite 7 *m* und dessen eine Breitseite 5 *m* mißt, $5 \times 7\,m^2 = 35\,m^2$ beträgt. Nimmt man die eine Längsseite eines Rechteckes als dessen Grundlinie und die eine Breitseite als dessen Höhe an, so folgt:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird berechnet, indem man die Maßzahl der Grundlinie (Länge) mit der Maßzahl der Höhe (Breite) multipliziert: oder kürzer: Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus dessen Grundlinie und Höhe.

Allgemein erhält man unter Beibehaltung der bereits vorhin angenommenen Bezeichnungen für die bezüglichen Maßzahlen für den Flächeninhalt des Rechteckes:

$$\boldsymbol{F_{\square} = g \,.\, h}.$$

Hieraus ist $g = \frac{F}{h}$, wenn F und h, und $h = \frac{F}{g}$, wenn F und g bekannt sind.

3. Bezeichnen G und H die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe des einen, dann g und h die entsprechenden Maßzahlen des anderen Rechteckes, so ist

$$F = G \,.\, H$$

und $f = g\,.\,h$, daher auch

$$F : f = G \,.\, H : g \,.\, h.$$

Ist in den Rechtecken $G = g$, dann verhält sich $F : f = H : h$, und
ist $H = h$, „ „ „ $F : f = G : g$.

§ 19. Das schiefwinklige Parallelogramm.

1. Da auch ein schiefwinkliges Parallelogramm die Eigenschaft hat, daß je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich sind, so berechnet man den Umfang eines solchen Parallelogrammes, dessen längere Seite beispielsweise 5 *cm* und dessen kürzere Seite 3 *cm* lang wäre, aus $2 \times 5\,cm + 2 \times 3\,cm = 2\,(5 + 3)\,cm = 16\,cm$. Es ist daher allgemein, wenn a und b zwei anstoßende Seiten bedeuten
$U \square = 2\,(a + b)$.

2. Wird AB, Fig. 107, als Grundlinie des schiefwinkligen Parallelogrammes $ABCD$ angenommen, und errichtet man aus beiden Endpunkten derselben die entsprechenden Höhen, so entsteht das Rechteck $ABEF$, welches mit dem schiefwinkligen Parallelogramme gleiche Grundlinie und Höhe hat.

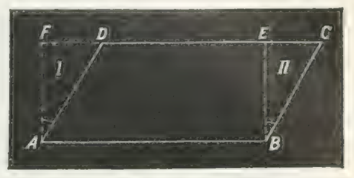


Fig. 107.

Von den in der Figur durch die beiden Senkrechten AF und BE entstandenen Dreiecken läßt sich beweisen, daß sie kongruent sind, denn

$AD = BC$, als Parallel-Seiten des Parallelogrammes $ABCD$,
$AF = BE$, als Senkrechte zwischen Parallelen,
$\sphericalangle A = \sphericalangle B$, als Parallelwinkel.

Es ist somit $\triangle I \cong \triangle II$ nach dem II. Kongruenzfalle.

Da aber kongruente Figuren flächengleich sind, also $\triangle I = \triangle II$, und jede Größe sich selbst gleich ist, also $ABED = ABED$,
so ergibt sich durch Addition

$$\underbrace{ABED + \triangle I}_{ABEF} = \underbrace{ABED + \triangle II}_{ABCD},$$

d. h.: **Jedes schiefwinklige Parallelogramm läßt sich in ein flächengleiches Rechteck, das mit demselben die gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, verwandeln.**

Aus diesem Lehrsatze folgt:

a) **Zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.**

b) **Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogrammes ist ebenso wie jener eines Rechteckes gleich dem Produkte aus der Grundlinie und Höhe,** d. i.

$$F \square = g \cdot h,$$

woraus $g = \frac{F}{h}$ und $h = \frac{F}{g}$.

§ 20. Das Dreieck.

1. **Der Umfang eines ungleichseitigen Dreieckes wird berechnet als Summe der Maßzahlen aller drei Seiten, oder bei einem gleichseitigen Dreiecke als dreifaches Produkt der Maßzahl einer Seite.**

2. Aus Fig. 108, *I*, *II* und *III*, ersieht man, daß sich zu jedem Dreiecke durch zwei Parallele, welche man aus zwei Eckpunkten desselben zu je einer gegenüberliegenden Seite zieht, ein schiefwinkliges Parallelogramm, beziehungsweise Rechteck zeichnen läßt, welches je die doppelte Fläche des gegebenen Dreieckes besitzt; oder daß ein Dreieck

die Hälfte eines Parallelogrammes oder Rechteckes darstellt, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Da nun die Fläche eines Parallelogrammes gleich ist dem Produkte der Maßzahlen von Grundlinie und Höhe, so ist die Fläche eines Dreieckes nur die Hälfte jener eines Parallelogrammes, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Es ergibt sich demnach die Regel:

Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe geteilt durch 2, oder, was das-

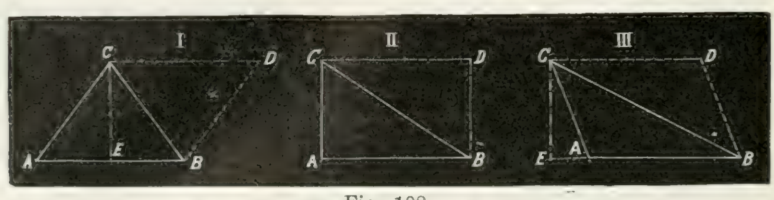


Fig. 108.

selbe ist, gleich dem Produkte aus der Grundlinie mit der halben Höhe. Allgemein ist daher $F\triangle = \frac{g \cdot h}{2} = g \cdot \frac{h}{2}$, woraus $g = \frac{2F}{h}$, und $h = \frac{2F}{g}$.

3. Da der Flächeninhalt eines Dreieckes allgemein gegeben ist durch das Produkt aus der Grundlinie mit der halben Höhe, so müssen alle Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe, welche Form sie auch immer haben mögen, die gleiche Fläche besitzen. Es besteht daher ebenso wie bei den Parallelogrammen der Satz:

Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

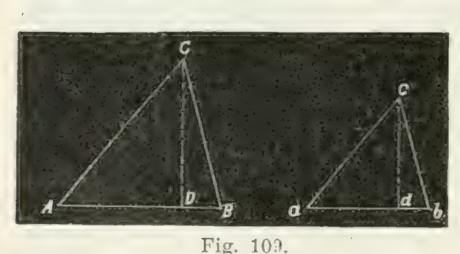


Fig. 109.

4. Es ist in Fig. 109 $\triangle ABC \sim \triangle abc$. Bezeichnet F den Flächeninhalt des ersten und f jenen des zweiten Dreieckes, so ist

$$F = \frac{AB \cdot CD}{2}, \text{ und } f = \frac{ab \cdot cd}{2},$$

daher $F : f = AB \cdot CD : ab : cd$.

Aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke folgt $AB : ab = AB : ab$, und
$CD : cd = AB : ab$ (§ 13, 3).

Durch Multiplikation der beiden Proportionen ergibt sich

$$AB \cdot CD : ab \cdot cd = AB \cdot AB : ab \cdot ab,$$

$$\text{oder } \frac{AB \cdot CD}{2} : \frac{ab \cdot cd}{2} = AB^2 : ab^2,$$

$$\text{daher auch } F \quad : \quad f \quad = AB^2 : ab^2, \text{ d. h.:}$$

Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich so wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten.

Da sich aber in ähnlichen Dreiecken die Höhen wie die Grundlinien verhalten, so gilt auch der Satz:

Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Höhen.

Zusätze:

1. Sind alle drei Seiten eines Dreieckes gegeben und bezeichnet man dieselben der Reihe nach mit a, b, c und die halbe Summe derselben mit s, also $s = \frac{a+b+c}{2}$, so berechnet man den Flächeninhalt dieses Dreieckes (was hier allerdings noch nicht bewiesen werden kann) nach der Formel $F_\triangle = \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)}$.

Es ist also, wenn wir die Seiten des Dreieckes beispielsweise mit $a = 3$, $b = 4$, $c = 5\,cm$ annehmen, $s = \frac{3+4+5}{2} = 6$; $s - a = 6 - 3 = 3$, $s - b = 6 - 4 = 2$, $s - c = 6 - 5 = 1$ und der Flächeninhalt dieses Dreieckes $F = \sqrt{6 \times 3 \times 2 \times 1} = \sqrt{36} = 6\,cm^2$.

2. Bei einem rechtwinkligen Dreiecke nimmt man gewöhnlich die eine Kathete desselben als Grundlinie und die andere Kathete als Höhe an. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes berechnet sich danach als das halbe Produkt aus den beiden Katheten.

3. Nach § 7, 3, *e) g)* stehen die beiden Diagonalen eines Quadrates oder eines Rhombus senkrecht aufeinander. Zerlegt man also ein Quadrat oder einen Rhombus durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so ist diese Diagonale die gemeinsame Grundlinie für beide Dreiecke, während die Höhen dieser Dreiecke als die beiden Hälften der anderen Diagonale erscheinen. Daraus folgt:

Der Flächeninhalt eines Quadrates oder eines Rhombus ist gleich dem halben Produkte aus den beiden Diagonalen.

§ 21. Das Trapez.

1. Der Umfang eines Trapezes wird erhalten, indem man die Maßzahlen der vier Seiten addiert.

2. Um den Flächeninhalt eines Trapezes zu bestimmen, kann man sich dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen, jedes Dreieck für sich berechnen und die gefundenen Resultate addieren. Nimmt man jedoch die beiden Parallelseiten und die Höhe zwischen diesen als gegeben an, so läßt sich eine allgemeine Formel für die Fläche des Trapezes wie folgt herleiten:

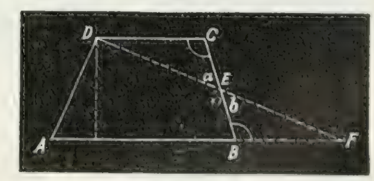


Fig. 110.

Halbiert man in dem Trapeze $ABCD$, Fig. 110, eine der nicht parallelen Seiten, BC, und verbindet man den Halbierungspunkt E mit D durch eine Gerade, deren Verlängerung die verlängerte eine Parallelseite des Trapezes in F trifft, so entstehen hiedurch zwei kongruente Dreiecke. Da die Seite CB halbiert wurde, ist $CE = EB$, dann ist $\sphericalangle a = \sphericalangle b$ als Scheitelwinkel und $\sphericalangle C = \sphericalangle B$ als Wechselwinkel.

Es ist daher nach dem I. Kongruenzfalle $\triangle DCE \cong \triangle BFE$.

Addiert man zu der sich selbst gleichen Fläche $ABED = ABED$ die kongruenten, daher flächengleichen Dreiecke $\triangle DCE = \triangle BFE$, so müssen auch die Summen gleich sein, also $\underbrace{ABED + \triangle DCE}_{ABCD} = \underbrace{ABED + \triangle BFE}_{= \triangle AFD}$,

Die Grundlinie des Dreieckes AFD besteht aus den Strecken $AB +$ $+ BF$; aus der Kongruenz der Dreiecke DCE und BFE folgt aber, daß $DC = BF$, wonach die Grundlinie $AF = AB + DC$, d. i. der Summe der beiden parallelen Seiten des Trapezes. Daraus folgt:

a) Jedes Trapez läßt sich in ein flächengleiches Dreieck verwandeln, welches die Summe der Parallelseiten des Trapezes zur Grundlinie und die Höhe des Trapezes zur Höhe hat.

Da das dem Trapez flächengleiche Dreieck (Fig. 110) die Summe der beiden Parallelseiten, die wir kurz mit a und b bezeichnen wollen, zur Grundlinie und die Höhe des Trapezes, welche kurz mit h bezeichnet wird, zur Höhe hat, so ist die Fläche des Dreieckes und somit auch jene des Trapezes $\boldsymbol{F}_{\triangle} = \frac{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,.\,\boldsymbol{h}}{2} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}\,.\,\boldsymbol{h}$, oder, da die Mittellinie m eines Trapezes $= \frac{a + b}{2}$ ist, $\boldsymbol{F}_{\triangle} = \boldsymbol{m}\,.\,\boldsymbol{h}$. In Worten:

b) Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Summe der Parallelseiten mit der Höhe, oder dem Produkte der halben Summe der Parallelseiten mit der Höhe, oder der Mittellinie mit der Höhe.

Ist z. B. $a = 6\,cm$, $b = 4\,cm$ und $h = 3\,cm$, so ist $F = \frac{6 + 4}{2}\,.\,3 =$ $= 5\,.\,3 = 15\,cm^2$.

Über die Berechnung einer der Parallelseiten oder der Höhe aus der Flächenformel für das Trapez s. Arithmetik S. 75 u. f.

§ 22. Das Trapezoid.

1. Der Umfang eines Trapezoides wird ermittelt, indem man die Länge der einzelnen Seiten bestimmt und hierauf die erhaltenen Maßzahlen addiert.

2. Der Flächeninhalt eines Trapezoides wird am einfachsten gefunden, wenn man das Trapezoid durch eine Diagonale in zwei Dreiecke teilt, jedes derselben für sich berechnet und die gefundenen Maßzahlen addiert; man erhält alsdann, wenn die Diagonale AC, Fig. 111, mit a und die beiden Höhen mit h_1 und h_2 bezeichnet werden,

$$F = \frac{a\,.\,h_1}{2} + \frac{a\,.\,h_2}{2} = \frac{a\,.\,h_1 + a\,.\,h_2}{2} = \frac{\boldsymbol{a}^{*}\,.\,(\boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2)}{\boldsymbol{2}},$$

d. h.: Die Fläche eines Trapezoides ist gleich dem halben Produkte aus einer Diagonale mit der Summe der auf diese gefällten Höhen.

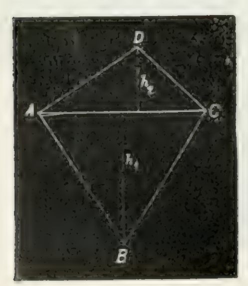


Fig. 111.

Ist beispielsweise $a = 12\,cm$, $h_1 = 8\,cm$ und $h_2 =$ $= 6\,cm$, so ist $F = \frac{12\,(8 + 6)}{2} = \frac{168}{2}\,cm^2 = 84\,cm^2$.

§ 23. Das Vieleck.

1. Das regelmäßige Vieleck.

a) Der Umfang eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Produkte aus der Länge einer Seite mit der Anzahl der Seiten.

*) Der gemeinsame Faktor a „herausgehoben".

b) Verbindet man den Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes mit allen Eckpunkten desselben, so entstehen, wie bereits in § 8, Punkt 3, gezeigt wurde, soviele untereinander kongruente Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat. Diese Dreiecke haben je eine Umfangsseite des Vieleckes zur Grundlinie und den Abstand einer Umfangsseite vom Mittelpunkte des Vieleckes zur Höhe. Der Flächeninhalt des ganzen regelmäßigen Vieleckes setzt sich also zusammen aus den Flächen aller dieser Dreiecke. Man wird somit die Fläche eines Dreieckes berechnen, die gefundene Maßzahl mit der Anzahl der Dreiecke, d. i. mit der Seitenzahl des Vieleckes, multiplizieren und erhält so den Flächeninhalt des ganzen regelmäßigen Vieleckes.

Bezeichnet s eine Seite, n die Anzahl der Seiten und a den Abstand einer Seite vom Mittelpunkte des Vieleckes, so ist $s \times \frac{a}{2}$ die Fläche eines Dreieckes und $n \,.\, s \,.\, \frac{a}{2}$ die Fläche des ganzen Vieleckes. Da aber $n \,.\, s$ den Umfang vorstellt, so ist der Flächeninhalt des Vieleckes $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} \,.\, \frac{a}{2}$. In Worten:

aa) **Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes wird berechnet, indem man die Maßzahl des Umfanges mit der halben Maßzahl des Abstandes einer Seite vom Mittelpunkte multipliziert.**

Gestützt auf den Satz: Zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich, § 20, Punkt 3, Seite 146, läßt sich die vorstehende Regel auch noch wie folgt beweisen:

Das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$, Fig. 112, zerfällt durch die Verbindung der Eckpunkte mit dem Mittelpunkte O in 6 kongruente Dreiecke. $ABO \cong BCO \cong \cong CDO \cong DEO \cong EFO \cong \cong FAO$. Der senkrechte Abstand einer Seite vom Mittelpunkte ist MO. Trägt man auf die Verlängerungen von AB die Seiten des Vieleckes auf und verbindet man weiters die Teilungspunkte mit O, so entstehen die Dreiecke LKO, KAO, ABO, BGO, GHO, HJO.

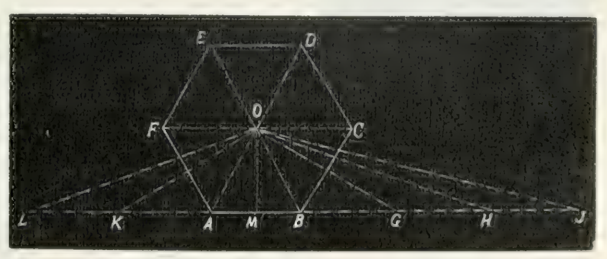


Fig. 112.

Diese Dreiecke sind mit den vorgenannten 6 Dreiecken des Vieleckes flächengleich, da sie alle untereinander gleiche Grundlinien und gleiche Höhen *(MO)* haben. Es ist somit auch das ganze Polygon $ABCDEF$ flächengleich mit dem Dreiecke LJO. Die Grundlinie LJ des Dreieckes LJO ist aber dem Umfange des Vieleckes gleich, und die Höhe MO entspricht dem Abstande einer Seite des Polygons vom Mittelpunkte desselben. Daraus folgt:

bb) **Jedes regelmäßige Vieleck läßt sich in ein flächengleiches Dreieck verwandeln, das den Umfang des Vieleckes zur Grundlinie und den Abstand einer Seite vom Mittelpunkte des Vieleckes zur Höhe hat.**

Der Abstand einer Vieleckseite vom Mittelpunkte steht bei jedem regelmäßigen Vielecke zur Seite in einem ganz bestimmten Verhältnisse.

Er ist bei einem regelmäßigen Dreiecke gleich dem 0·2887fachen der Seite, bei einem Quadrate dem 0·5000fachen, bei einem regelmäßigen Fünfecke dem 0·6882fachen, bei einem regelmäßigen Sechsecke dem 0·8660fachen, bei einem regelmäßigen Achtecke dem 1·2071fachen der Seite usw.

Beispiel: Der Umfang eines regelmäßigen Sechseckes ist 39 *cm*; wie groß ist der Flächeninhalt? s (Seite) = 39 *cm* : 6 = 6·5 *cm*; daraus ist der Abstand einer Seite vom Mittelpunkte = 0·866 . 6·5 *cm* = 5·629 *cm*, und $F = \frac{39 \cdot 5{\cdot}629}{2} = 109.7655\ cm^2$.

2. Das unregelmäßige Vieleck.

a) Der Umfang eines unregelmäßigen Vieleckes wird durch Ausmessung aller Grenzlinien und Addition der erhaltenen Maßzahlen ermittelt.

b) Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes kann man auf zweierlei Art bestimmen.

aa) Mittels Zerlegung des Vieleckes durch Diagonalen in Dreiecke. Man zerlegt das unregelmäßige Polygon durch Diagonalen in Dreiecke, berechnet deren Flächeninhalte und addiert die erhaltenen Maßzahlen. Es ist z. B. das Vieleck in Fig. 113:

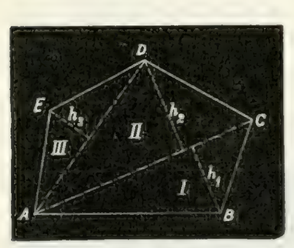


Fig. 113.

$$ABCDE = \triangle\, I + \triangle\, II + \triangle\, III,$$
$$\triangle\, I = AC \cdot \frac{h_1}{2}$$
$$\triangle\, II = AC \cdot \frac{h_2}{2}$$
$$\triangle\, III = AD \cdot \frac{h_3}{2}$$
$$\underbrace{\triangle\, I + \triangle\, II + \triangle\, III}_{ABCDE} = AC \cdot \frac{h_1}{2} + AC \cdot \frac{h_2}{2} + AD \cdot \frac{h_3}{2}.$$

bb) Mittels Zerlegung des Vieleckes durch Abszissen und Ordinaten in Trapeze und Dreiecke.

Man verbindet zwei am weitesten voneinander entfernte Eckpunkte des unregelmäßigen Vieleckes durch eine Diagonale und fällt auf diese als Abszissenachse aus allen anderen Eckpunkten des Vieleckes Senkrechte (Ordinaten). Berechnet man hierauf die Flächeninhalte der hiedurch entstandenen Dreiecke und Trapeze, so erhält man durch Addition dieser Maßzahlen den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes.

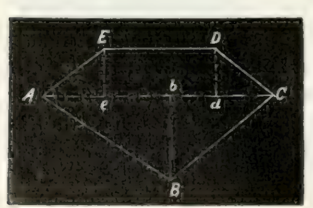


Fig. 114.

Das unregelmäßige Vieleck in Fig. 114 setzt sich zusammen aus folgenden Flächen:
$ABCDE = \triangle\, AbB + \triangle\, bCB + \triangle\, dCD + \square\, edDE + \triangle\, AeE$.

Nehmen wir beispielsweise für die bezüglichen Ordinaten Bb = 11 *cm*, Dd = 6·6 *cm*, Ee = 6·2 *cm* und für die Abszissen Ab = 16·8 *cm*, bC = 14·2 *cm*, dC = 9·8 *cm*, ed = 14·0 *cm* und Ae = 7·2 *cm* als Längenmaßzahlen an, so wird sich die Rechnung wie folgt gestalten:

$\triangle AbB = \frac{Ab.Bb}{2} = \frac{16{\cdot}8 \times 11{\cdot}0}{2} = \frac{184{\cdot}8}{2}$ $= 92{\cdot}4\ cm^2$

$\triangle bCB = \frac{bC.Bb}{2} = \frac{14{\cdot}2 \times 11{\cdot}0}{2} = \frac{156{\cdot}2}{2}$ $= 78{\cdot}1\ cm^2$

$\triangle dCD = \frac{dC.Dd}{2} = \frac{9{\cdot}8 \times 6{\cdot}6}{2} = \frac{64{\cdot}68}{2}$ $= 32{\cdot}34\ cm^2$

$\square edDE = \frac{Ee + Dd}{2} . cd = \frac{6{\cdot}2 + 6{\cdot}6}{2} . 14 = 6{\cdot}4 \times 14 = 89{\cdot}6\ cm^2$

$\triangle AeE = \frac{Ae.Ee}{2} = \frac{7{\cdot}2 \times 6{\cdot}2}{2} = \frac{44{\cdot}64}{2}$ $= 22{\cdot}32\ cm^2$

Fläche des Vieleckes $ABCDE$ . . . . $= 314{\cdot}76\ cm^2$

§ 24. Der Kreis.

1. Beschreibt man mit verschieden großen Halbmessern mehrere Kreise und vergleicht man die Längen der Durchmesser mit den Längen der zugehörigen Peripherien, um welche beispielsweise Fäden herumgelegt wurden, welche dann in eine gerade Linie ausgespannt werden können, so wird man finden, daß jeder Durchmesser in dem zugehörigen Kreisumfange gleich oft enthalten ist. Es steht somit in jedem Kreise der Umfang des Kreises zu dem Durchmesser in einem bestimmten Verhältnisse.

Bei der Konstruktion eines regelmäßigen, einem Kreise eingeschriebenen Sechseckes haben wir gesehen, daß sich der Halbmesser auf der Peripherie genau sechsmal als Sehne auftragen läßt. Da aber der Kreisbogen länger ist als die zugehörige Sehne, so muß auch der ganze Kreisumfang länger sein als der sechsfache Halbmesser oder der dreifache Durchmesser. Der Exponent des Verhältnisses, welches zwischen dem Umfange und dem Durchmesser eines Kreises besteht, muß daher auch größer sein als die Zahl 3. Ludolf van Ceulen berechnete die Zahl, mit welcher man den Durchmesser eines Kreises multiplizieren muß, um den Umfang desselben zu erhalten, d. i. den Exponenten des Verhältnisses zwischen dem Umfange und dem Durchmesser eines Kreises, und man nannte sie nach ihm die Ludolfsche Zahl oder auch die Kreisumfangszahl. Dieselbe wird allgemein mit dem Buchstaben π*) bezeichnet. Sie ist ein unendlicher Dezimalbruch und wird je nach dem gewünschten Genauigkeitsgrade mit mehr oder weniger Dezimalstellen in Rechnung gebracht. Auf 10 Dezimalstellen berechnet ist $\pi = 3{\cdot}1415926536$; in vielen Fällen aber wird π mit $3{\cdot}14$ oder $3\frac{1}{7}$ in Rechnung gebracht.

Bezeichnet r den Halbmesser, d den Durchmesser und U den Umfang eines Kreises, so hat man nach dem Vorstehenden

$$\boldsymbol{U_\bigcirc = d.\pi}, \text{ oder } \boldsymbol{U_\bigcirc = 2r.\pi}, \text{ woraus } d = \frac{U}{\pi} \text{ und } r = \frac{U}{2\pi}; \text{ mit Worten:}$$

Der Umfang eines Kreises ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl des Durchmessers mit der Ludolfschen Zahl.

Ist beispielsweise der Halbmesser eines Kreises $r = 3\ m$, so ist der Durchmesser $d = 6\ m$ und der Umfang $U = 6\ m \times 3{\cdot}14 = 18{\cdot}84\ m$; oder

*) π (griech.), sprich pi.

wenn der Umfang eines Kreises $U = 19\,m$, so ist $r = \frac{19}{2\,.\,3\frac{1}{7}} = 3\frac{1}{44}\,m$, und $d = 6\frac{1}{22}\,m$.

2. Sind R und r die Halbmesser, D und d die Durchmesser und U und u die Umfänge zweier Kreise, so ist:

$$U = 2\,R\,.\,\pi \text{ oder } D\,.\,\pi,$$
$$u = 2\,r\,.\,\pi \text{ oder } d\,.\,\pi,$$

daher auch $U : u = 2\,R\pi : 2\,r\pi$, oder*) $U : u = R : r$,
und $U : u = D\,.\,\pi : d\pi$, oder**) $U : u = D : d$, d. h.:

Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser oder wie ihre Durchmesser.



Fig. 115.

3. Ein Kreisbogen wird entweder im Gradmaße durch Grade, Minuten und Sekunden, oder im Längenmaße durch die Längeneinheit ausgedrückt. Wenn die Zentriwinkel 1, 2, 3, 4, 5 in Fig. 115 einander gleich sind, so müssen es auch die zugehörigen Kreisbogen AB, BC, CD, EF und FG und ebenso auch die zu den Kreisbögen gehörigen Kreisausschnitte sein. Daraus folgt, daß der Winkel 1 in dem Winkel AOD 3mal und in dem Winkel EOG 2mal enthalten ist, dann, daß sich der Bogen AB auf dem Bogen AD 3mal und auf dem Bogen EG 2mal auftragen läßt, und schließlich, daß der Kreisausschnitt AOB in dem Kreisausschnitte AOD 3mal und in dem Kreisausschnitte EOG 2mal enthalten ist. Es bestehen somit folgende Verhältnisse:

$$\sphericalangle AOD : \sphericalangle EOG = 3 : 2,$$
$$\text{arc. } AD : \text{arc. } EG = 3 : 2,$$
und Kreisausschnitt (Sektor) $AOD : EOG = 3 : 2.$

Somit $\sphericalangle AOD : \sphericalangle EOG =$ arc. AD : arc. $EG =$ $=$ Sektor AOD : Sektor EOG, d. h.:

Zwei Kreisbogen oder zwei Kreisausschnitte verhalten sich in einem Kreise wie die zugehörigen Zentriwinkel.

Ist daher ein Kreisbogen im Gradmaße bestimmt und wollte man denselben im Längenmaße ausdrücken oder umgekehrt, so wendet man, gestützt auf obigen Satz, folgenden Schluß an: Die Länge eines Kreisbogens verhält sich zu dem Umfange des Kreises wie der entsprechende Zentriwinkel zu $4\,R$.

Bezeichnet r den Halbmesser eines Kreises und l das Längenmaß und g^0 das Gradmaß eines Kreisbogens in demselben, so erhält man nach dem Vorhergehenden die allgemeine Proportion:

$l : 2\,r\pi = g^0 : 4\,R$, aus welcher sich jede der unbekannten Größen leicht berechnen läßt.

Beispiele: *a)* Wie lang ist ein Bogen von 25^0 in einem Kreise, dessen Halbmesser $= 3\,m$? $l : 2\,r\pi = g^0 : 360^0$. Nun ist $2\,r\pi$ bei $r = 3\,m$ .. $2\,.\,3\,.\,3{\cdot}14 = 18{\cdot}84\,m$, daher $l : 18{\cdot}84 = 25 : 360$, woraus $l = \frac{18{\cdot}84\,.\,25}{360} = 1{\cdot}308\,m$.

b) Wie viele Grade hat ein Kreisbogen von $3\,cm$ Länge, wenn der Durchmesser dieses Kreises $= 7{\cdot}64\,cm$? $l : 2\,r\pi = g^0 : 360^0$. Bei $7{\cdot}64\,cm$

*) Das zweite Verhältnis durch 2π gekürzt.
**) Das zweite Verhältnis durch π gekürzt.

Durchmesser ist $2 r \pi = 7{\cdot}64\,cm \,.\, 3{\cdot}14 = 23{\cdot}99\,cm$, daher $3 : 23{\cdot}99 = g^0 : 360^0$, woraus $g^0 = \frac{3 \,.\, 360^0}{23{\cdot}99} = 24 \frac{45^0}{23{\cdot}99}$;*) kürzt man 24 gegen das fast gleich große 23·99, so ergibt sich $g^0 =$ rund 45^0.

4. Der Flächeninhalt eines Kreises wird nach der für die Flächenberechnung eines regelmäßigen Vieleckes aufgestellten Formel ermittelt. Teilt man nämlich den Umfang eines Kreises in eine sehr große Anzahl gleicher Teile, welche wegen ihrer geringen Längenausdehnung als gerade Linien, *(a b)* Fig. 116, angesehen werden können, und verbindet man alle Teilungspunkte mit dem Mittelpunkte *O*, so zerfällt die Kreisfläche in lauter Dreiecke. Betrachtet man die sehr kurzen Teile *(a b)*, welche in ihrer Summe den Umfang des Kreises geben, als Grundlinien dieser Dreiecke, so entfällt auf die Höhe derselben der Halbmesser des Kreises; es sind somit alle Höhen untereinander gleich. Der Flächeninhalt eines Dreieckes entspricht dem Produkte aus Grundlinie und dem halben Halbmesser. Die Fläche des ganzen Kreises besteht sonach aus den Flächeninhalten aller Dreiecke, nämlich aus dem Produkte aus der Summe aller Grundlinien (also aus dem Umfange des Kreises) und dem halben Halbmesser.



Fig. 116.

Bezeichnet r den Halbmesser des Kreises, so ist der Flächeninhalt $F = u \times \frac{r}{2}$, oder $F = 2 r \,.\, \pi \,.\, \frac{r}{2} = r \,.\, r \,.\, \pi = r^2 \,.\, \pi$.

$$\boldsymbol{F_{\bigcirc} = r^2 \pi},$$ d. h. in Worten:

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Quadrate des Halbmessers multipliziert mit der Ludolfschen Zahl.

5. Stellen R und r die Halbmesser, D und d die Durchmesser und F und f die Flächeninhalte zweier Kreise dar, so ist

$$F = R^2 \,.\, \pi \text{ oder } \frac{D^2}{4} \,.\, \pi,$$

$$f = r^2 \,.\, \pi \text{ oder } \frac{d^2}{4} \,.\, \pi,$$

daher auch $F : f = R^2 \,.\, \pi : r^2 \,.\, \pi$, oder $F : f = R^2 : r^2$,

und $F : f = \frac{D^2}{4} \,.\, \pi : \frac{d^2}{4} \,.\, \pi$, oder $F : f = D^2 : d^2$, d. h.:

Die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

6. In derselben Weise, wie der Flächeninhalt eines Kreises aus seinem Umfange multipliziert mit dem halben Radius hergeleitet wurde, läßt sich auch die Fläche eines Kreisausschnittes (Sektors), Fig. 117, aus der zugehörigen Bogenlänge und dem halben Radius berechnen. Es ist dann

$$\boldsymbol{F_{\wedge} = l \,.\, \frac{r}{2}},$$ d. h. in Worten:

Die Fläche eines Kreisausschnittes ist gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie der betreffende Kreisbogen und dessen Höhe der Halbmesser des Kreises ist.

---

*) Es ist wohl selbstverständlich, daß die Winkel hier nur in Graden angegeben sein dürfen; ' und " müssen daher auf Grade reduziert werden.

Ist statt der Bogenlänge der zugehörige Zentriwinkel m^0 gegeben, so schließt man: Bei einem Winkel von 360^0 und dem Radius r ist die Fläche $r^2\pi$, daher bei einem Winkel von $1^0 \ldots \frac{r^2\pi}{360}$, und bei einem Winkel von $m^0 \ldots \frac{r^2\pi}{360} . m^0 = \frac{m^0}{360} . r^2 . \pi$.

7. Der Flächeninhalt eines Kreisringes, Fig. 118, berechnet sich als Differenz der Flächen des großen und des kleinen Kreises. Hat ersterer den Radius R, letzterer den Radius r, so ist $F = R^2\pi - r^2\pi$, oder π „herausgehoben",

$$F = \pi\ (R^2 - r^2).$$

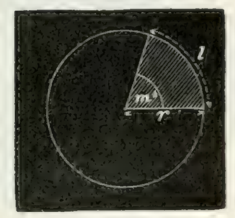


Fig. 117.

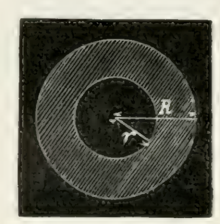


Fig. 118.

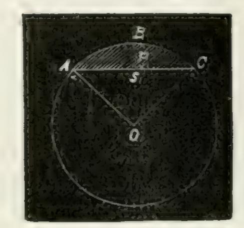


Fig. 119.

8. Die Fläche eines Kreisabschnittes (Segmentes), Fig. 119, berechnet man als Differenz zwischen der Fläche des Kreisausschnittes $ABCO$ und jener des Dreieckes ACO, mithin $F = ABCO - ACO$, wobei also die Längen des Radius, sowie des Bogens und der zugehörigen Sehne und außerdem der senkrechte Abstand der Sehne vom Kreiszentrum bekannt sein müssen.

Kennt man die Sehne s und die Pfeilhöhe p, so kann die Fläche des zugehörigen Segmentes auch gefunden werden durch die Näherungsformel: $\frac{p^3}{2s} + \frac{2ps}{3}$.

§ 25. Die Ellipse.

1. Den Umfang der Ellipse findet man annähernd genau nach der für den Umfang des Kreises bestehenden Formel $U = d . \pi$, wenn man statt des Durchmessers d beim Kreise das arithmetische Mittel aus der großen und kleinen Achse annimmt; ist a die große und b die kleine Achse, so ist

$$U = \frac{a + b}{2} . \pi.$$

2. Der Flächeninhalt einer Ellipse wird ebenfalls nach dem bei der Berechnung einer Kreisfläche eingeschlagenen Verfahren ermittelt, nur hat man statt des Quadrates des Halbmessers bei einem Kreise das Produkt aus den beiden Halbachsen der Ellipse in die Kreisflächenformel einzusetzen. Wenn, wie vor, a die große und b die kleine Achse einer Ellipse bedeutet, so ist der Flächeninhalt $F = \frac{a}{2} \times \frac{b}{2} . \pi$, d. h.:

Der Flächeninhalt einer Ellipse entspricht dem Produkte aus den Maßzahlen der beiden Halbachsen und der Ludolfschen Zahl.

§ 26. Der pythagoräische Lehrsatz.

Es sei das Dreieck ABC, Fig. 120, bei A rechtwinklig. Errichtet man über der Hypotenuse BC und den beiden Katheten AB und AC die Quadrate $BCDE$, $ABFG$ und $ACHJ$, so läßt sich zeigen, daß das Quadrat über der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

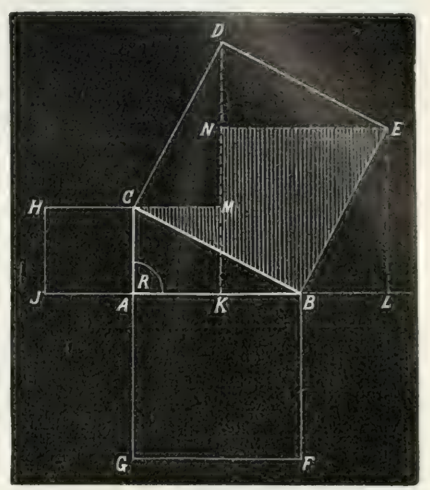


Fig. 120.

Fällt man aus den Endpunkten D und E auf AB die Senkrechten DK und EL, weiters von C und E die Senkrechten CM und EN, so sind die hiedurch entstandenen rechtwinkligen Dreiecke CMD, DNE, CAB und BLE kongruent. Dieselben haben die Hypotenuse, als Seite eines Quadrates und die ihr anliegenden Winkel, deren Schenkel entweder parallel sind oder aufeinander senkrecht stehen, wechselweise gleich.

Es ist somit $\triangle CMD \cong \triangle DNE \cong \triangle CAB \cong \triangle BLE$.

Addiert man zu dem sich selbst gleichen Fünfecke

$$BCMNE = BCMNE$$

die gleichen Summen $\underline{\triangle CMD + \triangle DNE = \triangle CAB + \triangle BLE,}$

so müssen die dadurch entstehenden Summen auch gleich sein, somit

$$\underbrace{BCMNE + \triangle CMD + \triangle DNE}_{BCDE} = \underbrace{BCMNE + \triangle CAB + \triangle BLE}_{ACMNEL},$$

daher auch $BCDE = ACMNEL$.

Das Sechseck $ACMNEL$ besteht aber, wie aus der Figur zu ersehen ist, aus den beiden Quadraten $ACMK$ und $KNEL$, welche ihrerseits wieder mit den beiden Quadraten $ACHJ$ und $ABFG$ kongruent sind.

Es ist sonach $\square BCDE = \square ACHJ + \square ABFG$,

oder auch $BC^2 = AC^2 + AB^2$, d. h.:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Um den vorstehenden Satz durch eine kurze Formel ausdrücken zu können, bezeichnet man a als die eine, b als die andere Kathete und c als die Hypotenuse und hat $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$.

Dieser Lehrsatz wird nach seinem Erfinder, dem griechischen Mathematiker Pythagoras, der pythagoräische Lehrsatz genannt.

Mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes läßt sich bei jedem rechtwinkligen Dreiecke aus zwei bekannten Seiten die dritte unbekannte leicht mittels Rechnung finden. Es ist:

1.) $c^2 = a^2 + b^2$, und $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. 2.) $a^2 = c^2 - b^2$, und $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. 3.) $b^2 = c^2 - a^2$, und $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Die Herleitung der Formeln 2 und 3 aus jener für $c^2 = a^2 + b^2$ ist in der „Formellehre", Arithmetik, § 52, genau erklärt worden.

Übung: 1.) Kleide die Formeln 2 und 3 ebenso wie 1 in Worte.

2.) $a = 3\,m$, $b = 4\,m$, so ist $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\,m$;
$c = 5\,m$, $a = 3\,m$, so ist $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4\,m$.

§ 27. Konstruktionsaufgaben.

1. Die Verwandlung der Figuren.

Eine gegebene geradlinige Figur in eine andere verwandeln, heißt eine Figur zeichnen, welche mit der ersten flächengleich ist und überdies noch gewissen gegebenen Bedingungen entspricht.

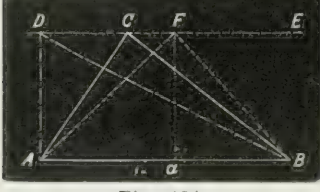


Fig. 121.

a) Ein ungleichseitiges schiefwinkliges Dreieck ABC, Fig. 121, mit Beibehaltung der Grundlinie (AB) in ein gleichschenkliges oder ein rechtwinkliges Dreieck zu verwandeln.

aa) Man ziehe durch C eine Parallele zu AB ($DE \parallel AB$), errichte im Halbierungspunkte a der AB auf AB die Senkrechte aF und verbinde F mit A und B. Das Dreieck ABF ist gleichschenklig und flächengleich mit dem Dreiecke ABC, denn es hat mit diesem die Grundlinie und die Höhe gleich.

bb) Man ziehe durch C eine Parallele zu AB ($DE \parallel AB$) und errichte aus A auf AB die Senkrechte DA. Das Dreieck ABD ist rechtwinklig und flächengleich mit dem Dreiecke ABC, denn es hat mit diesem gleiche Grundlinie und gleiche Höhe.

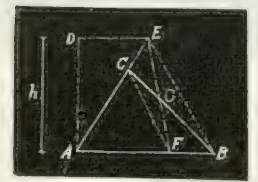


Fig. 122.

b) Ein gegebenes Dreieck ABC, Fig. 122, in ein anderes mit einer bestimmten Höhe (h) zu verwandeln.

Man errichte in A auf AB die Senkrechte $AD = h$, ziehe durch D eine Parallele zu AB, bringe diese mit der Verlängerung von AC in E zum Schnitt und verbinde E mit B. Sodann ziehe man durch C eine Parallele zu EB und verbinde F mit E. AFE ist das gesuchte Dreieck, welches flächengleich ist mit dem Dreiecke ABC.

Beweis: Nach der Konstruktion besteht das gegebene Dreieck aus
$AFGC + \triangle GFB$,
und das gesuchte Dreieck aus $AFGC + \triangle CGE$.
Da beide Dreiecke die Figur $AFGC$ gemein haben, so sind sie gleich,
wenn $\triangle GFB = \triangle CGE$.

Um diese Gleichheit zu erweisen, hat man vorerst
$$\triangle CFB = \triangle CFE,$$
weil beide Dreiecke dieselbe Grundlinie und Höhe haben. Wird nun von beiden Dreiecken das ihnen gemeinsame $\triangle CFG$ abgezogen,
$$-\triangle CFG = \triangle CFG,$$
so bleibt
$$\triangle GFB = \triangle CGE,$$
was zu beweisen war.

c) Ein gegebenes Dreieck ABC, Fig. 123, in ein Rechteck zu verwandeln.

Man ziehe durch den Halbierungspunkt a der Strecke AC eine Parallele zu AB ($bc \parallel AB$) und errichte in A und B auf AB Senkrechte, welche die Gerade bc in D und E treffen. $ABED$ ist das gesuchte Rechteck.

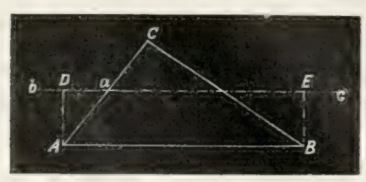


Fig. 123.

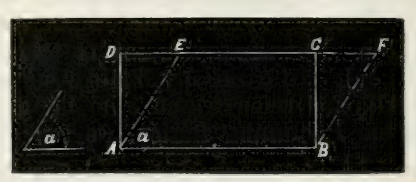


Fig. 124.

d) Ein gegebenes Rechteck $ABCD$, Fig. 124, soll unter Beibehaltung der Grundlinie (AB) in ein Parallelogramm mit einem bestimmten Winkel (a) an der Grundlinie verwandelt werden.

Man trägt den gegebenen Winkel α im Punkte A über der Grundlinie AB auf und verlängert den zweiten Schenkel, bis er die Strecke DC in E trifft. Hierauf zieht man zu AE aus B eine Parallele und bringt diese mit der Verlängerung der DC in F zum Schnitt. $ABFE$ ist das gesuchte Parallelogramm. Dasselbe ist flächengleich mit dem Rechtecke $ABCD$.

e) Ein Parallelogramm $ABCD$, Fig. 125, soll in ein anderes verwandelt werden, das eine bestimmte Grundlinie (a) hat.

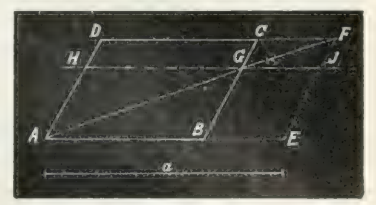


Fig. 125.

Man verlängert AB und macht $AE = a$, zieht $EF \parallel BC$ und verlängert DC bis zum Schnitt mit EF. Hierauf verbindet man A mit F und zieht durch G die Strecke $HJ \parallel DF$. $AEJH$ ist das gesuchte Parallelogramm. Dasselbe ist flächengleich dem gegebenen $ABCD$,

denn es ist $\triangle AFE \cong \triangle AFD$,
ebenso $\triangle AGB \cong \triangle AGH$,
und $\triangle GFJ \cong \triangle GFC$. Es ist daher auch

$$\triangle AFE - \triangle AGB - \triangle GFJ = \triangle AFD - \triangle AGH - \triangle GFC,$$

oder	$BEJG$	$=$	$HGCD.$
	$ABGH$	$=$	$ABGH$
Summe	$AEJH$	$=$	$ABCD.$

f) Ein gegebenes Rechteck $ABCD$, Fig. 126, soll in ein Quadrat verwandelt werden.

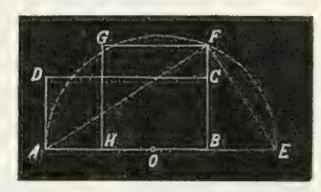


Fig. 126.

Man verlängert AB, macht $BE = BC$, halbiert AE und beschreibt über AE aus O einen Halbkreis. Verlängert man nun BC bis zum Kreisbogen, so ist BF die Seite des gesuchten Quadrates.

$\triangle ABF \sim \triangle FBE$, als rechtwinklige Dreiecke, in denen $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BFE$. Es ist daher

$$AB : BF = BF : BE \text{ und deshalb auch}$$
$$AB \times BE = BF \times BF = BF^2.$$

g) Ein unregelmäßiges Vieleck $ABCDEF$, Fig. 127, ist in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.

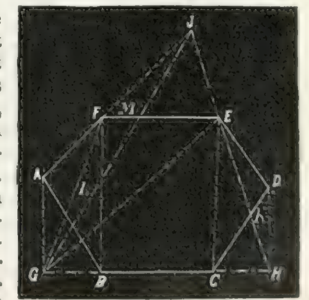


Fig. 127.

Man verwandelt das in unserem Falle gegebene Sechseck vorerst in ein Viereck. Zu diesem Zwecke zieht man EC, alsdann $DH \parallel EC$ und verbindet E mit H; zieht ferner FB, alsdann $AG \parallel FB$ und verbindet F mit G. Es ist dann $GHEF$ das dem Sechsecke flächengleiche Viereck, denn das rechts hinzugekommene Dreieck CHK ist nach dem Beweise bei Aufgabe b gleich dem abgefallenen Dreiecke EKD, und ebenso ist links $\triangle GBL = \triangle ALF$. Das Viereck $GHEF$ kann nun auf zweifache Weise in ein Dreieck verwandelt werden, und zwar einmal unter Beibehaltung einer der Höhen aus E oder F auf BC und Ermittlung einer neuen Basis, oder unter Beibehaltung der Basis GH und Aufsuchung einer neuen Höhe. In unserer Konstruktion ist der letztere Fall dargestellt. Man verbindet G mit E, zieht $FJ \parallel GE$ und bekommt in J den Scheitel des gesuchten Dreieckes GHJ. Der Beweis, daß das vom Vierecke abgefallene Stück GMF gleich ist dem hinzugekommenen MEJ, folgt aus Aufgabe b.

h) Die Aufgaben über die Geradlegung von gebrochenen Linien beruhen auf Aufgabe g. Sie schlagen so recht eigentlich in die praktische Geometrie ein und werden dortselbst behandelt.

2. Die Teilung der Figuren.

Die für den Forstschutzmann in Betracht kommenden Flächenteilungen hat derselbe gewöhnlich anläßlich kleinerer Vermessungen auszuführen. Um Wiederholungen zu vermeiden, wird dieser Punkt daher zur Genüge in der praktischen Geometrie abgehandelt.

§ 28. Aufgaben über die Berechnung des Umfanges und des Flächeninhaltes der ebenen Figuren in ihrer Anwendung auf forstliche Zwecke.

I. Das Quadrat.

1. Die Seite eines Quadrates ist *a)* 15 *m*, *b)* 23 *m* 7 *dm* 8*cm*, *c)* 12⁰ 5′, *d)* 0·385 *m*; wie groß ist der Umfang, wie groß der Flächeninhalt?

2. Der Umfang eines Quadrates ist *a)* 23·4 *m*, *b)* 18 *m* 9 *dm*, *c)* 32⁰ 4′ 8″, *d)* $7\frac{1}{5}$ *m*; wie groß ist eine Seite, wie groß der Flächeninhalt?

3. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist *a)* 64 m^2, *b)* 15 *ha* 52 *a* 36 m^2, *c)* 4□⁰ 16□′, *d)* 0·348 m^2; wie groß ist die Seite, wie groß der Umfang?

4. Was kostet ein quadratförmiger Wiesengrund von 236·5 *m* Seitenlänge, wenn 1 *ha* mit 845 *K* 50 *h* bezahlt wird?

5. Der Umfang einer Fläche beträgt 5 *km* 183 *m*; wie groß wäre eine Seite und der Flächeninhalt eines Quadrates, welches den gleichen Umfang hätte?

6. Wie groß ist die Seite und der Umfang eines Quadrates, welches dieselbe Fläche hat wie zwei Quadrate, deren Seiten 7 *m* 3 *cm* und 12 *m* 4 *dm* betragen?

7. Es ist eine Schlagfläche $F = 2·5\,ha$ aufzuforsten. Wie viele Pflanzen werden benötigt, wenn dieselben im sogenannten Quadratverbande in einer Pflanzweite von $s = 1·5\,m$ versetzt werden, d. h. an die Eckpunkte von Quadraten zu stehen kommen, deren Seite $s = 1·5\,m$ beträgt?

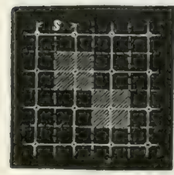


Fig. 128.

Man kann auf dem Schlage so viele Pflanzen unterbringen, so oftmal der Wuchs- oder Nährraum einer Pflanze in der Maßzahl der Schlagfläche enthalten ist. Aus Fig. 128 ist sofort ersichtlich, daß auf jede Pflanze die Fläche eines Quadrates als Nährraum entfällt, welches die Pflanzweite *s* zur Seite hat, also eine Fläche von $(1·5\,m)^2$, allgemein s^2, besitzt. Die Pflanzenzahl ist daher $Z = 2·5\,ha : (1·5\,m)^2 = 25.000\,m^2 : 2·25\,m^2 = 11.111$, oder allgemein $Z = \frac{F}{s^2}$, woraus $F = Z \,.\, s^2$.

8. Einem Förster stehen 43.600 Pflanzen zur Verfügung. Welche Kulturfläche kann er damit im Quadratverbande bestellen, wenn die Pflanzweite 1·4 *m* ist?

Schluß: Eine Pflanze nimmt einen Nährraum von $(1·4\,m)^2$ ein, 43.600 Pflanzen nehmen den ebensovielfachen Raum ein. Dieser Schluß ist ausgedrückt durch die Formel $F = Z \,.\, s^2$.

9. Eine Schlagfläche von 1·08 *ha* soll durch sogenannte Plätzesaat mit Kiefer bestellt werden. Die einzelnen Plätze sind quadratisch mit 0·3 *m* Seitenlänge und sind gegenseitig so angeordnet, daß ihre Mittelpunkte einen Quadratverband mit einer Seite von 1·2 *m* bilden. *a)* Wie viele Saatplätze sind anzufertigen; *b)* welchen Flächenraum nehmen die Saatplätze zusammen ein und den wievielten Teil von der gesamten Fläche beträgt diese Fläche; *c)* welche Samenmenge ist erforderlich, wenn pro 1 *ha* Schlagfläche 2·5 *kg* Samen in dem Falle notwendig sind, als 0·07 der Schlagfläche als Plätze bearbeitet und besäet werden?

II. Das Rechteck und das Parallelogramm überhaupt.

10. Berechne den Umfang und Flächeninhalt folgender Rechtecke: *a)* $g = 8\,m$, $h = 7\,m$; *b)* $g = 6\,m$ 3 *dm* 9 *cm*, $h = 4\,m$ 13 *cm*; *c)* $g = 3\frac{1}{2}\,m$, $h = 2\frac{3}{5}\,m$; *d)* $g = 185·7\,m$, $h = 93·8\,m$.

11. Der Umfang eines Rechteckes ist *a)* 254·6 *m*, *b)* $1342\frac{1}{8}$ *m*, *c)* 77 *m* 3 *dm* 7 *cm*, *d)* 13 *m* 27 *cm*, die entsprechenden Grundlinien sind für *a)* 122·3 *m*, *b)* $509\frac{1}{5}$ *m*, *c)* 21 *m* 8 *dm* 9 *cm*, *d)* 4 *m* 13 *cm*; wie groß ist die zugehörige Höhe und der Flächeninhalt eines jeden der vier Rechtecke?

12. Der Flächeninhalt eines Rechteckes beträgt *a)* 285 m^2, *b)* 3 *ha* 7 *a* 16 m^2, *c)* 18 m^2 25 dm^2 17 cm^2, *d)* 0·3856 m^2, die entsprechenden Höhen sind für *a)* 12·5 *m*, *b)* 105 *m* 3 *dm*, *c)* 3 *m* 7 *cm*, *d)* $\frac{3}{8}$ *m*; wie groß ist bei jedem der vier Rechtecke die Grundlinie und der Umfang?

13. Ein 387 *m* langes und 27·8 *m* breites, rechteckiges Grundstück wird gegen ein ebenso gutes von quadratischer Form umgetauscht; wie groß ist die Seite des letzteren?

14. In einer 0·49 *ha* großen quadratförmigen Pflanzschule soll ringsherum ein 1 *m* 35 *cm* breiter Weg angelegt werden; welche Fläche wird der Weg haben?

15. Wieviel *kg* Heu erhält man von einer 125·4 *m* langen und 84 *m* breiten rechteckigen Wiese, wenn 1 *ha* 35 *q* liefert?

16. Eine rechtwinklige viereckige Dachfläche ist 24 *m* 3 *dm* lang und 12 *m* 5 *dm* hoch. *a)* Wie viele Dachschindeln liegen in einer Reihe, wenn jede 6 *cm* in der Breite deckt? *b)* Wie viele Reihen liegen auf dem Dache, wenn jede Schindel 24 *cm* in der Höhe deckt? *c)* Welche Dachfläche deckt eine Schindel und wie viele Schindeln liegen auf dem Dache?

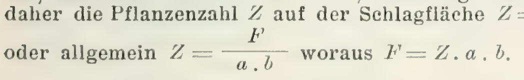
17. Ein rechteckiger Hof von 35 *m* Länge und 18 *m* Breite soll mit einem 1·5 *m* hohen Lattenzaune mit vertikaler Verlattung umgeben werden. Die zu verwendenden Latten sind 4·5 *m* lang und 5 *cm* breit, und der Zwischenraum zwischen je zwei Latten beträgt 5 *cm*. Wie viele Latten sind erforderlich?

18. Wie viele Bretter sind zur Fußbodenlegung in einem Zimmer von 6·28 *m* Länge und 5·17 *m* Breite notwendig, wenn jedes Brett 4·4 *m* lang und 25 *cm* breit ist?

19. Ein Rechteck von 97 *m* Länge und 56 *m* Breite soll in ein Quadrat verwandelt werden. In welchem Verhältnisse stehen die Umfänge der beiden Figuren?

20. Es ist eine Schlagfläche $F = 1·80\,ha$ mit Fichtenpflanzen aufzuforsten. Wie viele Pflanzen werden benötigt, wenn dieselben im sogenannten Rechtecksverbande an die Eckpunkte von Rechtecken zu stehen kommen und auf diese Art Reihen bilden, in welchen der Reihenabstand $a = 1·6\,m$ und der Pflanzenabstand $b = 1·2\,m$ beträgt?

Auf dem Schlage sind so viele Pflanzen unterzubringen, so oftmal der Wuchs- oder Nährraum einer Pflanze in der Maßzahl der Schlagfläche enthalten ist. Aus Fig. 129 ist sofort ersichtlich, daß auf jede Pflanze die Fläche eines Rechteckes als Nährraum entfällt, welches den Reihenabstand zur Grundlinie und den Pflanzenabstand zur Höhe hat, also eine Fläche von 1·6 . 1·2, oder allgemein $a \,.\, b$ besitzt. Es ist daher die Pflanzenzahl Z auf der Schlagfläche $Z = 18000 : 1·92 = 9375$,



oder allgemein $Z = \frac{F}{a \,.\, b}$ woraus $F = Z \,.\, a \,.\, b$.

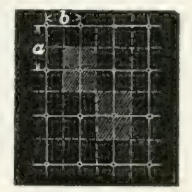


Fig. 129.

21. Welche Fläche kann man bei dem Reihenabstande von 1·6 *m* und dem Pflanzenabstande von 1·2 *m* mit 43.600 Pflanzen im Rechtecksverbande bepflanzen?

22. Auf einer Schlagfläche von 187·6 *m* Länge und 53·2 *m* Breite soll eine sogenannte Streifen- oder Riefensaat mit Kiefer ausgeführt werden, d. h. es soll die Fläche in bearbeiteten Streifen, welche in gewissen Abständen zueinander parallel laufen, besäet werden, während die übrige Fläche unbearbeitet und unbesäet bleibt. Die Entfernung der Streifen von Mitte zu Mitte soll in unserem Falle 1·3 *m*, und die bearbeitete Breite der Streifen 0·30 *m* betragen. Wieviele solcher Streifen sind zu bearbeiten, wenn dieselben zur Schlagbreite parallel laufen, wie groß ist ihre Gesamtlänge, wie groß die gesamte bearbeitete Fläche, und welchen Teil macht dieselbe von der ganzen Schlagfläche aus. Wie hoch kommt die Bodenbearbeitung der Streifen, wenn die volle Bearbeitung pro 1 *ha* 60 Männertagschichten à 1·4 *K* betragen würde?

23. Die Seite eines Rhombus mißt 12 *dm*; wie groß ist der Umfang?

24. Der Umfang eines Rhombus beträgt 384 *cm*; wie lang ist die Seite?

25. Wie groß ist der Umfang und der Flächeninhalt eines Rhombus, dessen Grundlinie 15·3 *m* und dessen Höhe 3·8 *m* beträgt?

26. Welchen Flächeninhalt und Umfang hat ein Rhombus, dessen Diagonalen 18 *m* und 13 *m* betragen?

27. Die aneinanderstoßenden Seiten eines Rhomboides betragen 32·8 *m* und 24·5 *m*; wie groß ist der Umfang?

28. Wie groß ist eine Seite eines Rhomboides von 284 *m* Umfang, wenn die andere Seite 68 *m* mißt?

29. Wie lang sind die Seiten eines Rhomboides von 392·6 *m* Umfang, wenn sich dieselben wie 6 : 7 verhalten?

30. Die längere Seite eines Grundstückes von der Form eines schiefwinkligen Parallelogrammes beträgt 6·3 *m*, die kürzere 4·5 *m*, die Höhe 3·2 *m*. Wie groß ist *a)* der Flächeninhalt, *b)* der Umfang? Wie teuer ist dieses Grundstück, wenn das *Ar* mit 38 *K* 50 *h* bezahlt wird, und wie hoch stellt sich die Umfriedung, wenn man für die Herstellung des Zaunes pro Längenmeter (inklusive Material) 2 *K* 90 *h* rechnet?

31. Von einer Waldfläche, welche die Figur eines schiefwinkligen Parallelogrammes hat, dessen Länge 133·8 *m* und dessen Breite 86·5 *m* beträgt, wird ein Stück mit 18 *m* Breite parallel zur Grundlinie kahl abgetrieben. *a)* Wie groß war die Waldfläche, *b)* wie groß ist die Schlagfläche?

III. Das Dreieck.

32. Welchen Umfang hat ein Dreieck, wenn die Seitenlängen 12·0 *m*, 14·5 *m* und 17·1 *m* betragen?

33. Berechne den Inhalt folgender Dreiecke: *a)* Grundlinie $g = 3{\cdot}4\,m$, Höhe $h = 2{\cdot}3\,m$; *b)* $g = 1\,m\;3\,dm\;4\,cm$, $h = 6\,dm\;8\,cm$; *c)* $g = 15\frac{1}{3}\,m$, $h = 7{\cdot}6\,m$; *d)* $g = 54^0\;5'\;7''$, $h = 32^0\;4'\;3''$.

34. Berechne die Höhe der Dreiecke, wenn *a)* der Inhalt $F = 53{\cdot}4\,m^2$, die Grundlinie $g = 18{\cdot}6\,m$; *b)* $F = 12\,ha\;23\,a$, $g = 132{\cdot}6\,m$; *c)* $F = 42\,dm^2\;56\,cm^2$, $g = 13{\cdot}4\,dm$.

35. Ein dreieckiges Grundstück von 386·52 *m* Grundlinie und 197 *m* Höhe hat mit einem quadratischen Grundstücke gleichen Inhalt; welche Länge hat die Seite des letzteren?

36. Welchen Flächeninhalt hat ein rechtwinkliges Dreieck, wenn die eine Kathete 86 *m* und die andere 74 *m* mißt?

37. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist 0·75 *m*, die zweite Kathete 0·85 *m*; wie groß ist die Hypotenuse?

38. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist 0·43 *m*, die eine Kathete 0·21 *m*; wie groß ist die andere Kathete?

39. Wie lang sind die Sparren eines Daches, wenn das Gebäude 24 *m* tief und das Dach 5 *m* hoch ist?

40. Bis zu welcher Höhe reicht man an einem Baume mit einer 12 *m* langen Leiter, wenn die letztere in einem Abstande von 14 *dm* an den Baum angelegt wird?

41. Wie groß ist der Umfang und der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, wenn die Seitenlänge 1·4 *m* beträgt?

$U = 3\,.\,1{\cdot}4\,m = 4{\cdot}2\,m$. Fällt man von einem Eckpunkte auf die gegenüberliegende Seite eine Höhe, so wird die Seite halbiert. Es ist demnach das Quadrat dieser Höhe

$$h^2 = 1{\cdot}4^2 - \left(\frac{1{\cdot}4}{2}\right)^2, \text{ und } h = \sqrt{1{\cdot}4^2 - 0{\cdot}7^2} = \sqrt{1{\cdot}47} = 1{\cdot}212\,m,$$

$$\text{also } F = 1{\cdot}4\,.\,\frac{1{\cdot}212}{2} = 0{\cdot}8484\,m^2.$$

Zu demselben Resultate kommt man, wenn im Sinne des § 23, Punkt 1, *bb)* die Höhe des gleichseitigen Dreieckes direkt als das 0·866fache der Seite gerechnet wird. Es ist dann $h = 0{\cdot}866\,.\,1{\cdot}4 = 1{\cdot}212\,m$, und $F = 1{\cdot}4\,.\,\frac{1{\cdot}212}{2} = 0{\cdot}8484\,m^2$.

42. Ein gleichschenkliges Dreieck hat 1248 cm^2 Inhalt, die Grundlinie mißt 36 *cm*; wie groß ist die Höhe und der Umfang dieses Dreieckes?

43. Wie groß ist der Umfang eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieckes von 28·8 m^2 Flächeninhalt?

44. Wieviel Pachtzins trägt eine dreieckige Wiese, deren Seiten 97 *m*, 86·5 *m* und 115 *m* betragen, wenn das *Ar* mit 1 *K* 25 *h* verpachtet ist?

45. Eine Schlagfläche von $F = 2{\cdot}5\,ha$ ist aufzuforsten. Wieviele Pflanzen sind hiezu erforderlich, wenn dieselben im sogenannten Dreiecksverbande in die Eckpunkte von gleichseitigen Dreiecken zu stehen kommen, deren Seite $s = 1{\cdot}5\,m$ lang ist?

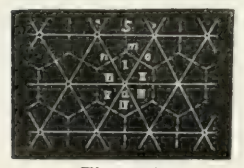


Fig. 130.

Auch hier können ebenso wie beim Quadrats- und Rechtecksverbande so viele Pflanzen auf der Schlagfläche untergebracht werden, so oftmal der Wuchsraum für die Pflanze in der Maßzahl der Schlagfläche enthalten ist. Der Wuchsraum für eine Pflanze *a* entspricht nach Fig. 130 einem regelmäßigen Sechsecke,*) welches sich aus sechs kongruenten Vierecken I, II, III, IV, V, VI, zusammensetzt, die insgesamt die doppelte Fläche eines gleichseitigen Dreieckes ausmachen, dessen Seite die Pflanzweite *s* ist. Die Fläche eines solchen Dreieckes beträgt, da die Höhe in einem gleichseitigen Dreiecke das 0·866fache einer Seite ist, $\frac{1{\cdot}5\,.\,0{\cdot}866\,.\,1{\cdot}5}{2} = \frac{0{\cdot}866\,.\,1{\cdot}5\,.\,1{\cdot}5}{2} = \frac{0{\cdot}866\,.\,1{\cdot}5^2}{2}$, daher die doppelte Fläche, d. i. der Wuchsraum einer Pflanze $2\,\frac{0{\cdot}866\,.\,1{\cdot}5^2}{2} = 0{\cdot}866\,.\,1{\cdot}5^2$, oder allgemein $0{\cdot}866\,.\,s^2$. Es ist daher in unserem Falle die Pflanzenanzahl

*) Die Aufgabe läßt sich auch in der Weise lösen, daß man sich die Fläche in Rechtecke, in deren Diagonalenkreuzungspunkten die Pflanzen zu stehen kämen, eingeteilt denkt. Doch wurde hier die Auflösung mit Hilfe von Sechsecken gewählt, weil dadurch gleichzeitig der Vorzug des Dreiecksverbandes, nämlich der nach allen Seiten hin nahezu ganz gleich große Wuchsraum, anschaulich wird.

$Z = 25000 : 0.866 \,.\, 1.5^2 = 12.830$, und allgemein $Z = \frac{F}{0.866 \,.\, s^2} = \frac{F}{s^2} \cdot \frac{1}{0.866} = \frac{F}{s^2} \,.\, 1.155$, woraus $F = \frac{Z \cdot s^2}{1.155} = Z \,.\, s^2 \,.\, \frac{1}{1.155} = Z \,.\, s^2 \,.\, 0.866$, oder in Worten: Die Pflanzenzahl beim Dreiecksverbande ist 1·155mal so groß als jene eines Quadratverbandes derselben Pflanzweite, und die mit einer vorliegenden Pflanzenzahl kultivierbare Fläche ist gleich dem 0·866fachen jener eines Quadratverbandes von derselben Pflanzweite.

46. Aufgabe 8 unter Anwendung auf den Dreiecksverband.

IV. Das Trapez und das Trapezoid.

47. Wie groß ist ein trapezförmiger Schlag, wenn die beiden parallelen Seiten 132·8 *m* und 84·6 *m* messen und der Abstand beider voneinander 32 *m* beträgt?

48. Ein trapezförmig ausgemauerter Mühlgraben (Fluder) muß zwecks Überbrückung unterbrochen und auf eine kurze Strecke als hölzerner Kanal (Holzfluder) mit rechteckigem Querschnitte fortgeführt werden. Wie hoch muß der hölzerne Kanal, der dieselbe Wassermenge durchlassen soll, wie der ausgemauerte, gemacht werden, wenn seine Breite 1·6 *m* beträgt, während die obere Seite des gemauerten Fluders 1·68 *m*, die Bodenseite 1·40 *m* und die Höhe 0·8 *m* mißt?

49. Bei einem Trapez mit 2 *ha* 64 *a* Flächeninhalt beträgt die eine Parallele 283·4 *m* und die Höhe 78 *m*; wie lang ist die zweite parallele Seite?

50. In einem Trapezoid hat die Diagonale 40 *dm*, und die auf diese Diagonale aus den beiden gegenüberliegenden Eckpunkten gefällten Senkrechten betragen 8 *dm* und 12 *dm*; wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezoides?

51. Eine Waldfläche hat die Figur eines unregelmäßigen Viereckes mit einem einspringenden Winkel. Wie groß ist die Waldfläche, wenn die Entfernung der links und rechts vom einspringenden Winkel liegenden Winkelscheitel 87·6 *m* und das dazwischen liegende Stück unbewaldeten Landes 743 m^2 groß ist und der Wald mit diesem Stücke die Form eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieckes besitzt?

V. Das Vieleck.

52. Wie groß ist der Umfang und der Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünf-, Sechs- und Achteckes mit 7 *dm* Seitenlänge?

53. Wie groß ist die Standfläche je eines regelmäßig sechs- und achteckigen Turmes, wenn der Umfang in beiden Fällen 25·45 *m* beträgt?

54. Ein Grundstück hat die Form eines unregelmäßigen Vieleckes. Die von einem Punkte möglichen Diagonalen betragen 24·8 *m*, 36·5 *m*, 35·8 *m* und 28·7 *m*; die Höhen der durch diese Diagonalen entstandenen Dreiecke sind in derselben Reihenfolge 12·4 *m*, 15·9 *m*, 16·7 *m*, 11·0 *m*, 9·5 *m*. Wie groß ist die Fläche des Grundstückes?

VI. Der Kreis.

55. Berechne den Umfang je eines Kreises mit 4 *m*, 3 *dm*, 2 *mm*, 7 *m*, 3 *dm*, 22 *mm* Halbmesser.

56. Was kostet ein Lattenzaun um ein kreisrundes Gartenbassin, wenn der Durchmesser des Kreises für den Zaun 5·88 *m* beträgt und ein laufendes *m* auf 4 *K* 50 *h* zu stehen kommt?

57. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, wenn der Umfang 5·8 *cm*, 37·4 *dm*, 17·8 *mm*, $23\frac{2}{3}$ *m* beträgt?

58. Wie groß ist der Mittendurchmesser eines Baumes, wenn der Umfang in der Mitte 56·25 *dm*, 69 *cm*, 1·6 *mm*, 8 *dm*, 7 *cm*, 1·6 *mm*, 113·1 *cm* mißt?

59. Ein Scheibenblatt enthält 6 Kreise, deren Halbmesser 0·5, 5, 10, 15, 20, 25 *cm* betragen; welche Fläche fällt jedem Kreise zu?

60. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 32 *cm*, 11 *dm*, 18 *mm*, 3 *m*, 4 *dm* beträgt.

61. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, wenn der Flächeninhalt 373·9 m^2, 44·16 cm^2, 754·3 m^2 und 133 dm^2 beträgt?

62. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt 37·39 m^2, 36·46 dm^2, 40·72 mm^2 beträgt?

63. Ein Wasserrad von 7·5 *m* Durchmesser soll 48 Schaufeln erhalten; wie weit werden diese voneinander abstehen?

64. Von zwei konzentrischen Kreisen hat der eine einen Durchmesser von 15·8 *cm*, der andere einen solchen von 13·2 *cm*; wie groß ist der Kreisring?

65. Wie lang ist ein Bogen von 45^0, wenn der Kreis einen Durchmesser von 32 *cm* hat?

66. Wie groß ist der Winkel eines Kreisausschnittes, wenn der dazugehörige Kreisbogen 32 *m* mißt und der Radius des Kreises 13 *m* beträgt?

67. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, wenn der Kreisbogen von 55^0 eine Länge von 10·8 *dm* hat?

68. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes mit einem Bogen von 46^0, wenn der Halbmesser des Kreises 37 *cm* beträgt?

69. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes mit einer Bogenlänge von 124 *dm*, wenn der Halbmesser des Kreises 56 *dm* beträgt?

70. Die Sehne eines Kreisabschnittes mißt 32·4 *cm*, die Pfeilhöhe beträgt 8·4 *cm*; wie groß ist der Flächeninhalt des Kreisabschnittes?

71. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Kreise mit 6 *cm* und 12 *cm* Halbmesser?

72. Ein Kreis, ein Quadrat und Rechteck, dessen Seiten sich wie 2 : 3 verhalten, haben den gleichen Umfang von 300 *m*; wie verhalten sich deren Flächeninhalte?

73. Ein Kreis und ein Quadrat haben den gleichen Flächeninhalt von 54·32 dm^2; wie verhalten sich ihre Umfänge?

VII. Die Ellipse.

74. Berechne den Umfang einer Ellipse, wenn die große Achse 12 *m*, 15 *m*, $18\frac{1}{2}$ *m*, 17 *m* und $25\frac{3}{4}$ *m* und die kleine Achse 9 *m*, 13 *m*, 16 *m*, 14·2 *m* und $18\frac{3}{8}$ *m* lang ist?

75. Wie lang ist die große Achse einer Ellipse, wenn der Umfang 37·5 *m* und die kleine Achse 9 *m* mißt?

76. Welchen Flächeninhalt haben die Ellipsen, wenn die große Achse 43 *dm*, 67 *dm*, 55 *dm*, 96 *dm* und die kleine Achse 29 *dm*, 48 *dm*, 36 *dm* und 87 *dm* mißt?

77. Wie lang ist die zweite Achse einer Ellipse, wenn der Flächeninhalt 187·5 cm^2 und die andere Achse 8 *cm* beträgt?

II. Abschnitt.

Die Stereometrie.

I. Kapitel.

Vorbegriffe.

§ 29. Bestimmungsstücke für die Lage einer Ebene.*)

Eine Fläche von der Eigenschaft, daß sich auf derselben durch jeden Punkt nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen, heißt eine ebene Fläche oder kurz eine Ebene (siehe Seite 99).

Denkt man sich durch eine Gerade, welche bekanntlich durch zwei Punkte im Raume vollkommen bestimmt ist, eine Ebene gelegt, so kann man dieser, indem man sie um die Gerade herumdreht, unzählig viele Lagen geben. Es ist also durch eine Gerade oder durch zwei Punkte eine Ebene im Raume nicht bestimmt. Nimmt man aber außerhalb dieser Geraden noch einen dritten Punkt an, so läßt sich nur eine einzige Ebene denken, welche durch diese zwei Stücke, nämlich durch die Gerade und den außerhalb ihr liegenden Punkt, hindurch geht.

Bestimmungsstücke für die Lage einer Ebene sind demnach:

1. Eine Gerade und ein außerhalb derselben liegender Punkt, 2. drei nicht in einer Geraden liegende Punkte, ebenso aber auch 3. zwei parallele Gerade, oder 4. zwei sich schneidende Gerade.

§ 30. Gegenseitige Lage der Ebenen und Neigungswinkel zweier Ebenen.

Zwei Ebenen, welche einander niemals treffen, mag man sie auch noch so sehr erweitern, nennt man parallel oder gleichlaufend. Treffen zwei Ebenen bei entsprechender Erweiterung zusammen, so sind sie gegeneinander geneigt oder nichtparallel. In diesem Falle schneiden sie sich, hinlänglich erweitert, in einer Geraden, welche Durchschnittslinie oder Kante genannt wird; die beiden Ebenen bilden einen Keil.

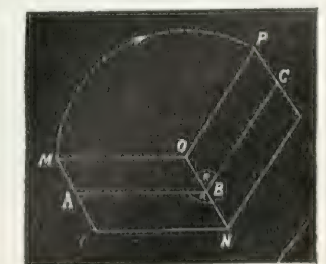


Fig. 131.

Die beiden Ebenen MN und NP, Fig. 131, sind gegeneinander geneigt; NO ist die Durchschnittslinie. Errichtet man von einem Punkte der Durchschnittslinie NO, z. B. von B aus, auf diese in jeder Ebene eine Senkrechte, $AB \perp NO$ und $CB \perp NO$, so

*) Vgl. hierüber auch § 1, Punkt 2 und 3.

wird der Winkel, welchen diese beiden Senkrechten einschließen, $\sphericalangle ABC$, der Neigungswinkel der beiden Ebenen genannt. Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so stehen sie aufeinander senkrecht, sonst schief.

§ 31. Körperliche Ecken.

Verbindet man einen im Raume feststehenden Punkt S, Fig. 132, mit den Eckpunkten eines Polygons $ABCD$, so schließen die entstandenen Flächen einen Raum ein, welcher eine körperliche Ecke oder eine Raumecke, oder auch bloß Ecke heißt. Den feststehenden Punkt S im Raume nennt man die Spitze oder den Scheitel, die entstandenen Ebenen ABS, BCS, CDS, DAS die Seitenflächen, und die Schnittlinien je zweier aufeinander folgenden Seitenflächen die Kanten der Ecke (AS, BS, CS, DS).

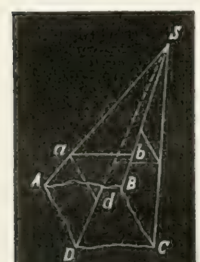


Fig. 132.

Nach der Anzahl der Kanten oder der Seiten unterscheidet man drei-, vier-, fünf- und mehrkantige oder -seitige Ecken.

Ein Kantenwinkel entsteht, wenn zwei Kanten in einem Punkte zusammenstoßen, z. B. $\sphericalangle ASD$, $\sphericalangle ASB$. Der Neigungswinkel zweier benachbarter Seitenflächen, z. B. $\sphericalangle bad$, heißt Seiten- oder Flächenwinkel.

Eine Ecke, bei welcher die Kantenwinkel untereinander gleich sind, heißt gleichseitig; eine Ecke, deren Flächenwinkel gleich groß sind, heißt gleichwinklig, und jene Ecke endlich, bei welcher sowohl Kanten- als auch Flächenwinkel übereinstimmen, wird regelmäßig oder regulär genannt.

Die Eigenschaften der körperlichen Ecken sind:

1. In jeder Körperecke müssen alle Kantenwinkel zusammengenommen kleiner sein als vier Rechte. Würde die Winkelsumme vier Rechte betragen, so müßten alle Seitenflächen in eine Ebene fallen, sie könnten also keine Ecke bilden.

2. Bei jeder dreiseitigen Ecke müssen je zwei Kantenwinkel zusammengenommen größer sein als der dritte. Wäre dies nicht der Fall, so könnte keine Ecke gebildet werden.

II. Kapitel.

Entstehung und Beschreibung der wichtigsten Körper.

§ 32. Allgemeines.

Ein von allen Seiten begrenzter Raum ist ein Körper. Geschieht die Begrenzung nur von ebenen Flächen, so heißt der Körper ein eckiger. Sind die Begrenzungsflächen nur krumme oder krumme und ebene Flächen, so wird der Körper ein runder genannt.

Die Begrenzungsfläche, auf welcher ein Körper ruht, heißt die Grundfläche oder Basis; ist noch eine zweite Begrenzungsfläche vorhanden, welche zur Grundfläche parallel geht, so wird diese die obere Grundfläche, auch Deckfläche genannt. Alle anderen Begrenzungsebenen heißen Seitenflächen oder kurz Flächen. Die Schnittlinien der Flächen heißen die Kanten, und die von den Flächen gebildeten Ecken die Ecken des Körpers.

Breitet man die Begrenzungsflächen eines Körpers auf einer einzigen Ebene aus, so erhält man das Netz des Körpers. Dasselbe bildet, z. B. aus Kartonpapier ausgeschnitten und gehörig zusammengefügt, den gegebenen Körper.

§ 33. Die eckigen Körper.

Nach der Beschaffenheit der Seitenflächen eckiger Körper unterscheidet man regelmäßige und unregelmäßige Körper. Bei den regelmäßigen Körpern sind alle Begrenzungsflächen durch regelmäßige, kongruente Vielecke gebildet und die Flächenwinkel untereinander gleich. Bei den unregelmäßigen Körpern ist dies nicht der Fall.

1. Regelmäßige Körper.

Nach der bereits früher gegebenen Erklärung ist ein regelmäßiger Körper nur von kongruenten regelmäßigen Vielecken begrenzt; die Summe aller Kantenwinkel einer Ecke muß kleiner sein als $4R$.

a) Sind die Begrenzungsflächen beispielsweise gleichseitige Dreiecke, so können von diesen drei, vier oder fünf in einer Ecke zusammentreffen. Die Summe der Kantenwinkel einer Ecke ist dann noch immer kleiner als $4R$, denn ein Kantenwinkel beträgt als Winkel eines gleichseitigen Dreieckes $\frac{2R}{3}$, mithin die Kantenwinkelsumme für eine dreiseitige Ecke $\frac{2R}{3} \times 3$, für eine vierseitige Ecke $\frac{2R}{3} \times 4$ und für eine fünfseitige Ecke $\frac{2R}{3} \times 5$ Grade. Mehr als fünf gleichseitige Dreiecke können keine Ecke mehr bilden, denn $\frac{2R}{3} \times 6 = 4R$.

Fig. 133.

Wir erhalten somit drei regelmäßige Körper, deren Begrenzungsflächen durch gleichseitige Dreiecke gebildet werden, und diese heißen: Der Vierflächner oder das Tetraeder, der Achtflächner oder das Oktaeder und der Zwanzigflächner oder das Ikosaeder.

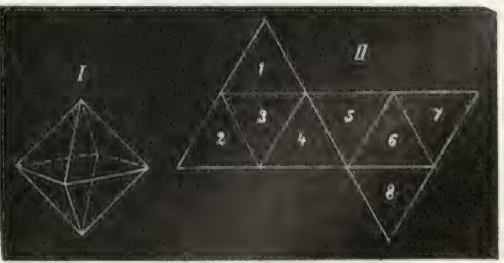


Fig. 134.

Das Tetraeder, Fig. 133, I, ist von vier gleichseitigen, untereinander kongruenten Dreiecken begrenzt, von denen je drei in einer Ecke zusammenstoßen; es hat 4 Ecken und 6 Kanten.

Denkt man sich alle Flächen des Tetraeders auf einer Ebene ausgebreitet, so erhält man das Netz desselben, Fig. 133, II.

Das Oktaeder, Fig. 134, I, hat acht gleichseitige, untereinander kongruente Dreiecke als Begrenzungsflächen; je vier derselben bilden eine Ecke. Es hat somit 6 Ecken und 12 Kanten.

Fügt man an das bereits bekannte Netz des Tetraeders noch ein zweites ganz gleiches so an, daß beide eine Dreieckseite gemeinschaftlich haben, so erhält man das Netz des Oktaeders, Fig. 134, II.

Das Ikosaeder, Fig. 135, I, ist von 20 gleichseitigen kongruenten Dreiecken begrenzt, von denen je fünf eine Ecke bilden. Es hat 12 Ecken und 30 Kanten; Fig. 135, II, zeigt das Netz desselben.

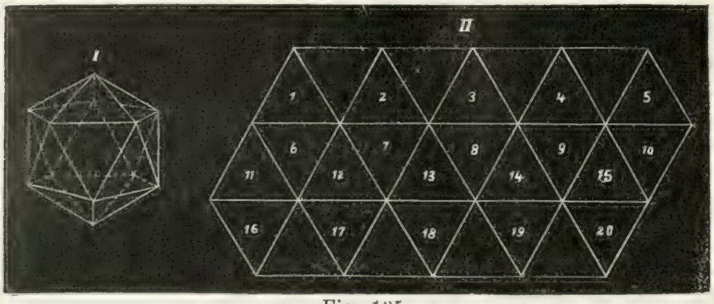


Fig. 135.

b) Ein Quadrat enthält Winkel zu je einen Rechten. Es kann somit nur durch das Zusammentreffen von drei Quadraten eine Ecke gebildet werden. Der hiedurch entstandene Körper heißt ein Sechsflächner, Hexaeder, Kubus oder Würfel.

Das Hexaeder oder der Würfel, Fig. 136, I, ist begrenzt von sechs kongruenten Quadraten, von denen je drei eine Ecke bilden; der Würfel hat somit 8 Ecken und 12 Kanten. Fig. 136, II, stellt das Netz eines Würfels dar.

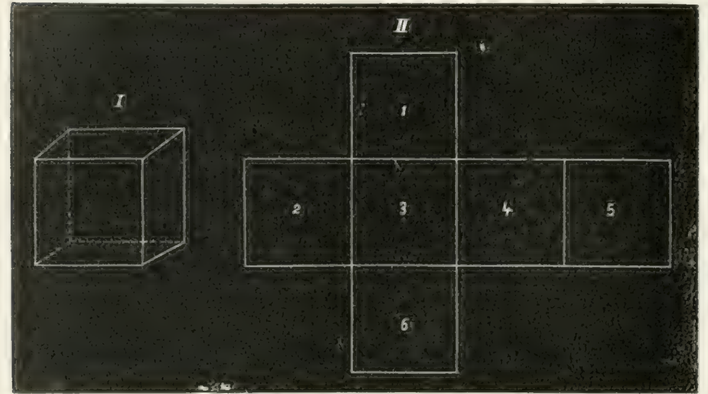


Fig. 136.

c) In einem regelmäßigen Fünfecke beträgt ein Winkel 108° (a. T.), es können sonach nur drei regelmäßige Fünfecke eine Ecke bilden. Der durch regelmäßige Fünfecke begrenzte Körper heißt ein Zwölfflächner oder Dodekaeder,

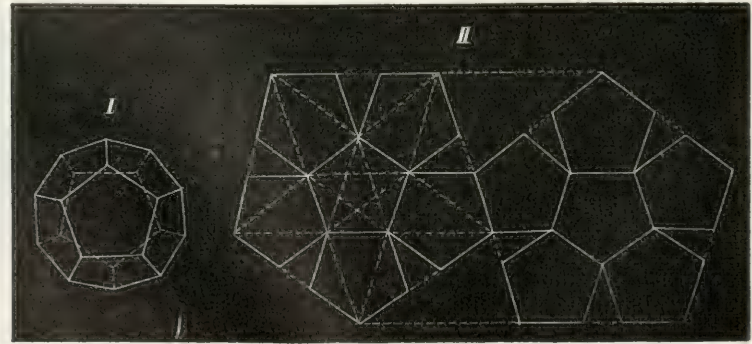


Fig. 137.

Fig. 137, I, und hat 12 Flächen, 20 Ecken und 30 Kanten. Fig. 137, II, ist das Netz eines Dodekaeders.

2. Unregelmäßige Körper.

Von den unregelmäßigen Körpern kommen hier insbesondere zwei Arten in Betracht: Das Prisma und die Pyramide.

a) Ein Prisma, Fig. 138, 139, kann man sich dadurch entstanden denken, daß ein Vieleck parallel zu sich selbst längs einer geraden Linie fortschreitet.

Bei jedem Prisma sind somit die beiden Grundflächen parallel und kongruent. Die Seitenflächen eines Prisma sind Parallelogramme, weil sie von je zwei parallelen Linien begrenzt sind. Die Schnittlinien je zweier Seitenflächen werden Seitenkanten, die Schnittlinieneiner Seitenfläche mit einer Grundfläche aber Grundkanten genannt. Die Seitenkanten sind als Seiten der Parallelogramme (Seitenflächen) parallel, sonach auch als Parallele zwischen Parallelen untereinander gleich. Eine Senkrechte, welche beide Grundflächen eines Prisma verbindet, ist die Höhe desselben.

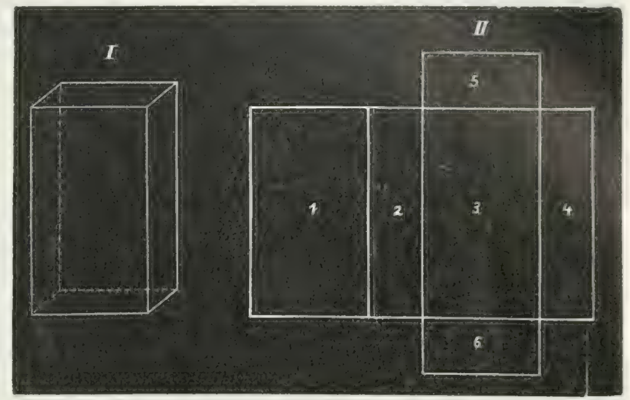


Fig. 138.

Ein Prisma ist sonach ein Körper, welcher von zwei parallelen kongruenten Vielecken als Grundflächen und so vielen Parallelogrammen als Seitenflächen begrenzt wird, als eine Grundfläche Seiten hat.

Stehen die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht, so nennt man das Prisma ein gerades, und wenn dies nicht der Fall ist, ein schiefes. Nach der Anzahl der Seitenkanten oder der Seitenflächen wird das Prisma drei-, vier-, fünf- oder mehrseitig genannt.

Ein Prisma, dessen sämtliche Begrenzungsflächen Parallelogramme sind, heißt Parallelepiped; sind überdies noch die Grundflächen Rechtecke oder Quadrate, so ist es ein rechtwinkliges Parallelepiped, Fig. 138. Im letzteren Falle, wenn die Grund- und Seitenflächen Quadrate sind, entsteht ein Würfel; bei diesem sind die Seiten- mit den Grundkanten gleich lang.

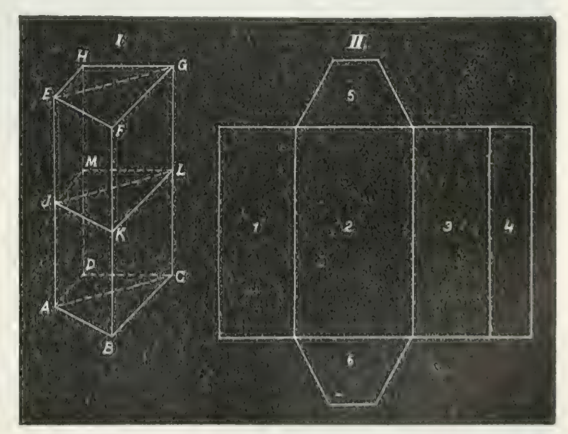


Fig. 139.

Das Netz eines geraden Prisma besteht aus den aneinander gereihten Rechtecken, welche die Seitenfläche des Prisma bilden und aus den beiden Grundflächen (Fig. 138, II).

Wird ein Prisma durch eine Ebene geschnitten, welche parallel geht zur Grundfläche, so entsteht eine zur letzteren kongruente Schnittfläche

(*JKLM*, Fig. 139, I). Schneidet man ein Prisma durch eine Ebene, welche durch zwei nicht aufeinander folgende Seitenkanten geht, so ist die Schnittfläche ein Parallelogramm; ein solcher Schnitt heißt Diagonalschnitt (*ACGE*, Fig. 139, I).

b) Die Pyramide. Wird der Raum einer körperlichen Ecke, welcher an einer Seite offen ist, an dieser durch eine Ebene begrenzt, so entsteht eine Pyramide. Die Ebene, welche eine Körperecke gegen die offene Seite hin abgrenzt, Fig. 140, *ABCD*, heißt die Grundfläche der Pyramide. Die anderen Begrenzungsflächen sind Dreiecke und heißen Seitenflächen. Jener Punkt, in welchem alle Seitenflächen zusammenstoßen, wird der Scheitel oder die Spitze der Pyramide genannt. Die Begrenzungslinien der Grundfläche sind zugleich die Grundkanten, die in dem Scheitel zusammenlaufenden Kanten die Seitenkanten der Pyramide. Je nach der Anzahl der Seitenkanten ist die Pyramide drei-, vier-, fünf- oder mehrseitig.

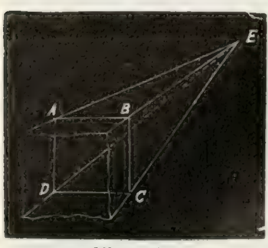


Fig. 140.

Fällt man aus dem Scheitel einer Pyramide eine Senkrechte auf die Grundfläche, so erhält man die Höhe der Pyramide.

Trifft die Höhe einer Pyramide den Mittelpunkt der Grundfläche, so haben wir eine gerade oder senkrechte, im anderen Falle eine schiefe Pyramide vor uns. Bei einer geraden Pyramide von regelmäßiger Grundfläche sind alle Seitenkanten einander gleich und die Seitenflächen sind gleichschenklige kongruente Dreiecke.

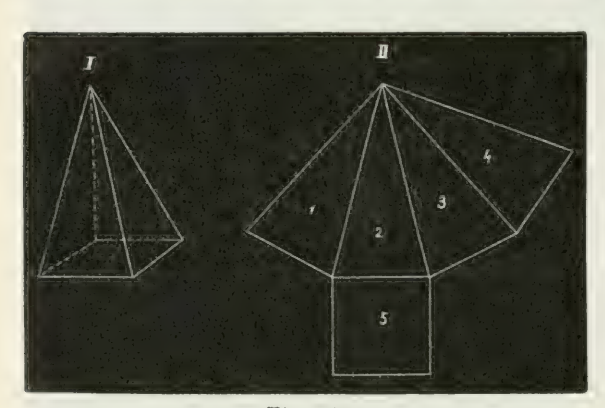


Fig. 141.

Das Netz einer Pyramide, z. B. Fig. 141, II, besteht aus den Seitenflächen der Pyramide, d. i. aus Dreiecken, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und aus der Grundfläche, welche mit der Seite eines Dreieckes zusammenhängt.

Wird eine Pyramide, Fig. 142, *ABCDS*, durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so zerfällt sie in zwei Teile. Der obere Teil (*GFEHS*) ist wieder eine Pyramide, sie heißt Ergänzungspyramide. Der untere Teil (*ABCDGFEH*) wird Pyramidenstutz oder Pyramidenstumpf genannt; derselbe hat zwei Grundflächen, von welchen die obere der unteren ähnlich ist; die Seitenflächen sind Trapeze.

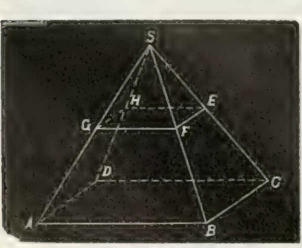


Fig. 142.

§ 34. Die runden Körper.

Die für uns wichtigsten runden Körper sind: Der Zylinder oder die Walze, der Kegel, die Kugel und einige andere forstlich wichtige Körper.

1. Einen Zylinder oder eine Walze, Fig. 143, I, III, kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich eine Kreisfläche parallel zu sich selbst derart fortbewegt, daß der Mittelpunkt immer in derselben Geraden bleibt. Der Zylinder ist somit von zwei parallelen, kongruenten Kreisflächen als Grundflächen nach oben und unten abgeschlossen, während die Seitenfläche eine gekrümmte Fläche ist und die Mantelfläche des Zylinders genannt wird. Eine Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Grundflächen verbindet, heißt die Achse, und der senkrechte Abstand beider Kreisflächen die Höhe des Zylinders. Steht die Achse eines Zylinders senkrecht auf der Grundfläche, so ist der Zylinder ein gerader, in anderen Fällen ein schiefer. Bei einem geraden Zylinder stellt die Achse auch die Höhe desselben vor. Einen geraden Zylinder kann man sich auch durch Umdrehung eines Rechteckes um eine seiner Seiten entstanden denken.

Ein Zylinder ist somit ein runder Körper, welcher von zwei parallelen und kongruenten Kreisflächen als Grundflächen

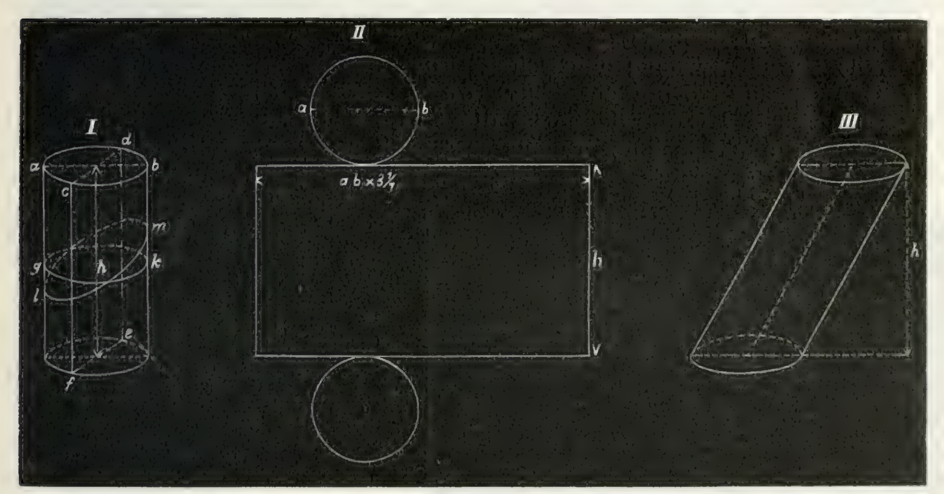


Fig. 143.

und von einer gekrümmten Fläche als Mantelfläche begrenzt wird.

Denkt man sich bei einem geraden Prisma ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten, also einen Kreis, als Grundfläche, so übergehen die Seitenflächen des Prisma in eine krumme Fläche und das Prisma verwandelt sich in einen Zylinder. Ein Zylinder kann daher auch als ein Prisma angesehen werden, dessen Grundflächen Kreise sind.

In Fig. 143 stellt I einen geraden und III einen schiefen Zylinder dar. Das Netz des ersteren, Fig. 143, II, erhält man, indem man mit dem Radius der Grundfläche einen Kreis beschreibt und an diesen ein Rechteck anschließt, dessen Breite dem $3\frac{1}{7}$ $(=\pi)$fachen Durchmesser und dessen Höhe der Höhe des Zylinders entspricht. Schließlich reiht man an dieses Rechteck noch die zweite Grundfläche des Zylinders an.

Wird ein gerader Zylinder durch eine Ebene geschnitten, welche entweder durch die Achse des Zylinders oder parallel zu dieser geht, so ist die Schnittfläche ein Rechteck, Fig. 143, I, *cdef*; geht die schneidende Ebene parallel zur Grundfläche, so ist die Schnittfigur ein der Grundfläche kongruenter Kreis, Fig. 143, I, *gk*; ist endlich die

schneidende Ebene gegen die Achse des Zylinders geneigt, so entsteht eine Ellipse als Durchschnittsfigur, Fig. 143, I, *lm*.

2. Der Kegel. Denkt man sich eine Pyramide, welche zur Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck hat, und vervielfacht man fortwährend die Seitenanzahl dieses Vieleckes, so geht dasselbe schließlich in eine Kreisfläche über, und aus allen Seitenflächen der Pyramide wird eine einzige, in einen Punkt auslaufende gekrümmte Fläche. Der so entstandene Körper ist ein Kegel (Fig. 144). Die Grundfläche desselben ist ein Kreis, die gekrümmte Seitenfläche ist die Mantelfläche, und der Punkt, in welchen dieselbe ausläuft, der Scheitel des Kegels. Verbindet man den Scheitel eines Kegels mit einem Punkte des Umfanges der Grundfläche, so liegt diese Gerade in der Mantelfläche des Kegels und heißt die Seite oder Seitenhöhe desselben.

Der Kegel ist somit ein runder Körper, welcher von einer Kreisfläche als Grundfläche und von einer in einen Punkt auslaufenden gekrümmten Fläche als Mantelfläche begrenzt wird.

Man kann einen Kegel daher auch als eine Pyramide ansehen, deren Grundfläche ein Kreis ist.

Die Gerade, welche den Scheitel des Kegels mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet, heißt Achse. Der senkrechte Abstand des Scheitels von der Grundfläche ist die Höhe des Kegels.

Steht die Achse eines Kegels senkrecht auf der Grundfläche, so ist der Kegel ein gerader, sonst ein schiefer. Beim geraden Kegel fällt die Achse mit der Höhe des Kegels zusammen, beim schiefen Kegel ist die Höhe kürzer als die Achse.

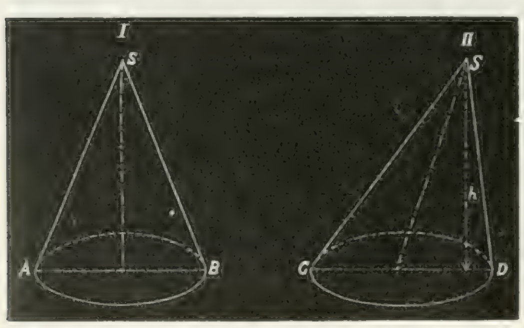


Fig. 144.

Einen geraden Kegel kann man sich auch durch Umdrehung eines rechtwinkligen Dreieckes um eine Kathete (als Achse und Höhe des Kegels) entstanden denken. In Fig. 144 stellt I einen geraden, II einen schiefen Kegel dar.

Breitet man die Mantelfläche eines geraden Kegels in eine Ebene aus, so stellt dieselbe einen Kreisausschnitt dar, dessen Radius einer Seite des Kegels und dessen Bogenlänge dem Umfange der Grundfläche gleichkommt. Fügt man diesem Kreisausschnitte einen Kreis mit dem Radius der Grundfläche des Kegels an, so erhält man das Netz eines geraden Kegels (Fig. 146, I).

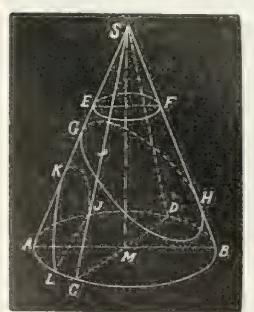


Fig. 145.

Schneidet man einen geraden Kegel durch eine Ebene, welche durch die Achse geht, so ist die Schnittfläche ein gleichschenkliges Dreieck, Fig. 145, $\triangle CDS$; der Scheitel desselben fällt mit dem Scheitel des Kegels zusammen, die beiden anderen Eckpunkte liegen im Umfange der Grundfläche. Geht die schneidende Ebene parallel zur Grundfläche des Kegels, so ist die Schnittfläche ein Kreis. Es entsteht dann ein neuer Kegel, der Ergänzungskegel EFS, und ein abgestutzter Kegel oder Kegelstutz $ABFE$. Ist die schneidende Ebene gegen die Achse des geraden Kegels geneigt, so sind mehrere

spezielle Fälle möglich. Trifft sie alle Seiten des Kegels, so ist die Durchschnittsfigur mit der Mantelfläche eine Ellipse, Fig. 145, *GH*; geht aber die schneidende Ebene parallel zu einer Seite des Kegels, so entsteht als Schnittfigur eine krumme offene Linie, eine Parabel, Fig. 145, *JKL*.

In Fig. 146 stellt I das Netz eines geraden Kegels und II das Netz eines geraden Kegelstutzes dar.

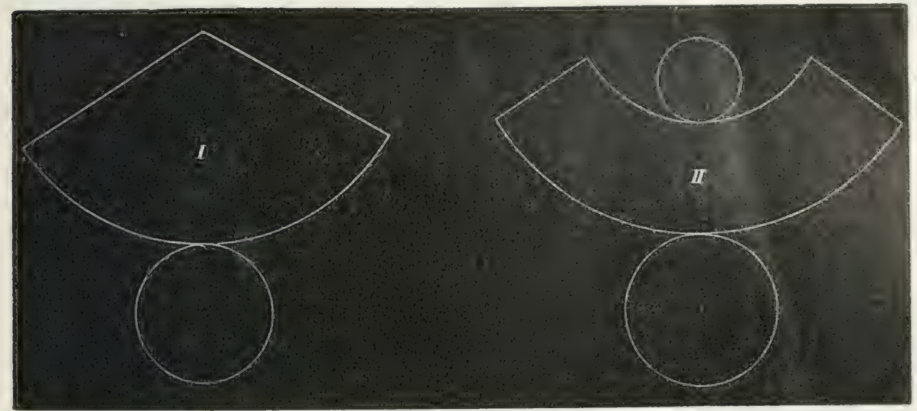


Fig. 146.

3. Die Kugel. Denkt man sich einen Halbkreis um den zugehörigen Durchmesser als feste Achse einmal herumgedreht, so entsteht ein begrenzter Raum, welcher eine Kugel genannt wird. Der Durchmesser dieses Halbkreises ist die Achse, die beiden Endpunkte des Durchmessers sind die Pole, die gekrümmte Fläche ist die Oberfläche der Kugel (Fig. 147).

Eine Kugel ist somit ein runder Körper, welcher von einer einzigen gekrümmten Fläche so begrenzt wird, daß alle Punkte der Oberfläche von einem innerhalb gelegenen Punkte gleichweit abstehen.

Dieser im Inneren der Kugel gelegene Punkt heißt Mittelpunkt. Eine Gerade, welche einen Punkt der Oberfläche mit dem Mittelpunkte der Kugel verbindet, heißt Halbmesser, und eine Gerade, welche zwei Punkte der Oberfläche verbindet, eine Sehne der Kugel. Eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, heißt Durchmesser.

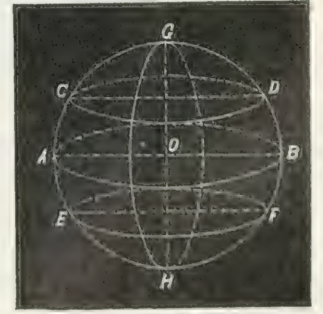


Fig. 147.

Wird eine Kugel durch eine Ebene geschnitten, so ist die Schnittfigur stets ein Kreis. Dieser Kreis wird um so größer, je näher die schneidende Ebene dem Mittelpunkte kommt. Geht die Schnittebene endlich durch den Mittelpunkt hindurch, so entsteht ein größter Kreis als Schnittfigur. Jener größte Kreis, dessen Ebene senkrecht steht zur Achse, heißt der Äquator; Fig. 147, *AB*. Alle zu diesem parallelen Kreise, wie *CD* oder *EF*, Fig. 147, werden Parallelkreise genannt.

Schnittflächen, welche durch die Achse der Kugel gehen, heißen Meridiane *(GH)*. Die zwischen zwei Meridianen gelegene Fläche nennt man ein Kugelzweieck.

Jener Teil der Kugeloberfläche, welcher zwischen zwei Parallelkreisen liegt, heißt Zone, der durch zwei Parallelkreise begrenzte Raum eine Kugelschichte.

Jede schneidende Ebene teilt die Kugel in zwei Kugelabschnitte; diese beiden Kugelabschnitte sind gleich, wenn die Schnittebene durch den Mittelpunkt geht, und heißen dann Halbkugeln. Die gekrümmte Oberfläche eines Kugelabschnittes wird Kugelmütze, auch Calotte genannt.

Die Kugeloberfläche ist durch eine doppelt gekrümmte Fläche gebildet, welche sich nicht in eine Ebene ausbreiten läßt; es gibt daher auch kein vollkommen genaues Netz einer Kugel. Ein annäherndes Netz einer Kugel erhält man durch folgendes Verfahren:

Man teilt eine Strecke, Fig. 148, ab, welche $3\frac{1}{7}$mal so lang ist als der Durchmesser der Kugel, in 12 gleiche Teile und trägt noch je 9 solcher Teile auf den Verlängerungen dieser Strecke nach links und rechts auf.

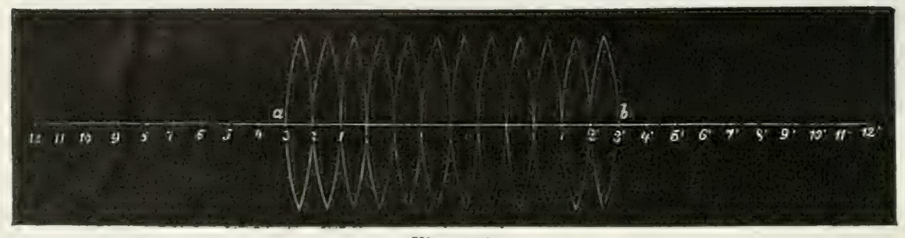


Fig. 148.

Hierauf beschreibt man mit dem Halbmesser von 10 solchen Teilen aus 1, 2, 3 . . . . und 1′, 2′, 3′ . . . . Kreisbögen. Hiedurch erhält man 12 Zweiecke, welche gehörig ausgeschnitten und entsprechend zusammengebogen annähernd eine Kugeloberfläche geben.

4. Einige andere forstlich wichtige runde Körper.

a) Der ausgebauchte Kegel oder das Paraboloid. Beschreibt ein Parabelast*) um seine Achse eine ganze Umdrehung, so entsteht ein parabolischer Raum. Wird dieser hierauf durch eine Ebene, welche senkrecht steht auf der Achse des Parabelastes, geschnitten, so begrenzt diese den parabolischen Raum. und der so gebildete Körper heißt ein ausgebauchter Kegel oder ein Paraboloid; Fig. 149.

Die doppelt gekrümmte Fläche, welche durch die Umdrehung des Parabelastes entstanden ist, bildet die Oberfläche des Paraboloides; die ebene Fläche, welche durch die zur Parabelachse senkrechte Schnittebene gebildet wird, ist die Grundfläche des Paraboloides; dieselbe ist ein Kreis. Die Achse des Paraboloides steht senkrecht auf der Grundfläche und ist somit auch die Höhe des Paraboloides.

Aus der Entstehung eines Paraboloides folgt, daß jede Ebene, welche das Paraboloid parallel zur Grundfläche schneidet, als Durchschnittsfigur einen Kreis geben muß. Das Paraboloid zerfällt durch eine solche Schnittebene in 2 Teile, nämlich in einen abgestutzten, ausgebauchten Kegel oder einen Paraboloidstutz, Fig. 149, $ABED$, und in ein Ergänzungsparaboloid, Fig. 149, DEC.

*) Vgl. Seite 135

b) Der eingebauchte Kegel oder das Neiloid. Dieser Körper ist entstanden durch Umdrehung eines Astes der Neilschen Parabel*) um die eigene Achse und durch den Schnitt mit einer zu der Parabelachse senkrecht verlaufenden Ebene; Fig. 150.

Die Oberfläche des Neiloides besteht somit aus einer nach einwärts gekrümmten Fläche, welche durch die Umdrehung eines Astes der Neilschen Parabel gebildet wurde. Die Grundfläche ist eine Kreisfläche,

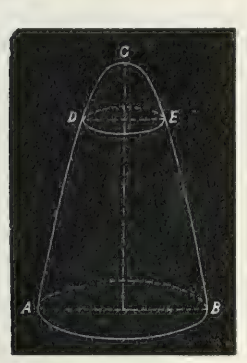


Fig. 149.

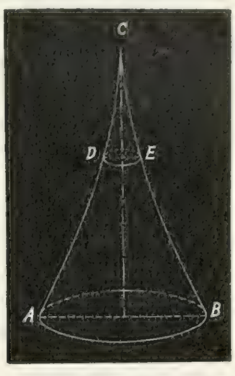


Fig. 150.

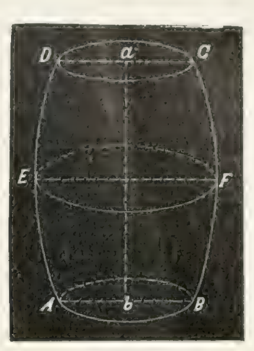


Fig. 151.

hervorgegangen aus dem Schnitte mit einer zur Achse senkrechten Ebene. Die Achse des Neiloides fällt mit der Höhe zusammen.

Auch bei diesem Körper liefert jede Durchschnittsebene, welche zur Grundfläche des Neiloides parallel geht, einen Kreis. Das Neiloid zerfällt dadurch ebenfalls in zwei Teile, in den Neiloidstutz $ABED$, Fig. 150, und in das Ergänzungsneiloid DEC.

c) Das Faß. Ein Faß ist ein runder Körper, welcher sich von einem Zylinder dadurch unterscheidet, daß sein Durchmesser gegen die Mitte hin zunimmt.

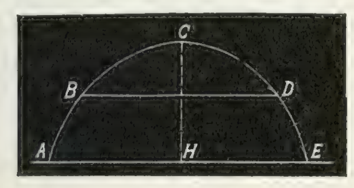


Fig. 152.

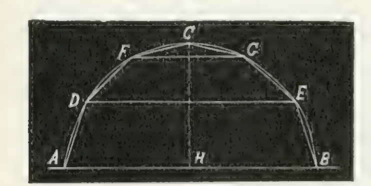


Fig. 153.

In Fig. 151 stellt $ABFCDE$ ein Faß dar. Die Kreisfläche AB heißt die Grund- oder Bodenfläche. Die Strecke ab, welche auf der Bodenfläche senkrecht steht und den Abstand der beiden Grundflächen angibt, ist die Höhe des Fasses; die Strecke EF wird die Spundtiefe oder der Spunddurchmesser genannt.

d) Der Kohlenmeiler. Unter einem Kohlenmeiler, oder kurzweg Meiler, versteht man einen zum Zwecke der Verkohlung nach gewissen Regeln aufgebauten Holzstoß, welcher mit einer dichten, feuerbeständigen Decke umgeben ist. Man unterscheidet stehende und liegende Meiler.

Der stehende Meiler, Fig. 152 und 153, besteht aus zwei Teilen, und zwar aus dem Unterteile, welcher aus einem oder zwei Stößen gebildet ist, und aus dem Oberteile oder der Haube.

*) Vgl. Seite 136.

Ist der Unterteil eines stehenden Meilers nur aus einem Stoße aufgebaut, so ist die Böschungslinie eine nichtgebrochene, gleichmäßig verlaufende Linie, wie sie in Fig. 152 durch die krumme Linie $ABCDE$ versinnlicht ist. Der ganze Meiler hat nahezu die Körperform eines Paraboloides, oder genauer genommen eines Körpers, dessen Unterteil $AEDB$ ein abgestutzter gemeiner Kegel und dessen Oberteil (Haube) BDC ein Paraboloid ist.

Ein doppelstößiger stehender Meiler, d. i. ein solcher, dessen Unterteil aus zwei aufeinander gelegten Stößen besteht, hat eine gebrochene Böschungslinie, wie sie in Fig. 153 durch die Linie $ADFCGEB$ dargestellt erscheint. Die Körperform dieses Meilers nähert sich auch jener eines Paraboloides, besteht aber genauer genommen aus drei Körpern, nämlich aus den beiden abgestutzten gemeinen Kegeln $ABED$, $DEGF$ und aus dem Paraboloid FGC.

Bei beiden Arten der stehenden Meiler ist die Grundfläche immer ein Kreis. Der vertikale Abstand des höchsten Punktes (C) der Haube von der Grundfläche ist die Höhe des Meilers.

Der liegende Meiler ist nichts anderes als ein liegendes Prisma mit einer trapezförmigen Basisfläche. Bei den Aufgaben S. 193 und in der Forstbenutzung wird auf diesen Gegenstand näher hingewiesen.

III. Kapitel.

Die Oberfläche und der Rauminhalt der Körper.

§ 35. Begriffsfeststellungen. Die Maßeinheiten für Oberfläche und Rauminhalt.

Bei der Berechnung der Körper handelt es sich um die Ermittlung der Oberfläche und des Rauminhaltes derselben.

Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die Flächensumme aller seiner Begrenzungsebenen. Die Oberfläche selbst wird ebenso wie jede andere Fläche durch das Flächenmaß gemessen; es gilt somit für diese als Maßeinheit das Quadratmeter (m^2).*)

Unter dem Raum- oder Kubikinhalte eines Körpers versteht man die Größe des Raumes, welcher durch die Oberfläche desselben eingeschlossen wird.

Um die Größe dieses Raumes, also die Größe des Körpers selbst zu bestimmen, muß man denselben mit einem anderen Körper von bestimmter und bekannter Größe vergleichen. Hiezu eignet sich am besten ein Würfel, dessen Kante gleich ist der Einheit des Längenmaßes, nämlich 1 m. Man nennt einen solchen Würfel 1 Kubikmeter (m^3); dasselbe bildet die Einheit des Kubik- oder Körpermaßes.*)

Untersucht man nun, wie oft die Einheit des Kubikmaßes in dem zu messenden Körper enthalten ist, so erhält man die Maßzahl für den Rauminhalt des Körpers. Nachdem dies, wie leicht einzusehen ist, nicht nur eine sehr mühsame, sondern auch eine in manchen Fällen unausführbare Arbeit wäre, so wird man, ähnlich wie bei der Flächenberechnung, die Maßzahlen jener Linien und Flächen ermitteln, welche für die

---

*) Vgl. Arithmetik, Seite 18.

Größe des Körpers maßgebend sind, um aus diesen dann nach gewissen Regeln den Kubikinhalt des Körpers zu berechnen.

Zwei Körper, welche denselben Rauminhalt haben, werden inhaltsgleich genannt.

Denkt man sich einen Körper durch die Parallelbewegung einer ebenen Fläche entstanden, so hängt die Größe seines Rauminhaltes ab: 1. von der Größe der sich bewegenden Fläche, d. i. von der Grundfläche des Körpers, 2. von der Größe dieser Fläche während des Verlaufes der ganzen Bewegung und 3. von der Entfernung zwischen der ursprünglichen und der letzten Lage der sich bewegenden Fläche, d. i. von der Höhe des Körpers.

Bleibt die Größe der sich bewegenden Fläche, d. i. die Grundfläche während der Parallelbewegung unverändert, wie z. B. bei dem Prisma und dem Zylinder, oder nimmt sie stetig ab, bis sie in einen Punkt übergeht, wie z. B. bei der Pyramide oder dem Kegel, so hängt der Kubikinhalt des Körpers nur von der Grundfläche und von der Höhe allein ab. Hieraus folgt:

Zwei Prismen, zwei Zylinder, zwei Pyramiden oder zwei Kegel sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Der Kubikinhalt einer Kugel hängt nur von ihrem Halbmesser ab. Zwei Kugeln sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben.

§ 36. Das Prisma.*)

1. Der Würfel.

a) Die Oberfläche eines Würfels setzt sich zusammen aus sechs kongruenten Quadraten. Berechnet man somit die Fläche eines Quadrates, so entspricht das sechsfache Produkt hieraus der Oberfläche des Würfels.

Beispiel: Die Kante eines Würfels mißt $3\,dm$; es beträgt somit die Fläche eines Quadrates von $3\,dm$ Seitenlänge $(3\,dm)^2 = 9\,dm^2$, und das Sechsfache derselben $6 \times 9\,dm^2 = 54\,dm^2$. Die Oberfläche eines Würfels von $3\,dm$ Kantenlänge beträgt somit $54\,dm^2$.

Bezeichnet O die Oberfläche und s eine Kante des Würfels, so ist

$$\boldsymbol{O = 6 . s^2}; \text{ daraus } s = \sqrt{\frac{O}{6}}.$$

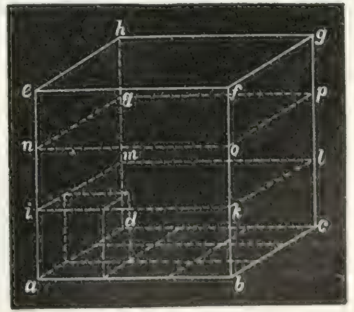


Fig. 154.

b) Teilt man in einem Würfel, Fig. 154, dessen Kantenlänge $3\,cm$ beträgt, jene Kanten, welche die Eckpunkte der beiden Grundflächenquadrate $abcd$ und $efgh$ miteinander verbinden, in je drei gleiche (also $1\,cm$ lange) Teile und legt man hierauf durch die entsprechenden Teilungspunkte Schnittebenen, welche zur Grundfläche $abcd$ parallel gehen, so zerfällt der ganze Würfel in drei Körper, nämlich $abcdiklm + iklmnopq + nopqefgh$. Bei diesen Körpern sind sowohl die Grundflächen als auch die Höhen untereinander gleich. Eine Grundfläche beträgt $3 \times 3 = 9\,cm^2$, und eine Höhe mißt $1\,cm$. Es läßt sich also beispielsweise die erste Grundfläche $abcd$ durch neun aneinandergelegte Kubikzentimeter vollständig bedecken, mithin auch der ganze

*) Rechenaufgaben über sämtliche Körperberechnungen siehe Seite 189 u. f.

Raum des Körpers $abcdiklm$, da derselbe auch 1 cm Höhe hat, ausfüllen. Dieser Raum mißt somit 9 cm^3. Dasselbe läßt sich auch für den zweiten und dritten Teil des Würfels zeigen. Der Kubikinhalt dieses Würfels besteht sonach aus $9\,cm^3 + 9\,cm^3 + 9\,cm^3 = 3 \,.\, 9\,cm^3 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3\,cm^3 = 27\,cm^3$.

Auf gleiche Weise würde man finden, daß ein Würfel, dessen Kante 4 m lang ist, $4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 64\,m^3$ mißt usf. Daraus folgt:

Der Kubikinhalt eines Würfels wird berechnet, indem man die Maßzahl seiner Kante dreimal mit sich selbst multipliziert, d. i. zur dritten Potenz erhebt.*)

Bezeichnet C ein- für allemal den Kubikinhalt, so erhält man allgemein für den Kubikinhalt des Würfels

$$C = s^3, \text{ und daraus } s = \sqrt[3]{C}.$$

2. Das rechtwinklige Parallelepiped.

a) Die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds besteht aus zwei kongruenten Rechtecken als Grundflächen und aus vier Rechtecken als Seitenflächen. Die Summe der Flächeninhalte der Seitenflächen eines Prisma gibt die Seitenoberfläche oder die Mantelfläche; addiert man hiezu noch die doppelte Grundfläche, so erhält man die Oberfläche des Prisma.

Bei jedem geraden Prisma stellt sich die Seitenoberfläche, wie aus dem Netz desselben zu ersehen ist, als Rechteck dar, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche und dessen Höhe der Höhe des Prisma entspricht.

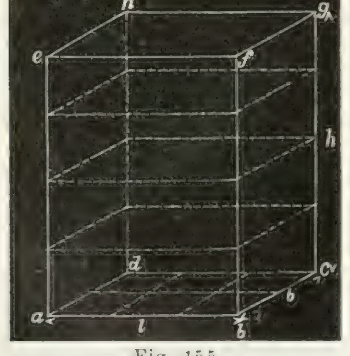


Fig. 155.

Wäre beispielsweise die Breite eines Rechteckes, bc, Fig. 155, 2 dm, die Länge $ab = 3\,dm$ und die Höhe $cg = 4\,dm$, so berechnet sich die Oberfläche desselben wie folgt:

Grundfläche $= 2 \times 3 = 6\,dm^2$, doppelt $= 12\,dm^2$,
Seitenoberfläche $= (3 + 3 + 2 + 2) \,.\, 4 = 40\,dm^2$,
Oberfläche $= 52\,dm^2$.

b) Die Grundfläche des Prisma in Fig. 155 ist $2 \times 3 = 6\,dm^2$ groß; auf derselben können sonach 6 dm^3 nebeneinander aufgelegt werden. Diese Schicht erreicht eine Höhe von 1 dm; das vorliegende Prisma ist aber 4 dm hoch, folglich werden vier solche Schichten den Raum desselben ausfüllen. Der Kubikinhalt dieses Prisma ist somit $2 \times 3 \times 4 = 24\,dm^3$. Daraus folgt:

Der Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche mit der Höhe, oder dem Produkte aus den Maßzahlen der Länge, Breite und Höhe.

Unter Beibehaltung der oben eingeführten allgemeinen Bezeichnungen ist:

$$C = g \,.\, h = l \,.\, b \,.\, h,$$

und hieraus ist $g = \frac{C}{h}$; $h = \frac{C}{g}$; $l = \frac{C}{b \,.\, h}$; $b = \frac{C}{l \,.\, h}$; $h = \frac{C}{l \,.\, b}$.

*) Aus diesem Grunde wird in der Arithmetik die dritte Potenz auch der Kubus genannt.

3. Das Prisma überhaupt.

a) Die Oberfläche eines geraden oder schiefen Prisma besteht aus den beiden Grundflächen und aus den Seitenflächen. Da die Grundflächen kongruente Figuren sind, wird man nur eine derselben berechnen und die erhaltene Maßzahl doppelt nehmen. Die Seitenflächen können entweder gleich oder ungleich sein. Im ersteren Falle wird man ebenfalls nur eine derselben berechnen und das erhaltene Resultat mit der Anzahl der Seitenflächen multiplizieren; im letzteren Falle dagegen muß man jede Seitenfläche für sich berechnen. Die Summe aus den erhaltenen Maßzahlen für die beiden Grundflächen und für alle Seitenflächen gibt die Oberfläche des Prisma.

Beispiel: Es ist die Oberfläche eines 25 *dm* hohen geraden Prisma zu berechnen, dessen Grundfläche, Fig. 156, ein gleichseitiges Dreieck von 3 *dm* Seitenlänge ist.

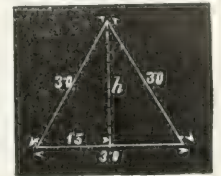


Fig. 156.

$h = \sqrt{3^2 - 1{\cdot}5^2} = \sqrt{6{\cdot}75} = 2{\cdot}598\ dm,$

2 Grundflächen $= 3 \times 2{\cdot}598 =$ . . . . $7{\cdot}794\ dm^2$,
1 Seitenfläche $= 25 \times 3 = 75\ dm^2$,
3 Seitenflächen $= 75 \times 3 =$ . . . . $225{\cdot}000\ dm^2$,

Oberfläche $= 232{\cdot}794\ dm^2$.

b) Wird ein rechtwinkliges Parallelepiped, Fig. 157, durch die Ebene *a c g e*, welche durch die Diagonalen der beiden Grundflächen hindurchgeht, geschnitten, so entstehen zwei gleichgroße, gerade dreiseitige Prismen. Die Grundflächen dieser dreiseitigen Prismen sind aber als kongruente Dreiecke gleich der halben Grundfläche des gegebenen Parallelepipedes; es wird somit auch der Kubikinhalt eines der dreiseitigen Prismen nur halb so groß sein als jener des Parallelepipedes. Letzteren berechnet man als das Produkt aus Grundfläche und Höhe. Nimmt man nun das Produkt aus der halben Grundfläche und der Höhe, so muß dieses dem Kubikinhalte des dreiseitigen Prisma entsprechen. Die halbe Grundfläche des gegebenen Parallelepipedes ist aber das Dreieck *a b c*, nämlich die Grundfläche des dreiseitigen Prisma. Es folgt daher:

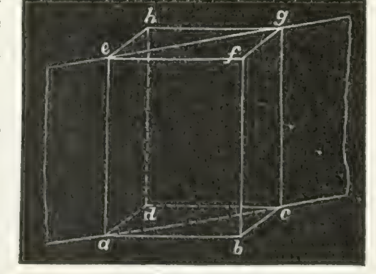


Fig. 155.

Der Kubikinhalt eines geraden dreiseitigen Prisma wird berechnet, indem man die Maßzahlen der Grundfläche und Höhe multipliziert, oder, indem man das Produkt bildet aus Grundfläche und Höhe.

Der Kubikinhalt für das obige dreiseitige Prisma, dessen Grundfläche $g = 3{\cdot}897\ dm^2$ und dessen Höhe $h = 2{\cdot}5\ m$ beträgt, ist daher $C = g \,.\, h = 3{\cdot}897 \times 25 = 97{\cdot}425\ dm^3$.

Wäre der Kubikinhalt eines vier-, fünf-, sechs- oder mehrseitigen geraden Prisma zu berechnen, so zerlegt man dasselbe durch entsprechende Diagonalschnitte in 2, 3, 4 usf. dreiseitige Prismen und berechnet diese auf die bereits bekannte Weise. Durch Addition der gefundenen Maßzahlen erhält man schließlich den Kubikinhalt des ganzen mehrseitigen Prisma. Das gleiche Resultat erhält man aber auch, wenn man vorerst die ganze Grundfläche des mehrseitigen geraden Prisma ermittelt und sodann diese Maßzahl mit der Höhe des Prisma multipliziert. Es folgt somit allgemein:

Der Kubikinhalt eines geraden Prisma ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

c) Wird ein schiefes Prisma *a b c d e f g h*, Fig. 158, durch eine Ebene, welche zur Grundfläche senkrecht steht und durch eine Grundkante *b c* hindurchgeht, geschnitten, so wird von dem schiefen Prisma ein Keil *e f g h b c* abgetrennt. Fügt man nun diesen Keil an die entgegengesetzte Seite des von dem schiefen Prisma noch übriggebliebenen Teiles so an, daß die beiden Seitenkanten *a e* und *b f*, dann *d h* und *c g*, sowie die Grundkanten *a d* und *b c* zusammenfallen, so entsteht ein gerades Prisma *a b c d i e h k*, welches mit dem gegebenen schiefen *a b c d e f g h* nicht nur gleiche Grundfläche, sondern auch gleiche Höhe hat. Die beiden Prismen stimmen somit in den zur Berechnung des Kubikinhaltes maßgebenden Bestandteilen, nämlich in der Grundfläche und der Höhe, vollkommen überein; es ist somit der Kubikinhalt eines schiefen Prisma gleich dem Kubikinhalte eines geraden Prisma von derselben Grundfläche und Höhe. Daraus folgt der allgemeine Satz:

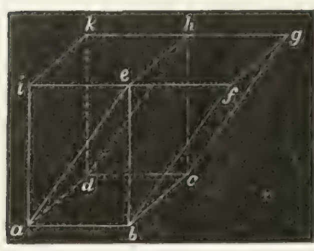


Fig. 158.

Der Kubikinhalt eines jeden Prisma ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe, also ganz allgemein

$$C = g \cdot h.$$

§ 37. Die Pyramide und der Pyramidenstutz.

1. Die Pyramide.

a) Die Oberfläche einer Pyramide besteht aus der Grundfläche und aus den Seitenflächen. Die Seitenflächen haben immer die Figur eines Dreieckes; der Flächeninhalt einer einzelnen Seitenfläche entspricht dem halben Produkte aus Grundkante und Seitenhöhe. Will man die Oberfläche einer Pyramide berechnen, so ermittelt man die Summe aus den Flächenmaßzahlen aller Seitenflächen und addiert zu dieser die Maßzahl der Grundfläche. Bei einer geraden Pyramide sind die Seitenflächen einander gleich; man braucht somit nur die Flächenmaßzahl einer einzigen Seitenfläche zu bestimmen, diese mit der Anzahl derselben zu multiplizieren und die Größe der Grundfläche hinzuzuzählen, um die ganze Oberfläche der Pyramide zu erhalten.

Beispiel: Wie groß ist die Oberfläche einer Pyramide, deren Basis ein Rechteck mit 3 *dm* Breite und 4 *dm* Länge ist und deren Seitenhöhe 8·11 *dm*, beziehentlich 8 *dm* beträgt?

$$1 \text{ Seitenfläche} = \frac{3 \times 8{\cdot}11}{2} = 12{\cdot}165\, dm^2; \quad 2 \text{ Seitenflächen} = 24{\cdot}33\, dm^2,$$

$$1 \text{ Seitenfläche} = \frac{4 \times 8}{2} = 16\, dm^2; \quad 2 \text{ Seitenflächen} = \ldots\ldots 32\, dm^2,$$

$$\text{Grundfläche} = 3 \times 4 = \ldots\ldots 12\, dm^2,$$

$$\text{Oberfläche} = \ldots\ldots 68{\cdot}33\, dm^2.$$

b) Um die Regel für die Berechnung des Kubikinhaltes einer Pyramide zu finden, gehen wir von einem dreiseitigen Prisma aus, welches mit einer dreiseitigen Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Schneidet man das dreiseitige Prisma $ABCDEF$, Fig. 159, durch die Ebene ABF, welche durch die Grundkante AB und die Ecke F hindurchgeht, so entsteht eine dreiseitige Pyramide $ABCF$ und eine vierseitige Pyramide $ABEDF$. Führt man sodann durch die Diagonale DB der Grundfläche und durch die Ecke F der letzteren Pyramide eine Schnittebene DBF, so zerfällt die vierseitige Pyramide in zwei dreiseitige Pyramiden. Das ganze Prisma $ABCDEF$ wurde somit in die drei dreiseitigen Pyramiden $ABCF$, $DEFB$ und $DBAF$ zerlegt, von welchen sich leicht beweisen läßt, daß sie untereinander alle gleich groß sind und auch gleiche Grundflächen und Höhen besitzen.

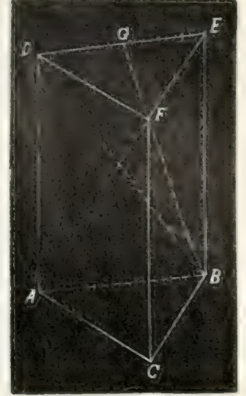


Fig. 159.

Die Grundflächen ABC und DEF, sowie die Höhen CF und BE der Pyramiden $ABCF$ und $DEFB$ sind als Grundflächen, beziehungsweise als Seitenkanten des Prisma gleich; es ist somit die Pyramide $ABCF =$ der Pyramide $DEFB$. Betrachtet man nun die beiden Pyramiden $DBEF$ und $DBAF$, so ist einleuchtend, daß sowohl deren Grundflächen DBE und DBA als Hälften des Rechteckes $ABED$, sowie auch die aus dem Scheitel F auf die Grundflächen gezogenen Höhen für beide Pyramiden gleich sein müssen, daher auch Pyramide $DBEF =$ Pyramide $DBAF$. Da nun die zweite Pyramide sowohl der ersten als auch der dritten gleich ist, muß auch die dritte gleich sein der ersten. Daraus folgt:

Jede dreiseitige Pyramide entspricht dem dritten Teile eines dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Der Kubikinhalt eines Prisma wird berechnet als Produkt aus Grundfläche und Höhe; es ist sonach der Kubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide gleich dem Produkte aus der Grundfläche und dem dritten Teile der Höhe. Allgemein $C = g \cdot \frac{h}{3}$, wenn g die Grundfläche und h die Höhe einer dreiseitigen Pyramide bedeutet.

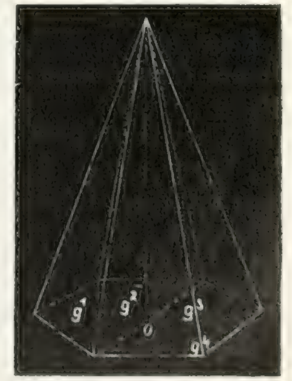


Fig. 160.

Jede mehrseitige Pyramide läßt sich in eine bestimmte Anzahl dreiseitiger Pyramiden zerlegen, welche untereinander alle gleiche Höhen haben. Es besteht beispielsweise die sechsseitige Pyramide in Fig. 160 aus vier dreiseitigen Pyramiden, welche wir der Reihe nach mit P_1, P_2, P_3 und P_4 bezeichnen wollen. Es ist somit der Kubikinhalt der ganzen sechsseitigen Pyramide $C = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$. Substituiert man in dieser Formel für den Rauminhalt jeder der dreiseitigen Pyramiden den entsprechenden Wert, so ist $C = g_1 \cdot \frac{h}{3} + g_2 \cdot \frac{h}{3} + g_3 \cdot \frac{h}{3} + g_4 \cdot \frac{h}{3}$; wird nun der gemeinsame Faktor $\frac{h}{3}$ „herausgehoben", so folgt:

$C = (g_1 + g_2 + g_3 + g_4) \cdot \frac{h}{3}$. Der Ausdruck in der Klammer stellt aber die Grundfläche g der ganzen sechsseitigen Pyramide vor; es ist somit:

$$C = g \cdot \frac{h}{3}, \text{ oder in Worten:}$$

Der Kubikinhalt einer Pyramide wird berechnet, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit dem dritten Teile der Maßzahl der Höhe multipliziert.

Beispiel: Die Grundfläche einer $3 \cdot 9\, m$ hohen Pyramide ist ein Quadrat, dessen Seite $0 \cdot 8\, m$ mißt; wie groß ist der Kubikinhalt der Pyramide?

$$C = g \cdot \frac{h}{3};\ g = s^2 = 0 \cdot 8^2 = 0 \cdot 64\, m^2;\ h = 3 \cdot 9\, m.$$

$$C = 0 \cdot 64 \times \frac{3 \cdot 9}{3} = 0 \cdot 64 \times 1 \cdot 3 = 0 \cdot 832\, m^3.$$

c) Wird eine Pyramide parallel zur Grundfläche geschnitten, so verhalten sich die Maßzahlen der Schnittflächen wie die Quadrate ihrer Abstände vom Scheitel. Bedeutet G die Grundfläche und g die Schnittfläche, H den Abstand der Grundfläche und h jenen der Schnittfläche vom Scheitel, so besteht die Proportion $G : g = H^2 : h^2$, aus welcher, wenn drei der genannten Größen bekannt sind, die vierte berechnet werden kann.

2. Der Pyramidenstutz.

a) Die Oberfläche einer abgestutzten Pyramide wird ermittelt, indem man die Seitenflächen als Trapeze berechnet und zu ihrer Summe die Summe der beiden Grundflächen addiert.

Beispiel: Die Grundflächen eines geraden Pyramidenstutzes seien Quadrate mit den Seiten von 5 und 4 *dm* Länge; die Höhe einer Seitenfläche betrage 6 *dm*. Wie groß ist die Oberfläche?

1 Seitenfläche $= \frac{5+4}{2} \times 6 = 27\, dm^2$, somit

4 Seitenflächen $= 27\, dm^2 \times 4$ . . . . $= 108\, dm^2$,
untere Grundfläche $= s^2 = 5^2$ . . . . $= 25\, dm^2$,
obere „ $= s^2 = 4^2$ . . . . $= 16\, dm^2$.
Die Oberfläche des Pyramidenstutzes . . . . $= 149\, dm^2$.

b) Der Kubikinhalt eines Pyramidenstutzes wird berechnet, indem man von dem Kubikinhalte der ganzen Pyramide jenen der Ergänzungspyramide subtrahiert.

Ist die Höhe des Pyramidenstutzes h, die untere Grundfläche G, die obere aber g, so besteht für den Kubikinhalt C eines Pyramidenstutzes nach einer im vorstehenden Sinne durchzuführenden Ableitung die allgemeine Formel:

$$C = (G + \sqrt{G \cdot g} + g) \cdot \frac{h}{3}, \text{ d. i. in Worten:}$$

Der Kubikinhalt eines Pyramidenstutzes ist gleich dem Produkte aus der Summe der Maßzahlen der beiden Grundflächen und ihrer mittleren geometrischen Proportionale mit dem dritten Teile der Höhe.

Beispiel: Bei der vorhergehenden Aufgabe *a)* soll der Kubikinhalt des Pyramidenstutzes gesucht werden, wenn $h = 5 \cdot 98\, dm$.

$$C = (G + \sqrt{G g} + g)\, \frac{h}{3} = (5^2 + \sqrt{5^2 \cdot 4^2} + 4^2) \cdot \frac{5 \cdot 98}{3} = (25 + 5 \cdot 4 + 16) \cdot$$
$$1 \cdot 993 = 121 \cdot 573\, dm^3.$$

§ 38. Die regelmäßigen Körper.

a) Ein regelmäßiger Körper ist von lauter gleichgroßen Flächen begrenzt. Die Oberfläche eines regelmäßigen Körpers wird daher berechnet, indem man die Maßzahl des Flächeninhaltes einer Begrenzungsfläche mit der Anzahl derselben multipliziert.

Beispiel: Die Kante eines Tetraeders mißt 5 *cm*; wie groß ist seine Oberfläche?

Die Oberfläche besteht aus vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken. Die Fläche eines solchen Dreieckes ist nach § 23, 1, *b*, $bb = \frac{5 \times 0{\cdot}2887 . 5 \times 3}{2} =$ $= 10{\cdot}8262\ cm^2$. Die Oberfläche des Tetraeders ist somit $10{\cdot}8262 \times 4 =$ $= 43{\cdot}305\ cm^2$.

b) In einem jeden regelmäßigen Körper gibt es einen Punkt, welcher von allen Begrenzungsflächen gleichweit absteht. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt. Denkt man sich den Mittelpunkt mit allen Ecken des Körpers verbunden und durch je zwei aufeinanderfolgende Verbindungslinien eine Ebene gelegt, so zerfällt der regelmäßige Körper in so viele gerade Pyramiden, als Begrenzungsflächen vorhanden sind. Eine jede dieser Pyramiden hat eine Begrenzungsfläche des Körpers zur Grundfläche und den Abstand des Mittelpunktes von einer Begrenzungsfläche zur Höhe. Hieraus folgt:

Der Kubikinhalt eines regelmäßigen Körpers wird berechnet, indem man seine Oberfläche mit dem dritten Teile des Abstandes des Mittelpunktes von einer Begrenzungsfläche multipliziert. Allgemein ist:

$\boldsymbol{C = O . \frac{a}{3}}$, wenn C den Kubikinhalt, O die Oberfläche und a den Abstand des Mittelpunktes von einer Begrenzungsfläche bedeutet.

Um den Abstand des Mittelpunktes von einer Begrenzungsfläche zu erhalten, multipliziert man die Maßzahl einer Kante des Körpers bei einem Tetraeder mit 0·2041, Oktaeder mit 0·4082, Ikosaeder mit 0·7558, Hexaeder mit 0.5000, Dodekaeder mit 1·1135.

Beispiel: Wie groß ist der Kubikinhalt des vorangeführten Tetraeders?

$$a = 5\ cm \times 0{\cdot}2041 = 1{\cdot}0205\ cm;\ O = 43{\cdot}305\ cm^2.$$

$$C = O . \frac{a}{3} = 43{\cdot}305 \times \frac{1{\cdot}0205}{3} = 14{\cdot}731\ cm^3.$$

§ 39. Der Zylinder (die Walze).

a) Die Oberfläche eines Zylinders besteht aus den beiden Grundflächen (Kreise) und aus einer gekrümmten Fläche, der Mantelfläche.

Bei einem geraden Zylinder stellt sich die Mantelfläche, wenn man dieselbe in einer Ebene ausbreitet, als Rechteck dar, welches den Umfang einer Grundfläche des Zylinders zur Länge und die Höhe des Zylinders zur Breite (Höhe) hat.

Die Oberfläche eines Zylinders wird somit berechnet, indem man zur doppelten Flächenmaßzahl einer Grundfläche die Maßzahl der Mantelfläche addiert. Die Mantelfläche eines geraden Zylinders entspricht dem Produkte aus der Maßzahl des Umfanges der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe des Zylinders.

Allgemein $\boldsymbol{O = 2\,g + M}$, oder

$\boldsymbol{O} = 2\,r^2\pi + 2\,r\pi\,.\,h = \boldsymbol{2\,r\pi\,.\,(r + h)}$, wenn O die Oberfläche, g die Grundfläche, M die Mantelfläche, r den Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Zylinders vorstellt.

Beispiel: Wie groß ist die Oberfläche eines Zylinders, dessen Durchmesser $4\,dm$ und dessen Höhe $8\,dm$ beträgt? $d = 4\,dm$, somit $r = 2\,dm$.

$g = 2^2\,.\,3{\cdot}14 = 12{\cdot}56\,dm^2$; $2\,g = 2\,.\,12{\cdot}56\,dm^2 = 25{\cdot}12\,dm^2$,

$M = 2\,.\,2\,.\,3{\cdot}14\,.\,8$ . . . . $= 100{\cdot}48\,dm^2$.

$O = 2\,g + M = 25{\cdot}12 + 100{\cdot}48$ . . . . $= 125{\cdot}60\,dm^2$, oder nach der Formel: $O = 2\,r\pi\,(r + h) = 2\,.\,2\,.\,3{\cdot}14\,.\,(2 + 8) = 12{\cdot}56\,.\,10 = 125{\cdot}60\,dm^2$.

b) Nach der bereits früher entwickelten Auffassung kann man einen Kreis auch als ein Vieleck von unendlich vielen Umfangsseiten betrachten. In diesem Falle erscheint dann der Zylinder, dessen Grundflächen Kreise sind, auch als ein vielseitiges Prisma.

Es gilt somit für die Berechnung des Rauminhaltes eines Zylinders die gleiche Regel wie für das Prisma, nämlich:

Der Kubikinhalt eines Zylinders ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe.

Allgemein: $\boldsymbol{C = g\,.\,h = r^2\pi\,.\,h}$.

Die vorhergehende Aufgabe stellt sich bei Berechnung des Kubikinhaltes wie folgt: $r = 2\,dm$, $h = 8\,dm$.

$$C = g\,.\,h = 2^2\,.\,3{\cdot}14\,.\,8 = 4\,.\,3{\cdot}14\,.\,8 = 100{\cdot}48\,dm^3.$$

c) Der Kubikinhalt einer zylindrischen Röhre, d. i. eines hohlen Zylinders, dessen Innenraum ebenfalls ein Zylinder ist, wird berechnet, indem man von dem Kubikinhalte des ganzen Zylinders den Rauminhalt des Hohlzylinders in Abzug bringt.

Allgemein: $K = C - c$, oder

$K = R^2\pi\,.\,h - r^2\pi\,.\,h$*)

$\boldsymbol{K = \pi\,.\,h\,.\,(R^2 - r^2)}$.

Beispiel: Wie groß ist der Kubikinhalt einer zylindrischen Röhre (z. B. einer Brunnenröhre), wenn der äußere Durchmesser $24\,cm$, der innere Durchmesser $8\,cm$ mißt und die Länge der Röhre $4\,m$ beträgt?

$K = [0{\cdot}12^2\,.\,3{\cdot}14\,.\,4] - [0{\cdot}04^2\,.\,3{\cdot}14\,.\,4] = 0{\cdot}180864 - 0{\cdot}020096 = 0{\cdot}160768\,m^3$,

oder

$$K = 3{\cdot}14\,.\,4\,.\,(0{\cdot}12^2 - 0{\cdot}04^2) = 0{\cdot}160768\,m^3.$$

§ 40. Der gemeine Kegel und der gemeine Kegelstutz.

1. Der gemeine Kegel.

a) Die Oberfläche eines gemeinen Kegels besteht aus der Grundfläche, welche ein Kreis ist, und aus der Mantelfläche. Die Mantelfläche entspricht bei einem geraden Kegel einem Kreisausschnitte, dessen Bogenlänge gleich ist dem Umfange der Grundfläche und dessen Halbmesser durch die Seitenhöhe des Kegels gebildet ist.

Es ist sonach die Oberfläche eines gemeinen Kegels gleich der Summe der Maßzahlen der Grundfläche und der Mantelfläche. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist gleich dem

*) Die gleichen Faktoren π und h herausgehoben.

Produkte aus der Maßzahl des Umfanges der Grundfläche mit der Maßzahl der halben Seitenhöhe des Kegels.

Allgemein: $\boldsymbol{O = g + M}$.

$$g = r^2\pi;\ M = 2\,r\,\pi\,.\,\frac{s}{2} = r\,\pi\,.\,s.$$

$$O = r^2\pi + r\,\pi\,.\,s = \boldsymbol{r\,\pi\,.\,(r + s)}.$$

Beispiel: Wie groß ist die Oberfläche eines Kegels, wenn die Höhe $8\,dm$ und der Halbmesser $6\,dm$ beträgt? $h = 8\,dm$, $r = 6\,dm$, $s = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\,dm$.

$O = 6^2\,.\,3{\cdot}14 + 2\,.\,6\,.\,3{\cdot}14\,.\,\frac{10}{2} = 301{\cdot}44\,dm^2$; oder $O = 6\,.\,3{\cdot}14\,.\,(6 + 10) =$ $= 301{\cdot}44\,dm^2$.

b) Unter der gleichen Voraussetzung wie beim Zylinder kann ein Kegel auch als eine Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche durch ein Vieleck von unendlich vielen Seiten gebildet ist. Es gilt somit zur Berechnung des Rauminhaltes des Kegels die gleiche Regel, wie für die Pyramide.

Der Kubikinhalt des gemeinen Kegels ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl der Grundfläche mit dem dritten Teile der Maßzahl der Höhe.

Allgemein: $$\boldsymbol{C = g\,.\,\frac{h}{3} = r^2\pi\,.\,\frac{h}{3}}.$$

Beispiel: Wie groß ist der Kubikinhalt des vorangeführten Kegels? $h = 8\,dm$, $r = 6\,dm$; $C = 6^2\,.\,3{\cdot}14\,.\,\frac{8}{3} = 301{\cdot}44\,dm^3$.

2. Der gemeine Kegelstutz.

a) Die Oberfläche eines gemeinen geraden Kegelstutzes besteht aus zwei Grundflächen, welche durch Kreise gebildet werden, und aus einer gekrümmten Fläche, der Mantelfläche. Die Mantelfläche stellt, wenn dieselbe in eine Ebene ausgebreitet wird, einen Teil eines Kreisringes dar. Teilt man die beiden Kreisbögen desselben in eine gleiche Anzahl kleiner Teile, so zerfällt die ganze Mantelfläche in eine ebenso große Anzahl von Trapezen. Die Parallelseiten aller dieser Trapeze geben zusammen die Umfänge der beiden Grundflächen, während die gleichen Höhen dieser Trapeze der Seitenhöhe des Kegelstutzes entsprechen. Hieraus folgt:

Die Oberfläche eines gemeinen Kegelstutzes ist gleich der Summe aus den Maßzahlen der beiden Grundflächen und der Maßzahl der Mantelfläche. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstutzes ist gleich dem Produkte aus der halben Summe der Maßzahlen der Umfänge der beiden Grundflächen mit der Maßzahl der Seitenhöhe des Kegelstutzes.

Allgemein: $\boldsymbol{O = G + g + M}$.

$$G = R^2\pi;\ g = r^2\pi;\ M = \frac{U + u}{2}\,.\,s = \frac{2\,R\,\pi + 2\,r\,\pi}{2}\,.\,s = \pi\,.\,s\,.\,(R + r).$$

$$O = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)\,\pi\,.\,s = \boldsymbol{\pi\,[R^2 + r^2 + (R + r)\,.\,s]}.$$

Beispiel: Die Seitenhöhe eines geraden Kegelstutzes beträgt 5 *dm*, die Durchmesser der beiden Grundflächen messen 6 *dm* und 4 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

$O = G + g + M$; $G = 3^2 . 3{\cdot}14$; $g = 2^2 . 3{\cdot}14$; $M = 3{\cdot}14 . 5\,(3 + 2)$.
$O = 9 . 3{\cdot}14 + 4 . 3{\cdot}14 + 3{\cdot}14 . 5 . 5 = 119{\cdot}32\,dm^2$, oder
$O = 3{\cdot}14 . [3^2 + 2^2 + (3 + 2) . 5] = 3{\cdot}14 . (9 + 4 + 25) = 119{\cdot}32\,dm^2$.

b) Für die Rauminhaltsberechnung eines gemeinen Kegelstutzes gilt ebenfalls die gleiche Formel wie für den Pyramidenstutz, nämlich:
Der Kubikinhalt eines gemeinen Kegelstutzes ist gleich dem Produkte aus dem dritten Teile der Maßzahl der Höhe mit der Summe der beiden Grundflächen und dem geometrischen Mittel für dieselben; oder auch gleich dem Kubikinhalte von drei gleichhohen Kegeln, von denen der erste die untere, der zweite die obere und der dritte das geometrische Mittel aus der unteren und oberen Grundfläche zur Grundfläche hat.

Allgemein: $\mathbf{C} = (G + \sqrt{G.g} + g) . \frac{h}{3} = (R^2\pi + \sqrt{R^2\pi . r^2\pi} + r^2\pi) . \frac{h}{3} =$
$= (R^2\pi + Rr\pi + r^2\pi) . \frac{h}{3} = (\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}.\mathbf{r} + \mathbf{r}^2) . \frac{\pi h}{3}$.

Beispiel: Ist der obere Durchmesser 6 *dm*, der untere 4 *dm* und die Höhe 5 *dm*, so berechnet sich der Kubikinhalt des Kegelstutzes wie folgt:

$$C = (G + \sqrt{G.g} + g) . \frac{h}{3} = (3^2 . 3{\cdot}14 + \sqrt{3^2 . 3{\cdot}14 . 2^2 . 3{\cdot}14} + 2^2 . 3{\cdot}14) . \frac{5}{3} =$$
$$= 99{\cdot}43\,dm^3, \text{ oder } C = (R^2 + Rr + r^2) . \frac{\pi h}{3} = (3^2 + 3 . 2 + 2^2) . \frac{3{\cdot}14 . 5}{3} =$$
$$= 99{\cdot}43\,dm^3.$$

§ 41. Die Kugel.

a) Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises derselben.*)

Allgemein: $\mathbf{O} = 4\mathbf{r}^2\pi$, und hieraus $r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$, wenn r den Halbmesser der Kugel bedeutet.

Beispiel: Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser 5 *dm* beträgt.

$$O = 4\,r^2\pi = 4 . 5^2 . 3{\cdot}14 = 100 . 3{\cdot}14 = 314\,dm^2.$$

b) Denkt man sich die Kugel $ADBC$ in Fig. 161 einerseits durch sehr viele Ebenen, welche durch die Achse CD hindurchgehen, anderseits durch eine ebenso große Zahl von Ebenen, welche auf dieser Achse senkrecht stehen, geschnitten, so zerfällt die ganze Kugeloberfläche in eine große Anzahl von Vierecken und nur zum geringen Teile (an den beiden Polen) auch in Dreiecke, welche alle wegen ihrer geringen Ausdehnung als ebene geradlinige Figuren angesehen werden können. Verbindet man die Eckpunkte dieser Figuren mit dem Mittelpunkte der

*) Der Nachweis hiefür kann hier noch nicht erbracht werden.

Kugel und legt man weiters durch je zwei dieser aufeinander folgenden Verbindungslinien eine Ebene, so wird hiedurch die Kugel in lauter kleine Pyramiden zerteilt. Die Scheitel aller dieser Pyramiden vereinigen sich im Mittelpunkte der Kugel; es sind daher ihre gemeinschaftlichen Höhen dem Halbmesser der Kugel gleich, während ihre Grundflächen zusammengenommen die Oberfläche der Kugel ausmachen. Der Kubikinhalt der Kugel setzt sich aus allen diesen Pyramiden zusammen, und es gilt somit die Regel: **Der Kubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl der Oberfläche mit dem dritten Teile der Maßzahl des Halbmessers.**

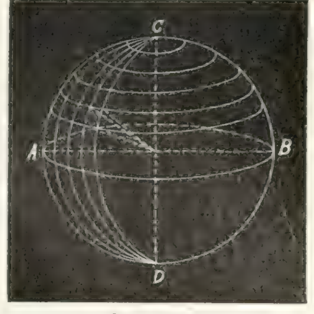


Fig. 161.

Allgemein: $C = 4\,r^2\pi \,.\, \frac{r}{3} = \frac{4}{3}\,r^3\pi$, und

hieraus $r = \sqrt[3]{\frac{3\,C}{4\,\pi}}$, wenn r den Halbmesser der Kugel bedeutet.

Beispiel: Der Kubikinhalt der in dem vorigen Beispiele gedachten Kugel ist: $C = \frac{4}{3}\,r^3 \,.\, \pi = \frac{4}{3} \,.\, 5^3 \,.\, 3{\cdot}14 = 523{\cdot}33\ dm^3$.

§ 42. Einige andere forstlich wichtige runde Körper.

1. Der parabolisch ausgebauchte Kegel oder das Paraboloid.

Bei diesem Körper nehmen die Kreisflächen wie die einfachen Höhen ab. Ist die Kreisfläche am Grunde des Vollkegels beispielsweise G, so ist sie bei $\frac{1}{4}$ der Höhe $= \frac{3}{4}\,G$ in der Mitte des Kegels $= \frac{1}{2}\,G$ und bei $\frac{3}{4}$ Höhe nur noch $\frac{1}{4}\,G$. Ist ferner der Durchmesser eines solchen Kegels am Grunde $= 1$, so ist er bei $\frac{1}{4}$ der Höhe $0{\cdot}87$, in der Mitte $= 0{\cdot}71$ und in $\frac{3}{4}$ der Höhe $= 0{\cdot}50$. Während also beim gemeinen Kegel die halbe Grundstärke in der Mitte liegt, ist sie beim Paraboloid in $\frac{3}{4}$ der Höhe, und während beim gemeinen Kegel die Kreisfläche in der halben Höhe nur $\frac{1}{4}$ der Kreisfläche am Grunde ausmacht, beträgt sie beim Paraboloid noch $\frac{1}{2}$ der Grundkreisfläche. Es folgt hieraus, daß auch der Rauminhalt eines Paraboloides, gleiche Grundfläche und Höhe mit dem gemeinen Kegel vorausgesetzt, viel größer sein muß, als der Rauminhalt des letzteren.

Die höhere Stereometrie lehrt, daß man den **Kubikinhalt eines Paraboloides findet, indem man dessen Grundfläche mit der halben Höhe, oder die Mittenfläche mit der Höhe multipliziert.**

Allgemein: $C = G \,.\, \frac{h}{2}$, oder $C = G_m \,.\, h$, wenn G = Grundfläche, G_m = Mittenfläche und h = Höhe des Paraboloides ist.

Beispiel: Wie groß ist der Kubikinhalt eines Paraboloides von 6 dm Höhe und 4 dm Grundstärke? $G = 2^2 \,.\, 3{\cdot}14 = 12{\cdot}56\ dm^2$; $C = 12{\cdot}56 \times \frac{6}{2} = 37{\cdot}68\ dm^3$

2. Das Neiloid oder der parabolisch eingebauchte Kegel.

Die Seiten des parabolisch eingebauchten Kegels bilden keine geraden, sondern nach innen gekrümmte Linien. Schon hieraus geht hervor, daß die Abnahme der Kreisflächen vom Fuße des Kegels nach der Spitze hin in einem noch rascheren Verhältnisse als beim gemeinen (geradseitigen) Kegel stattfinden muß. Bei letzterem nehmen die Kreisflächen wie die Quadrate der Höhen ab, beim Neiloide aber werden die Kreisflächen wie die dritten Potenzen der Höhen kleiner. Ist beispielsweise die Grundfläche des Kegels G, so wird sie bei $\frac{1}{4}$ der Höhe noch $\left(\frac{3}{4}\right)^3 . G = \frac{27}{64} G$, in der Mitte noch $\left(\frac{1}{2}\right)^3 G = \frac{1}{8} G = \frac{8}{64}$ und bei $\frac{3}{4}$ der Höhe noch $\left(\frac{1}{4}\right)^3 G = \frac{1}{64} G$ sein. Ebenso werden die Durchmesser des Kegels bei $\frac{1}{4}$ der Höhe 0·65, in der Mitte 0·35 und in $\frac{3}{4}$ der Höhe nur noch $0{\cdot}125 = \frac{1}{8}$ der Grundstärke betragen.

Den Kubikinhalt des Neiloides findet man durch Multiplikation der Grundfläche mit $\frac{1}{4}$ seiner Höhe. Allgemein:

$$C = G . \frac{h}{4} .$$ *)

Beispiel: Wie groß ist der Kubikinhalt eines 8 *dm* hohen Neiloides, dessen Grundstärke 5 *dm* beträgt?

$$C = 2{\cdot}5^2 . 3{\cdot}14 . \frac{8}{4} = 39{\cdot}25\ dm^3.$$

3. Das Faß.

Der Kubikinhalt eines Fasses wird annäherungsweise gefunden, wenn man dasselbe als einen gleichhohen Zylinder betrachtet, dessen Durchmesser gleich ist dem dritten Teile der Summe aus dem doppelten Spunddurchmesser und dem einfachen Bodendurchmesser.

Allgemein: $$C = \frac{\pi . h}{4} . \left(\frac{2 D + d}{3}\right)^2 = \frac{\pi . h}{36} . (2 D + d)^2.$$

Es ist hiebei in der Regel Erfordernis, die Maße als Innenmaße des Fasses zu ermitteln. Werden dann auch die Maßlängen in Dezimeter ausgedrückt, so erhält man den Kubikinhalt des Fasses in Kubikdezimetern, d. i. in Litern.

Beispiel: Wie groß ist der Literinhalt eines Fasses, dessen Länge 1 *m*, dessen Spundtiefe 70 *cm* und dessen Bodendurchmesser 48 *cm* beträgt?

$$h = 1\ m = 10\ dm;\ D = 70\ cm = 7\ dm;\ d = 48\ cm = 4{\cdot}8\ dm.$$

$$C = \frac{\pi . h}{36} . \left(2 D + d\right)^2 = \frac{3{\cdot}14 . 10}{36} . (2 . 7 + 4{\cdot}8)^2 = 308{\cdot}28\ dm^3 \text{ oder } 308{\cdot}28\ l.$$

4. Der Kohlenmeiler.

a) Berechnung eines stehenden Meilers mit gerader Böschungslinie. Bezeichnet man den unteren Durchmesser des Meilers,

*) Es ist leicht, die Kubatur-Formeln der 3 Kegel, nämlich des parabolischen, gemeinen und eingebauchten Kegels, dauernd im Gedächtnisse zu behalten. Beim ersteren wird die Grundfläche mit der Hälfte, beim zweiten mit dem Drittel und beim Neiloid mit dem Viertel der Höhe multipliziert. Es ist also C der Reihe nach $G . \frac{h}{2}$, $G . \frac{h}{3}$ und $G . \frac{h}{4}$.

AB, Fig. 162, mit D, den oberen Durchmesser CD mit d, die Stoßhöhe EF mit h und endlich die Meilerhöhe EG mit H, so erhält man für die Berechnung des Kubikinhaltes in Raummeter die Formel:

$$C = P_1 + P_2 - \frac{1}{3} P_3.$$

In derselben bedeutet:

P_1 ein Paraboloid mit dem Durchmesser D und der Höhe h,
P_2 „ „ „ „ „ d „ „ „ H, und
P_3 „ „ „ „ „ $D-d$ „ „ „ h.

Beispiel: Ein Meiler mit gerader Böschungslinie hat nachstehende Dimensionen: Durchmesser bei $AB = 9\,m$, der obere Durchmesser bei $CD = 4\,m$, die Stoßhöhe bei $EF = 2{\cdot}0\,m$ und die Meilerhöhe $= 3{\cdot}5\,m$; wie groß ist der Rauminhalt dieses Meilers?

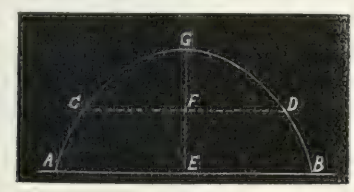


Fig. 162.

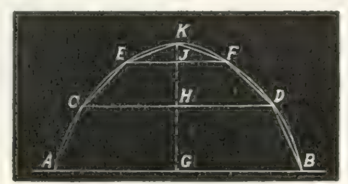


Fig. 163.

Das Paraboloid P_1 hat den Durchmesser von $9\,m$ und die Höhe $2\,m$,
„ „ P_2 „ „ „ „ $4\,m$ „ „ „ $3{\cdot}5\,m$,
„ „ P_3 „ „ „ „ $9\,m - 4\,m = 5\,m$ „ „ „ $2\,m$,

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = 4{\cdot}5^2 \,.\, 3{\cdot}14 \,.\, \frac{2}{2} = 63{\cdot}585\,rm \\ P_2 = 2^2 \,.\, 3{\cdot}14 \,.\, \frac{3{\cdot}5}{2} = 21{\cdot}98\,rm \end{array}\right\} \ldots\ldots 85{\cdot}565\,rm$$

$$P_3 = 2{\cdot}5^2 \,.\, 3{\cdot}14 \,.\, \frac{2}{2} = 19{\cdot}625\,rm;\ \frac{1}{3} P_3 = 6{\cdot}542\,rm$$

$$C = 79{\cdot}023\,rm.$$

b) Berechnung eines stehenden Meilers mit gebrochener Böschungslinie.

Bezeichnet man auch hier, Fig. 163, den unteren Durchmesser AB mit D, den oberen Durchmesser EF mit d, die doppelte Stoßhöhe GJ mit h und die Meilerhöhe GK mit H, so erhält man folgende Formel:

$$C = P_1 + P_2.$$

In dieser Formel bedeutet P_1 wieder ein Paraboloid mit dem Durchmesser D und der Höhe h, und P_2 ein Paraboloid mit dem Durchmesser d und der Höhe H.

Beispiel: Ein doppelstößiger Meiler (Fig. 163) hat folgende Dimensionen: Durchmesser D bei $AB = 11\,m$, d bei $EF = 9\,m$, doppelte Stoßhöhe $h = 3{\cdot}4\,m$, Haubenhöhe $= 1{\cdot}2\,m$. Wie groß ist der Rauminhalt dieses Meilers?

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = 5{\cdot}5^2 \,.\, 3{\cdot}14 \,.\, \frac{3{\cdot}4}{2} = 161{\cdot}47 \\ P_2 = 4{\cdot}5^2 \,.\, 3{\cdot}14 \,.\, \frac{4{\cdot}6}{2} = 146{\cdot}25 \end{array}\right\}, \text{ daher } C = P_1 + P_2 = 307{\cdot}72\,rm.$$

Es wird hier ausdrücklich bemerkt, daß anstatt der Durchmesser gewöhnlich die Umfänge gegeben sind. Man wird daher aus den Umfängen die Durchmesser vorerst rechnen müssen.*)

*) Vorteilhaft für die Berechnung des Inhaltes von Kohlenmeilern sind die Tafeln von E. Böhmerle, Wien 1877, welche nach den vorstehenden Formeln berechnet sind.

§ 43. Bestimmung des Kubikinhaltes eines Körpers aus dessen spezifischem Gewichte.

Der Rauminhalt eines jeden Körpers läßt sich auch aus seinem Gewichte bestimmen.

Man versteht unter dem Gewichte eines Körpers die Größe des Druckes, welchen derselbe infolge seiner Schwere auf eine Unterlage ausübt. Bestimmt man das Gewicht eines Körpers mit einer Wage ohne Rücksicht auf den Rauminhalt desselben, so erhält man das absolute Gewicht dieses Körpers. Ermittelt man jedoch das Gewicht der angenommenen Raumeinheit eines Körpers, so erhält man das spezifische Gewicht des letzteren. Als Raumeinheit nimmt man für wissenschaftliche Zwecke 1 cm^3 an und drückt dann das spezifische Gewicht in Grammen aus. Für unsere Zwecke ist es jedoch praktischer, 1 dm^3 (1 *l*) als Raumeinheit anzunehmen und das Gewicht dieser Raumeinheit als spezifisches Gewicht in Kilogrammen auszudrücken.

Nachstehend die spezifischen Gewichte der für uns wichtigen Körper für 1 dm^3.

Wasser	1·0 *kg*		Rotbuche, frisch	1·01 *kg*,	waldtrocken 0·74 *kg*
Quecksilber	13·6 *kg*		Weißbuche, „	1·08 *kg*,	„ 0·72 *kg*
Messing	8·4 *kg*		Akazie, „	0·87 *kg*,	„ 0·71 *kg*
Schmiedeeisen	7·78 *kg*		Feldulme, „	0·95 *kg*,	„ 0·69 *kg*
Gußeisen	7·28 *kg*		Feldahorn, „	0·96 *kg*,	„ 0·67 *kg*
Stahl	7·82 *kg*		Edelkastanie, „	0·99 *kg*,	„ 0·66 *kg*
Zink	7·19 *kg*		Bergahorn, „	0·93 *kg*,	„ 0·66 *kg*
Marmor	2·72 *kg*		Birke, „	0·94 *kg*,	„ 0·64 *kg*
Kalkstein	2·45 *kg*		Lärche, „	0·76 *kg*,	„ 0·62 *kg*
Granit	2·6 *kg*		Schwarzkiefer, „	1·00 *kg*,	„ 0·57 *kg*
Glas	3·37 *kg*		Schwarzerle, „	0·82 *kg*,	„ 0·53 *kg*
Steinkohle	1·3 *kg*		Weißkiefer, „	0·7 *kg*,	„ 0·52 *kg*
Trockene Erde	1·3 *kg*		Weißerle, „	0·8 *kg*,	„ 0·49 *kg*
Luft	0·0013 *kg*		Tanne, „	1·00 *kg*,	„ 0·48 *kg*
Stieleiche, frisch	1·1 *kg*,	waldtrocken 0·86 *kg*	Fichte, „	0·73 *kg*,	„ 0·47 *kg*
Eibe, „	1·03 *kg*,	„ 0·84 *kg*	Linde, „	0·74 *kg*,	„ 0·45 *kg*
Esche „	0·92 *kg*,	„ 0·75 *kg*	Weymouthskiefer	0·73 *kg*,	„ 0·43 *kg*

Auf Grundlage des spezifischen Gewichtes stellt sich die Berechnung des Kubikinhaltes und des absoluten Gewichtes wie folgt:

1. Wenn 1 dm^3 Granit 2·6 *kg* wiegt, so werden z. B. in 31·2 *kg* Granit so viele Kubikdezimeter enthalten sein, so oftmal 2·6 *kg* in 31·2 *kg* enthalten sind. $31{\cdot}2 : 2{\cdot}6 = 12\ dm^3$. Hieraus folgt:

Der Kubikinhalt eines Körpers in Kubikdezimetern ist gleich dem absoluten Gewichte desselben in Kilogrammen, dividiert durch das spezifische Gewicht.

Allgemein: $C = \frac{G}{s}$, wenn G das absolute und s das spezifische Gewicht eines Körpers bezeichnet.

Beispiel: Das Gewicht eines Stückes Eichenholz beträgt 3245 *kg*; wie groß ist der kubische Inhalt?

$$C = \frac{3245}{0{\cdot}86} = 3773{\cdot}25\ dm^3.$$

2. Wenn 1 dm^3 Kalkstein 2·45 *kg* wiegt, so wiegen 5 dm^3 Kalkstein fünfmal soviel, d. i. $2{\cdot}45 \times 5 = 12{\cdot}25$ *kg*. Hieraus folgt:

Das absolute Gewicht eines Körpers in Kilogrammen ist gleich dem Produkte aus dem spezifischen Gewichte desselben

mit der Maßzahl des in Kubikdezimetern ausgedrückten Kubikinhaltes.

Allgemein: $\boldsymbol{G = C \cdot s}$.

Beispiel: Wie viel Kilogramm wiegt ein Würfel aus Fichtenholz mit 3 *dm* Kantenlänge?

$$C = 3^3 = 27\ dm^3.$$
$$G = 27 \times 0{\cdot}47 = 12{\cdot}69\ kg.$$

§ 44. Aufgaben über Körperberechnungen hauptsächlich für forstliche Zwecke.

I. Das Prisma.

1. Wie groß ist die Oberfläche in Quadratmeter und der Kubikinhalt in Kubikdezimeter je eines Würfels, dessen Kante 9 *cm*, 6·4 *m*, $5\frac{4}{9}$ *dm*, 7 *m* 2 *dm* 5 *cm* lang ist?

2. Die Oberfläche eines Würfels hat 54 m^2; 47 dm^2 7 cm^2; 3 m^2 61 dm^2; 80·86 cm^2. Wie groß ist *a)* die Kante und *b)* der Kubikinhalt dieses Würfels?

3. Der Kubikinhalt eines Würfels beträgt 1728 dm^3; 884·736 m^3. Wie groß ist *a)* die Kante und *b)* die Oberfläche des Würfels?

4. Die Diagonale der Seitenfläche eines Würfels mißt 36 *cm*. Berechne *a)* die Kantenlänge, *b)* die Oberfläche, *c)* den Kubikinhalt.

5. Ein vierkantig behauener Balken ist 6 *m* lang, 28·5 *cm* hoch und 20·2 *cm* breit; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Kubikinhalt desselben?

6. Ein als reguläres sechsseitiges Prisma behauener Stein besitzt eine Basiskante von 24 *cm* und eine Höhe von 1·8 *m*. Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt dieses Steines?

7. Eine quadratische Säule hat einen Kubikinhalt von 1·0108 m^3 und eine Höhe von 7 *m*; wie groß ist *a)* die Grundfläche, *b)* die Basiskante und *c)* die Oberfläche?

8. Ein Gefäß von 5 *dm* Länge und 4 *dm* Breite ist zur Hälfte mit Wasser gefüllt. In dieses Gefäß wird ein unregelmäßiges Holzstück so tief eingetaucht, daß dasselbe ganz vom Wasser bedeckt wird. Wie groß ist der Kubikinhalt des Holzes, wenn das Wasser infolge Eintauchens des Holzes um 3·4 *dm* gestiegen ist?

9. Eine 15·5 *m* lange Mauer ruht auf einem 1 *m* tiefen und 75 *cm* starken Fundamente aus Bruchsteinmauerwerk in Weißkalkmörtel und ist selbst bei einer Stärke von 60 *cm* und einer Höhe von 3·5 *m* als Ziegelmauerwerk in Weißkalkmörtel aufgebaut. Wie hoch kommt die Aufführung dieser Mauer samt Fundament zu stehen, wenn *a)* für 1 m^3 Bruchsteinmauerwerk erforderlich sind 1·2 m^3 Bruchstein à 2·2 *K*, 0·1 m^3 Weißkalk à 12 *K*, 0·25 m^3 Sand à 2·50 *K*, 0·85 Maurertagschichten à 2·70 *K*, 1·15 Handlangertagschichten à 2·00 *K* und 0·1 vom Arbeitslohne für Aufsicht und Requisiten, *b)* für 1 m^3 Ziegelmauerwerk 260 Ziegel per Tausend 38·5 *K*, 0·1 m^3 Weißkalk à 12 *K*, 0·25 m^3 Sand à 2·50 *K*, 0·75 Maurerschichten à 2·70 *K*, 1·1 Handlangerschichten à 2·00 *K* und 0·1 vom Arbeitslohne für Aufsicht und Requisiten?

10. Ein einräderiger Handkastenkarren (Schiebtruhe) mit zwei parallelen Längswänden und nach innen geneigter Vorder- und Rückwand

hat eine obere lichte Weite von 70 *cm*, eine lichte Bodenweite von 40 *cm*, eine Breite (Entfernung der Längswände) von 45 *cm* und eine Bodentiefe von 27 *cm*. Wie viel Kubikmeter Erde faßt dieser Karren, wenn das Materiale oberhalb platt abgestrichen wird?

11. Auf einer Kulturfläche ist ein Entwässerungsgraben von 115·5 *m* Länge und einem trapezförmigen Querschnitte von 60 *cm* Oberweite, 35 *cm* Sohlenweite und 45 *cm* Tiefe auszuheben und das Materiale auf einen in der Nähe zu errichtenden Straßendamm zu verführen. *a)* Wie viel Material in Kubikmeter kommt auszuheben? *b)* Wie hoch stellen sich die Aushebungskosten pro laufendes Meter, wenn der Aushub und das Verführen für 1 m^3 0·2 Tagschichten à 1·5 *K* beansprucht? *c)* Wie hoch sind die Gesamtkosten? *d)* Wie viele Schiebtruhen Erde gibt der gesamte Aushub, wenn der Inhalt einer Truhe demjenigen in Aufgabe 10 gleichkommt und die lose Erde dem Volumen nach im Verhältnisse von 4 : 3 zu der gewachsenen Erde steht?

12. In welcher Länge kann ein Straßendamm von 4 *m* oberer und 8·50 *m* unterer Breite und 2·25 *m* Höhe von dem anfallenden Materiale in Aufgabe 11 angeführt werden?

13. Welchen Rauminhalt in Raummeter und Festmeter hat je ein Holzstoß, welcher 16 *m* lang und 2·2 *m* hoch ist, wenn die Scheitlänge 60 *cm*, 80 *cm* und 1 *m* beträgt? (1 *rm* = 0·78 *fm*).

14. Welche Länge (Weite) muß einem Holzstoße bei einer Stoßhöhe von 1 *m* und einer Scheitlänge von *a)* 1 *m*, *b)* 80 *cm*, *c)* 60 *cm* gegeben werden, damit der Stoß genau 1 m^3 (= 1 *rm*) fasse?

15. Eine Waldstraße von 1·753 *km* Länge bekommt eine Steinpflasterung (den sogenannten Grundbau oder die Packlage) auf 3 *m* Breite und 10 *cm* Dicke, ferner eine Beschotterung mit Schlägelschotter von 4 *cm* Dicke. Wie viel Bruchsteine als Pflastersteine und wie viel Kubikmeter Schlägelschotter sind erforderlich und welche Straßenstrecke kann man mit den schon vorhandenen 312 m^3 Bruchsteinen und 75·6 m^3 Schlägelschotter fertigstellen?

16. Eine Wildfutterhütte (Futterstadl) hat eine rechteckige Grundfläche von 4·5 *m* Länge und 3 *m* Breite und ist durch 4 hölzerne Seitenwände von 2·2 *m* Höhe begrenzt. Auf den Seitenwänden ruht eine flache Schindelbedachung mit einer Dachstuhlhöhe von 1·3 *m*. Wie viel Meterzentner (*q*) Heu haben in der Hütte Platz, wenn 1 m^3 Heu 110 *kg* wiegt?

II. Die Pyramide und der Pyramidenstutz.

17. Welchen Kubikinhalt haben folgende Pyramiden: *a)* Grundfläche $g = 16\,m^2$, Höhe $h = 7\,m$; *b)* $g = 5·8\,dm^2$, $h = 4·3\,dm$; *c)* $g = 5·5\,cm^2$, $h = 1·3\,dm$?

18. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit 8 *dm* Seitenlänge; die Höhe der Pyramide beträgt 12 *dm*. Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt dieser Pyramide?

19. Eine gerade vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat eine Grundkante von 16 *cm*; die Seitenhöhe der Pyramide beträgt 24 *cm*. Wie groß ist die Grundfläche, die Mantelfläche und der Kubikinhalt dieser Pyramide?

20. Das Dach eines Turmes bildet eine achtseitige Pyramide von 2·5 *m* Grundkante und 12 *m* Seitenhöhe. Wie viel Kupferplatten sind zur Eindeckung des Daches erforderlich, wenn jede 70 *cm* lang und 35 *cm* breit ist und überdies 20% auf Verschnitt und Falze gerechnet werden?

21. Auf einer Landstraße ist jeder Schotterhaufen (Schotterprisma), Fig. 164, unten $a = 2\cdot2\,m$, oben $b = 1\cdot4\,m$ lang, ferner $c = 1\cdot0\,m$ breit und $h = 0\cdot7\,m$ hoch; wie groß ist sein Kubikinhalt?

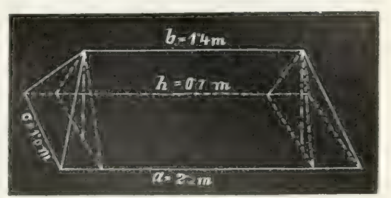


Fig. 164.

Behufs Bestimmung des Kubikinhaltes eines Schotterprisma denkt man sich durch die oberen Eckpunkte zwei senkrechte Schnitte auf die Grundfläche geführt. Es erscheint dann der Mittelteil als ein dreiseitiges Prisma, dessen Basis die Fläche $\frac{1\cdot0 \times 0\cdot7}{2}$, allgemein $\frac{c\,.\,h}{2}$ besitzt und dessen Höhe $1\cdot4\,m$, allgemein b ist, während die beiden Seitenteile zusammen eine vierseitige Pyramide vorstellen, deren Basisfläche $1\cdot0\,.\,(2\cdot2 - 1\cdot4)$, allgemein $c\,.\,(a - b)$ und deren Höhe gleich $0\cdot7$ oder h ist.

22. Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt eines geraden Pyramidenstutzes von quadratischer Grundfläche, wenn die parallelen Kanten $12\,dm$ und $8\,dm$ lang sind und die Höhe des Pyramidenstutzes $15\,dm$ beträgt?

23. Welchen Kubikinhalt hat ein pyramidenstutzartiger Komposthaufen, welcher unten $5\cdot8\,m$ lang und $2\cdot4\,m$ breit, oben $3\cdot9\,m$ lang und $1\cdot6\,m$ breit ist, und dessen Höhe $0\cdot8\,m$ beträgt?*)

III. Die regelmäßigen Körper.

24. Berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt eines Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders, Hexaeders und Dodekaeders, wenn die Kantenlänge $2\,m$ beträgt.

IV. Der Zylinder.

25. Berechne die Grundfläche, beziehungsweise die Mantelfläche, die Oberfläche und den Kubikinhalt folgender Zylinder: Durchmesser $5\,m$, Höhe $12\,m$; Halbmesser $6\,dm$, Höhe $13\,dm$; Umfang $23\cdot14\,cm$, Höhe $9\,cm$; Grundfläche $985\cdot96\,mm^2$, Höhe $8\,mm$.

26. Auf einem Holzplatze befinden sich: 23 Stück Klötzer mit dem Durchmesser von $36\,cm$ und $5\,m$ Länge; 27 Stück mit dem Durchmesser von $28\,cm$ und $4\,m$ Länge. Wie groß ist der Kubikinhalt dieser Klötzer, wenn man dieselben als Walzen betrachtet?

27. Es soll ein zylindrischer Brunnenschacht von $8\cdot5\,m$ Tiefe und $2\,m$ Durchmesser gegraben werden; wie viel Kubikmeter beträgt der Erdaushub?

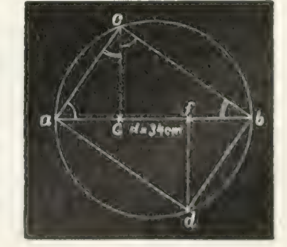


Fig. 165.

28. Eine Wasserleitung mit $10\,cm$ Rohrweite speist ein zylindrisches Bassin von $1\cdot9\,m$ lichtem Durchmesser und $1\cdot4\,m$ Tiefe. In welcher Zeit wird das Bassin einmal gefüllt, wenn sich das Wasser pro Sekunde mit einer Geschwindigkeit von $1\cdot4\,m$ fortbewegt?

29. Wieviel in Festmetern und in Prozenten beträgt der Abfall, wenn ein an beiden Enden gleich starker Fichtenstammabschnitt von $34\,cm$ Durchmesser und $4\,m$ Länge rechteckig nach dem Verhältnisse $5:7$ behauen werden soll?

*) Gewöhnlich hat ein solcher Haufen keine Pyramidenstutzform, sondern es schneiden sich seine Seitenkanten verlängert in zwei Punkten und bilden eine Obeliskenform. Annähernd ist der Inhalt einer solchen gleich dem Produkte der arithmetischen Mittel der Basiskanten mit der Höhe.

Ein Balken, im Querschnitte 5 : 7 bezimmert, ist, hochkantig gestellt, der tragfähigste von gleicher Querschnittsfläche. Behufs Konstruktion dieses Querschnittes, Fig. 165, macht man $ae = ef = fb = \frac{1}{3} ab = \frac{1}{3} d$, errichtet die Senkrechten ce und df und hat in $adbc$ den gesuchten Querschnitt.

Für unsere Aufgabe handelt es sich darum, den Inhalt des bezimmerten Balkens zu berechnen und denselben von dem Inhalte der vollen Baumwalze abzuziehen, um den Bezimmerungsabfall zu erhalten. Zur Berechnung des bezimmerten Balkens ist vorerst die Fläche des Querschnittes als Basis zu berechnen. Letztere ist gleich $\triangle abc +$ $+ \triangle abd = 2 . ab . \frac{ce}{2} = ab . ce.$ ab ist als Durchmesser bekannt, ce unbekannt. Behufs Bestimmung von ce hat man $\triangle aec \sim \triangle ebc$ (die Winkel sind gleich, weil die Schenkel aufeinander senkrecht stehen), und hieraus $ae : ce = ce : eb$, also $ce^2 = ae . eb$, $ce = \sqrt{ae . eb} = \sqrt{\frac{1}{3} d . \frac{2}{3} d}$, d. h. die fragliche Höhe ist gleich der Wurzel aus dem Produkte von $\frac{1}{3}$ mit $\frac{2}{3}$ des Durchmessers. Ist sonach die Höhe bestimmt, so ist die Querfläche $adbc$ auch gegeben und die weitere Rechnung leicht durchführbar.

Sollte auch die Länge der Basiskanten ac und cb gefunden werden, so hat man $ac^2 = ae^2 + ce^2$, und $ac = \sqrt{ae^2 + ce^2}$, und $cb^2 = eb^2 + ce^2$, woraus $cb = \sqrt{eb^2 + ce^2}$.

30. Ein halbzylindrisches Gewölbe hat einen Durchmesser von 3·5 *m* und ist 10·2 *m* lang. Wieviel hat man für zweimalige Weißigung desselben zu veranschlagen, wenn 1 m^2 auf 6·2 *h* zu stehen kommt?

31. Welchen Kubikinhalt hat eine Brunnenröhre von 27 *cm* Durchmesser und 4 *m* Länge, wenn der Durchmesser der Bohrung 10 *cm* beträgt?

32. Wie groß ist der Kubikinhalt der Rinde eines Kiefernklotzes von 6 *m* Länge und 42 *cm* Durchmesser, wenn die einfache Rindenstärke 2·5 *cm* beträgt?

33. Wie hoch kommt die Ausmauerung des Brunnens in Aufgabe 27 mit 30 *cm* dickem Ziegelmauerwerk, wenn 1 m^3 Brunnenmauerwerk 16 *K* 20 *h* kostet?

V. Der gemeine Kegel und der Kegelstutz.

34. Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt eines gemeinen Kegels, wenn der Halbmesser der Grundfläche 5 *cm* und die Höhe 12 *dm* beträgt?

35. Ein Baumstamm hat die Form eines gemeinen Kegels. Wie groß ist der Kubikinhalt, wenn der Durchmesser der Grundfläche 32 *cm* und die Höhe des Stammes 21 *m* beträgt?

36. Wieviel Quadratmeter Zinkbedachung enthält eine Turmspitze, wenn der Radius der Standfläche 1·72 *m* und die Höhe der Turmspitze 12·5 *m* ist?

37. Ein Wildheubehälter wird gebildet durch sechs in Form eines regulären Sechseckes angeordnete Pfähle und eine kegelförmige Strohbedachung. Wieviel Heu ist unterzubringen, wenn die Seite des Sechseckes 1·2 *m* und die Höhe der Pfähle 2·1 *m* beträgt und die Spitze des Daches eine Totalhöhe von 2·6 *m* hat?

38. Der Kubikinhalt eines Kegels ist 6 m^3 186 dm^3, die Grundfläche 2 m^2 6 dm^2 20 cm^2; wie groß ist die Höhe?

39. Ein 4·5 *m* langes Baumstück hat die Form eines abgestutzten gemeinen Kegels, wobei der untere Durchmesser 24 *cm*, der obere Durchmesser 16 *cm* beträgt. Wie groß ist der Kubikinhalt?

40. Wie viel Hektoliter und Liter faßt ein Maischbottich, wenn derselbe am Boden eine lichte Weite von 2·52 *m* und oben eine solche von 2·14 *m* und eine lichte Tiefe von 1·10 *m* hat?

VI. Die Kugel.

41. Der Halbmesser einer Kugel ist 3 *dm*; wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt der Kugel?

42. Die Oberfläche einer Kugel beträgt 36 m^2; wie groß ist der Halbmesser und der Kubikinhalt der Kugel?

43. Der Kubikinhalt einer Kugel beträgt 24·283 dm^3; wie groß ist die Oberfläche derselben?

VII. Einige andere forstlich wichtige Körper.

44. Berechne den Kubikinhalt folgender Stämme: *a)* Stockdurchmesser d (= Durchmesser der Grundfläche) 42 *cm*, Länge $l = 28$ *m*, *b)* $d = 38$ *cm*, $l = 24$ *m*, *c)* $d = 25$ *cm*, $l = 18$ *m*, *d)* $d = 27$ *cm*, $l = 19$ *m* sowohl als parabolisch ausgebauchte, als auch als eingebauchte Kegel.

45. Ein parabolisch geformter Heuschober hat 4 *m* Durchmesser und 3·75 *m* Höhe; wie viel Kilogramm Heu enthält derselbe, wenn 1 m^3 Heu 110 *kg* wiegt?*)

46. Berechne den Kubikinhalt eines Fasses von 1·2 *m* Höhe, wenn die Spundtiefe 7·2 *dm* und die Bodenweite 6·4 *dm* beträgt?

47. Wie viel Liter enthält ein Faß von 1·4 *m* Höhe, 58 *cm* Bodendurchmesser und 72 *cm* Spundtiefe?

48. Wie groß ist der Rauminhalt eines Meilers mit gerader Böschungslinie, wenn der untere Durchmesser 6 *m*, der obere Durchmesser $4\frac{1}{2}$ *m*, die Stoßhöhe 1·8 *m* und die Haubenhöhe 1·3 *m* beträgt?

49. Berechne den Rauminhalt eines doppelstößigen Meilers mit gebrochener Böschungslinie, wenn der untere Umfang 47·1 *m*, der obere Umfang 34·6 *m*, die Höhe der beiden Stöße 4 *m* und die Haubenhöhe 1·3 *m* mißt?

50. Welchen Rauminhalt hat ein liegender Kohlenmeiler, der vorne 3 *m*, rückwärts 4·5 *m* hoch, ferner 2 *m* breit und 6 *m* lang ist?

Ein liegender Kohlenmeiler ist ein Prisma, das mit einer Seitenfläche am Boden aufliegt und als dessen Basisflächen die beiden Längsflächen des Meilers zu betrachten sind. Die Höhe des Prisma ist die Breite des Meilers. Da die Grundfläche sonach ein Trapez ist, so hat man $C = \frac{(3 + 4{\cdot}5) \,.\, 6}{2} \,.\, 2 = 45\ rm.$

VIII. Gewichtsberechnungen.

51. Welches Gewicht in Kilogramm besitzt das Wasser in einem Fasse von den Dimensionen wie in Aufgabe 46?

*) Auch der Inhalt mancher stehender Meiler kann als Paraboloid berechnet werden; man hat dann vom Resultate etwa 5% zu subtrahieren.

52. Wie schwer ist ein fichtener, auf einen Querschnitt von 30 *cm* Breite und 42 *cm* Höhe behauener waldtrockener Balken von 8 *m* Länge? (spezifisches Gewicht 0·47 *kg*).

53. Wie viel Pferde sind zur Fortschaffung eines 3·5 *fm* enthaltenden Eichenstammes erforderlich, wenn man annimmt, daß ein Pferd 750 *kg* ziehen kann und das spezifische Gewicht des Eichenholzes 0·86 *kg* ist.

54. Wie viel Raummeter Brennholz darf ein Fuhrmann aufladen, wenn seine Pferde eine Last von 17 *q* zu ziehen imstande sind und das spezifische Gewicht des Holzes = 0·72 *kg* und 1 *rm* = 0·78 *fm*?

III. Abschnitt.

Das Wesentlichste aus der Projektionslehre.

§ 45. Einleitung.

An die zeichnerische Darstellung von Raumgebilden können folgende Forderungen gestellt werden:

1. Die Zeichnung soll ein möglichst anschauliches Bild von dem in Frage kommenden Gegenstande geben, so daß der Beobachter von der bildlichen Darstellung sofort dieselbe Vorstellung erhält, welche der Gegenstand selbst hervorbringen würde. Die Entnahme der wirklichen Größenverhältnisse des Gegenstandes und seiner Teile wird hiebei nicht gefordert und ist überdies auch nur unter gewissen Voraussetzungen tunlich.

2. Es wird von einem Gegenstande, z. B. einem Hause, einer Maschine u. dgl., eine Zeichnung verlangt, die wohl nicht sofort denselben Eindruck auf das Auge macht, wie der Gegenstand selbst, die aber im Geiste eine vollkommen richtige Darstellung von demselben ermöglicht und alle Abmessungen bezüglich der Größenverhältnisse und der Lage der einzelnen Teile leicht entnehmen läßt.

Der Forderung 1 entspricht die sogenannte perspektivische Darstellungsweise. Die Bilder, die der Maler entwirft, die Photographien von Landschaften und Einzelgegenständen erscheinen alle in der perspektivischen Darstellung; auch alle Zeichnungen, die wir von den Körpern im II. Abschnitte gaben, sind der besseren Anschaulichkeit wegen perspektivisch gehalten.

Die Forderung 2 wird durch die Darstellung der Raumgrößen in sogenannten Projektionen erfüllt, von denen die Projektionslehre handelt. Die letztere ist für unsere Zwecke von größerem Belange als die Perspektive und wird deshalb im folgenden in Kürze etwas näher besprochen.

I. Kapitel.

Von den Projektionen von Punkten und Strecken.

§ 46. Projektionen von Punkten und Strecken auf eine Projektionsebene.

1. Denkt man sich, Fig. 166, $P_1\ P_1$ als eine Ebene und a als einen im Raume gelegenen Punkt, ferner die $a\,a'$*) als eine vom Punkte a

*) Man liest $a' =$ „a Strich", zum Unterschiede von a_1, das man „a eins" liest, oder a mit dem Index 1. $a'' = a$ 2 Strich, $a''' = a$ 3 Strich; $a_2 = a$ zwei oder a mit dem Index 2, $a_3 = a$ drei oder a mit dem Index 3.

auf die Ebene gefällte Senkrechte, so bezeichnet der Schnittpunkt (Fußpunkt) a' dieser Senkrechten mit der Ebene $P_1 P_1$ die Projektion des Raumpunktes a auf die Ebene $P_1 P_1$. Die letztere wird Projektions- oder Bildebene und die Senkrechte $a a'$ die projizierende Gerade genannt.

Liegt der Punkt a in der Bildebene, so ist er zugleich seine eigene Projektion.

2. Die Projektion einer Strecke ist durch die Projektion ihrer Endpunkte auf die Projektionsebene gegeben. In Fig. 166 ist $a' b'$ die Projektion der Raumstrecke $a b$.

Liegt eine Strecke in der Projektionsebene, so fällt sie mit ihrer Projektion zusammen, wie $c d$ und $c' d'$; steht eine Strecke senkrecht auf

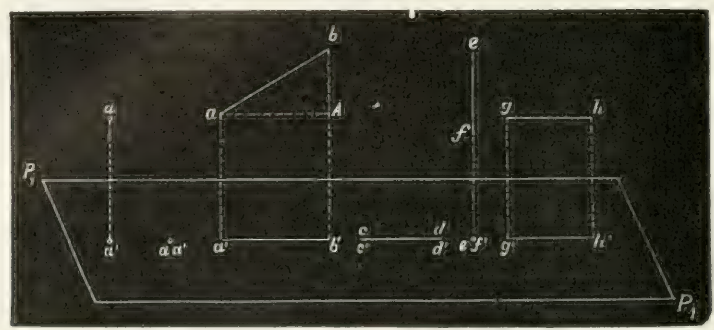


Fig. 166.

der Projektionsebene, so erscheint ihre Projektion als ein Punkt, wie $e f$ und $e' f'$. Ist eine Strecke zur Projektionsebene parallel, so besitzt ihre Projektion genau dieselbe Länge, wie die Strecke selbst, $g h = g' h'$. Ist hingegen eine Strecke gegen die Projektionsebene geneigt, so ist ihre Projektion stets kürzer als die Raumstrecke; in Fig. 166 ist $a' b'$ gleich der Parallelen $a A$, welche als Kathete des rechtwinkligen Dreieckes $a A b$ kleiner ist als die Hypotenuse $a b$ (d. i. die Raumstrecke der Projektion $a' b'$).

Der Winkel, den eine zu einer Projektionsebene geneigte Strecke mit ihrer Projektion auf diese Ebene einschließt, heißt der Neigungswinkel der Strecke gegen die genannte Projektionsebene. In Fig. 167 ist nach dieser Definition n der Neigungswinkel der Strecke $a b$ gegen die Ebene P_1.

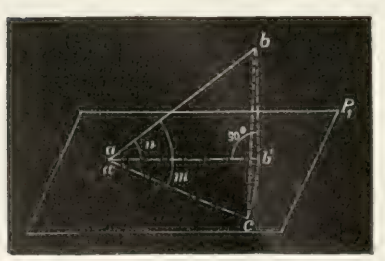


Fig. 167.

Zieht man in der Ebene P_1 eine beliebige zweite Gerade $a c$ und macht man $a c = a' b'$, so sind in den Dreiecken $a b b'$ und $a b c$ je zwei Seiten gleich (denn $a b$ ist gemeinschaftlich und $a' b'$ wurde gleich gemacht $a c$) und die dritte ungleich. Da nun die ungleiche Seite $b b'$ des $\triangle a b b'$ als Normale auf die Ebene P_1 kürzer ist als die ungleiche Seite $b c$ des $\triangle a b c$, so folgt, da der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber liegt, $\sphericalangle n < \sphericalangle m$. Der Neigungswinkel ist demnach auch der kleinste Winkel, welchen eine Gerade mit den durch ihren Fußpunkt in der Ebene P_1 gezogenen Geraden bildet.

§ 47. Projektionen eines Punktes auf zwei Projektionsebenen.

Vorbemerkung. Bei den folgenden Auseinandersetzungen ist eine klare Vorstellung von den nötigen Zeichnungen die erste Voraussetzung. Zu diesem Behufe ist es gut, vor dem Studium dieses und der folgenden Paragraphe sich einen Pappendeckel oder Karton im Quadrat von etwa 10 - 12 *cm* Seitenlänge zu beschaffen, denselben in der Mitte parallel zu einer Seite zur Hälfte einzuschneiden, sodann rechtwinklig umzubiegen und sich nun die folgenden Darstellungen an der Hand dieses Behelfes zu veranschaulichen.

Will man aus der Projektion eines Punktes auf dessen Lage im Raume zurückschließen, so muß auch der Abstand des Raumpunktes von der Projektionsebene bekannt sein. Man hat dann, um z. B. in Fig. 166 die Lage des Punktes a im Raume zu erhalten, nur nötig, in a' auf die Projektionsebene eine Senkrechte zu errichten und auf dieser den Abstand aa' von a' aus aufzutragen.

Für eine größere Zahl von Punkten, wie bei größeren Linienzügen, gibt die Angabe der Abstände von der Projektionsebene leicht zu Irrungen Anlaß und ist überdies noch unbequem. Man hat deshalb zwecks Bestimmung der wahren Größe und Lage eines Raumgebildes einen anderen Weg gefunden, und zwar durch Einführung einer zweiten Projektionsebene, welche auf der zuerst angenommenen senkrecht steht. Die Richtigkeit, sowie die Vorteile dieses Vorganges für unsere Aufgabe werden aus dem folgenden ersichtlich werden.

Von den also erforderlichen zwei Projektionsebenen, Fig. 168, wird die eine zweckmäßig in horizontaler und die zweite in vertikaler Lage angenommen, so daß beide Ebenen auch aufeinander senkrecht stehen. Die Projektion auf die horizontale Ebene heißt Horizontal-Projektion oder Grundriß, und die Projektion auf die vertikale Ebene die Vertikal-Projektion oder der Aufriß. Die horizontale Ebene selbst wird die horizontale Projektionsebene oder Grundrißebene, die vertikale Ebene hingegen die vertikale Projektionsebene oder Aufrißebene genannt. Die Schnittlinie dieser beiden Projektionsebenen heißt Achse.

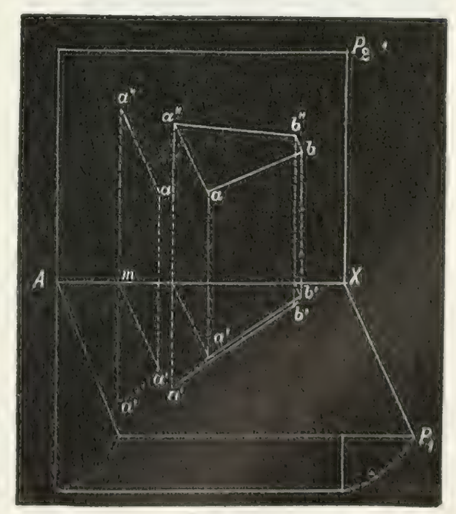


Fig. 168.

In Fig. 168 bedeutet P_1 die horizontale, P_2 die vertikale Projektionsebene und AX die Achse. Fällt man vom Raumpunkte a auf die horizontale Projektionsebene eine Senkrechte aa', so stellt der Fußpunkt dieser Senkrechten die horizontale Projektion des Raumpunktes a vor; fällt man weiters von a auf die vertikale Projektionsebene eine Senkrechte aa'', so ist der Fußpunkt dieser Senkrechten die vertikale Projektion des Raumpunktes a.

Wir behalten die Bezeichnungen P_1 für die Grundriß- und P_2 für die Aufrißebene, sowie AX für die Achse auch in der Folge bei; desgleichen werden die Horizontal- und Vertikalprojektion eines Punktes immer mit demselben Buchstaben wie der Raumpunkt bezeichnet, der Horizontalprojektion aber am Kopfe ein Strich (z. B. $a' b'$), der Vertikalprojektion hingegen zwei Striche angefügt (z. B. $a'' b''$).

Aus den beiden Projektionen a' und a'' des Punktes a läßt sich die Lage desselben im Raume wie folgt bestimmen:

1. Man errichtet in a' eine Senkrechte auf die horizontale und in a'' eine Senkrechte auf die vertikale Projektionsebene; der Schnittpunkt dieser beiden Senkrechten gibt den Raumpunkt a.

2. Man legt durch die beiden Senkrechten $a a'$ und $a a''$ eine Ebene, welche die beiden Projektionsebenen nach den Geraden $a' m$ und $a'' m$ schneidet. Letztere stehen auf der Achse AX senkrecht und bilden mit den Senkrechten $a a'$ und $a a''$ das Reckteck $a a' m a''$, in welchem der Raumpunkt a dem Schnittpunkte m gegenüber liegt. Sind daher die beiden Projektionen a' und a'' gegeben und es soll der Raumpunkt a gefunden werden, so hat man nur nötig, von a' und a'' Senkrechte auf die Achse zu fällen und aus diesen das Rechteck $a a' m a''$ zu konstruieren.

Fig. 168 bildet für die Darstellung der beiden Projektionsebenen und des Raumpunktes a sowie dessen Projektionen zur besseren Veranschaulichung des Ganzen gewissermaßen nur eine Anschauungsfigur, in welcher die beiden Projektionsebenen als unter einem rechten Winkel zueinander stehend besser ersichtlich werden. Da wir nun beim Zeichnen auf dem Papier nur eine Ebene (das Zeichenblatt) zur Verfügung haben, so denken wir uns, um dennoch beide Projektionen eines Punktes darstellen zu können, die Grundrißebene P_1 um die Achse AX so lange gedreht, bis sie mit der Erweiterung der Vertikalebene P_2 zusammenfällt. Bei dieser Drehung gelangt die Horizontalprojektion a' unter die Achse in die Verlängerung der Geraden $a'' m$, so daß sich dann die beiden Projektionsebenen und die Projektionen des Punktes a wie in Fig. 169 darstellen.

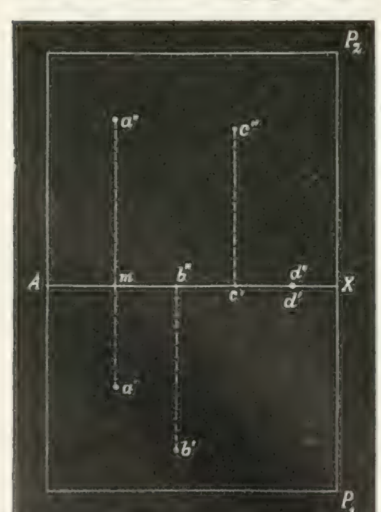


Fig. 169.

Wenn der Zeichner in der letzteren Figur die so in einer Zeichnungsebene dargestellten Projektionen eines Punktes betrachtet, so hat er sich die Grundrißebene horizontal, die Aufrißebene hingegen vertikal vor sich stehend vorzustellen. Die Lage des Raumpunktes a ist dann dadurch gegeben, daß man in a' auf die Grundrißebene eine Senkrechte errichtet und auf dieser den Abstand der Vertikalprojektion a'' von der Achse, d. i. $a'' m$, aufträgt, oder daß man die Senkrechte in a'' auf die Aufrißebene errichtet und auf dieser Senkrechten den Abstand der Horizontalprojektion von der Achse, d. i. $a' m$, aufträgt. Besonders leicht verständlich wird diese Bestimmung der wahren Lage eines Raumpunktes aus den beiden Projektionen, wenn man sich hiebei die Anschauungsfigur 168 vor Augen hält.

Nach dem Vorhergehenden sind wohl folgende Lehrsätze unschwer einzusehen:

1. Liegt ein Punkt in der Grundrißebene, so fällt er mit seiner Horizontalprojektion zusammen, seine Vertikalprojektion aber liegt in der Achse; Fig. 169, $b' b''$.

2. Ein in der Aufrißebene gelegener Punkt bezeichnet zugleich seine Vertikalprojektion, seine Horizontalprojektion hingegen liegt in der Achse; Fig. 169, $c' c''$.

3. Liegt ein Punkt in der Achse, so fallen beide Projektionen mit dem Punkte selbst zusammen; Fig. 169, $d' d''$.

§ 48. Projektion einer Strecke auf zwei Projektionsebenen.

Die Projektion einer Strecke ist durch die Projektionen ihrer Endpunkte gegeben. Die Lage der Strecke im Raume ist daher auch durch die Projektionen ihrer Endpunkte bestimmt, denn jeder der beiden Endpunkte läßt sich aus seinen Projektionen im Raume konstruieren, daher auch die Verbindungslinie der beiden Punkte, die Strecke.

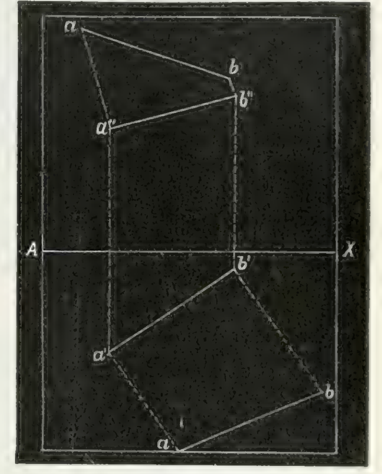


Fig. 170.

In Fig. 168 ist $a' b'$ die horizontale (der Grundriß) und $a'' b''$ die vertikale Projektion (der Aufriß) der Raumstrecke $a b$. Denkt man sich auch hier die Grundrißebene P_1 um die Achse $A X$ so lange herabgedreht, bis sie in die Erweiterung der Aufrißebene P_2 fällt, so kommt der Grundriß $a' b'$ ebenfalls unterhalb die Achse $A X$ zu liegen. Beim gewöhnlichen Zeichnen bleibt ebenfalls die Anschauungsfigur weg und es erscheinen nur die beiden Projektionen wie in Fig. 170.

Die wahre Größe der Strecke $a b$ ergibt sich, Fig. 170, durch Konstruktion des Trapezes $a' b' b a$ oder des Trapezes $a'' b'' b a$. Man führt diese Konstruktion bezüglich des Trapezes $a' b' b a$ in der Weise aus, Fig. 170, daß man in den Endpunkten a' und b' der Horizontalprojektion auf diese Senkrechte errichtet und auf den Senkrechten nun den Abstand der vertikalen Projektionen der Endpunkte von der Achse aufträgt. Die Verbindungslinie der beiden so erhaltenen Punkte gibt die wahre Länge der Strecke $a b$. Verwendet man zur Bestimmung der wahren Größe von $a b$ das Trapez $a'' b'' b a$, so werden Senkrechte auf die vertikale Projektion in deren Endpunkten a'' und b'' errichtet und von den letzteren aus die Abstände der horizontalen Projektionen a' und b' von der Achse aufgetragen.

Für die verschiedenen Lagen einer Strecke im Raume ergeben sich für deren Projektionen unter Beachtung der im § 47 gegebenen Erklärungen und eventuell an der Hand der Vorstellung mit dem umgebogenen Kartonpapier folgende Lehrsätze:

1. Ist eine Raumstrecke zu einer Projektionsebene parallel, so erscheint ihre Projektion auf diese Projektionsebene in der wahren Länge, die andere Projektion aber ist parallel zur Achse. (In Fig. 171 ist $a b$ zur Grundriß- und $c d$ zur Aufrißebene.)

2. Ist eine Strecke parallel zu beiden Projektionsebenen, d. i. parallel zur Achse, so sind auch ihre beiden Projektionen

parallel zur Achse und gleichlang mit der Raumgeraden (cf in Fig. 171).

3. Liegt eine Strecke in einer Projektionsebene, so fällt sie mit ihrer Projektion auf diese Ebene zusammen, während die andere Projektion in der Achse liegt. (In Fig. 171 liegt gh in der Grundriß-, ik in der Aufrißebene.)

4. Liegt eine Strecke in der Achse, so fällt sie mit beiden Projektionen zusammen (lm in Fig. 171).

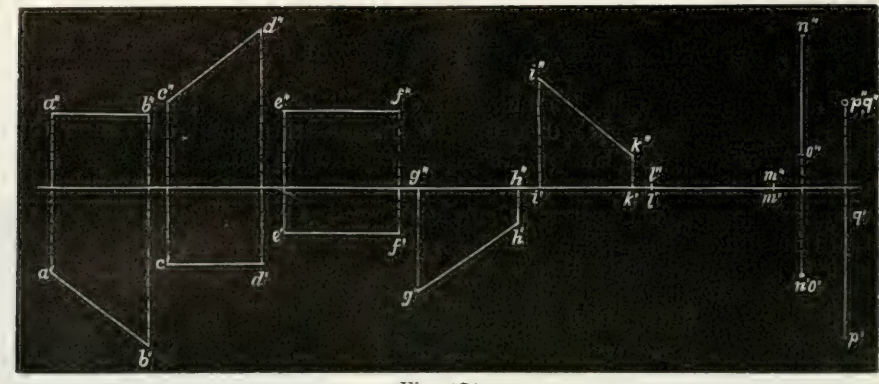


Fig. 171.

5. Steht eine Strecke senkrecht auf einer Projektionsebene, so ist ihre Projektion auf diese Ebene ein Punkt und ihre Projektion auf die andere Ebene ist senkrecht zur Achse, und mit der Raumstrecke gleich lang. (In Fig. 171 ist $no \perp$ auf der Grundriß- und $pq \perp$ auf der Aufrißebene.)

II. Kapitel.

Von den Projektionen ebener Figuren.

§ 49. Grund- und Aufriß geradliniger Figuren.

1. Begriffsfeststellung.

Die Projektion einer ebenen Figur auf eine Ebene ist durch die Projektionen ihrer Begrenzungslinien auf diese Ebene bestimmt.

Zur besseren Veranschaulichung der Projektionen von Flächen ist es vorteilhaft, die im folgenden zur Betrachtung kommenden Figuren aus Pappendeckel oder Karton auszuschneiden und sich dieselben dann unter Herbeiziehung der als Projektionsebenen dienenden Kartons*) immer vor Augen zu halten. Behufs Darstellung des Grundrisses besieht man die Raumfigur von oben senkrecht auf die Grundrißebene (Draufsicht), behufs Darstellung des Aufrisses hingegen von vorne senkrecht auf die Aufrißebene (Ansicht).

2. Erklärungen.

a Gegeben ist ein Rechteck in horizontaler Lage, dessen Längsseiten gleichzeitig parallel zur Aufrißebene sind. (Fig. 172.)

*) Vorbemerkung § 47.

Nach den Lehrsätzen des § 48 erscheinen die Begrenzungslinien des Rechteckes, also auch dieses selbst, im Grundrisse $a' b' c' d'$ (als zur Grundrißebene parallel) in der wahren Größe. Der Aufriß des Rechteckes ergibt sich als eine Strecke $a'' b'' c'' d''$, denn jede der auf der Aufrißebene senkrecht stehenden Begrenzungslinien $a d$ und $b c$ erscheint in den Projektionen auf diese Ebene nur als ein Punkt (I).

Wird nun das Rechteck um die Seite $a d$ um die Größe des $\sphericalangle m$ gedreht, so daß die beiden kürzeren Seiten $a d$ und $b c$ noch immer senkrecht zur Aufrißebene bleiben und die Längsseiten $a b$ und $c d$ ihre parallele Lage zu der letzteren Ebene beibehalten, so ändert sich die Länge des Aufrisses nicht, dagegen wird der Grundriß in der Längsrichtung verkürzt, während er die wahre Breite beibehält (II). Je größer der $\sphericalangle m$ wird, desto mehr verkürzt sich der Grundriß; wird $\sphericalangle m = 1 R$, so wird der Grundriß eine gerade Linie (III).

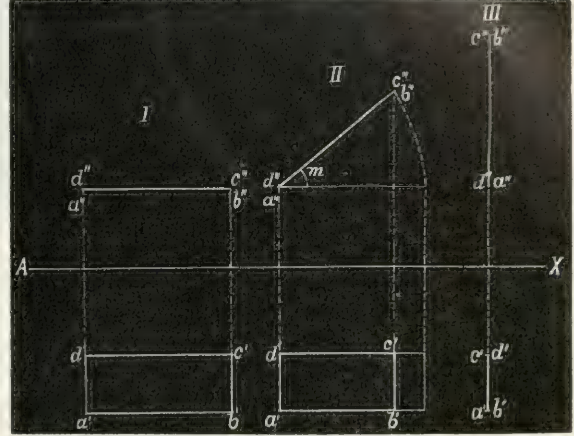


Fig. 172.

b) Gegeben ist ein Dreieck $a b c$ in der Aufrißebene, dessen eine Seite $a c$ senkrecht auf der Achse steht. (Fig. 173.)

Nach § 48 fällt der Aufriß eines Dreieckes mit dem letzteren selbst zusammen in $a'' b'' c''$, während der Grundriß $a' b' c'$ in der Achse AX liegt (I).

Dreht man das Dreieck um die Seite $a c$, wobei die letztere ⊥ zur Achse bleibt, aus der Aufrißebene heraus gegen den Beschauer zu um den $\sphericalangle m$ (II), so nimmt das Dreieck eine zur Aufrißebene geneigte Lage an, und die Höhe des Dreieckes, welche früher in $b'' d''$ in der wahren Größe erschien, wird nun im Aufriß so groß erscheinen, als die Kathete (b'') d'' eines rechtwinkligen Dreieckes ausmacht, dessen Basiswinkel m und dessen Hypotenuse die wahre Höhe $b'' d''$ ist, wie dies die im Aufrisse dargestellte Hilfskonstruktion zeigt. Wird die Drehung so weit fortgesetzt, bis das Dreieck ⊥ auf der Aufrißebene steht, so erscheinen sowohl Grundriß als auch Aufriß als auf der Achse senkrechte Strecken (III).

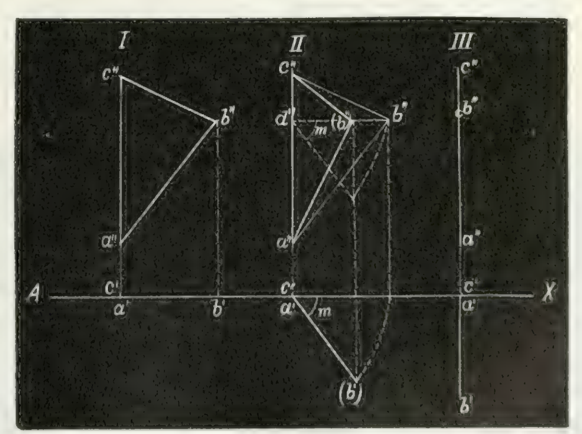


Fig. 173.

c) Gegeben ist ein Quadrat in der Grundrißebene, dessen Seiten alle zur Aufrißebene geneigt sind (Fig. 174).

Nach § 48 fällt der Grundriß $a' b' c' d'$ dieses Quadrates mit dem letzteren selbst zusammen; der Aufriß $a'' b'' c'' d''$ ist eine Strecke und liegt in der Achse (I).

Dreht man das Quadrat um die Seite $a b$ nach aufwärts um den $\sphericalangle m$ (II), so wird der Grundriß der Seiten $a' d'$ und $b' c'$ verkürzt, d. i. der Länge der horizontalen Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes gleich, dessen Hypotenuse $= a' d' = b' c'$ und dessen anliegender $\sphericalangle = m$ ist. Im Aufrisse bleibt die Seite $a'' b''$ in der Achse, die Seiten $a'' d''$ und $b'' c''$ hingegen erscheinen nach der Drehung so gehoben, daß der Abstand der Endpunkte c'' und d'' derselben von der Achse gleich der zweiten Kathete des vorhin genannten rechtwinkligen Dreieckes ist.

Das gedrehte Quadrat ist nun nicht nur gegen die Grundriß-, sondern auch gegen die Aufrißebene geneigt. Die Projektionen auf beide Ebenen erscheinen verkürzt und verschoben als Parallelogramme. Wird die Drehung so lange fortgesetzt, bis das Quadrat ⊥ auf der Grundrißebene steht (III), so erscheint der Grundriß des Quadrates

als eine Strecke von der Länge *a b*, der Aufriß als ein Rechteck von verkürzter Basis und einer mit der Raumfigur gleichlangen Höhe.

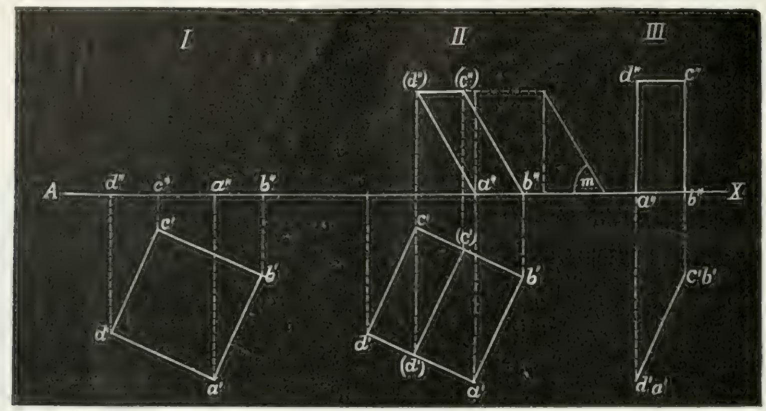


Fig. 174.

Aus den im Vorhergehenden aufgeführten Beispielen *a) b) c)*, sowie insbesondere an der Hand der Veranschaulichung mit den ausgeschnittenen Kartons werden unschwer die folgenden Lehrsätze begreiflich:

3. Lehrsätze.

a) Ist die Ebene einer Figur zu einer Projektionsebene parallel, so ist die Projektion auf diese Ebene mit der Figur kongruent, die Projektion auf die andere Projektionsebene hingegen ist eine zur Achse parallele Strecke. (Fig. 175, I, *a b c d e* zur Grundrißebene, II, *a b c d e* ‖ zur Aufrißebene.)

b) Liegt eine Figur in einer Projektionsebene, so fällt ihre Projektion auf diese Ebene mit der Figur zusammen und die

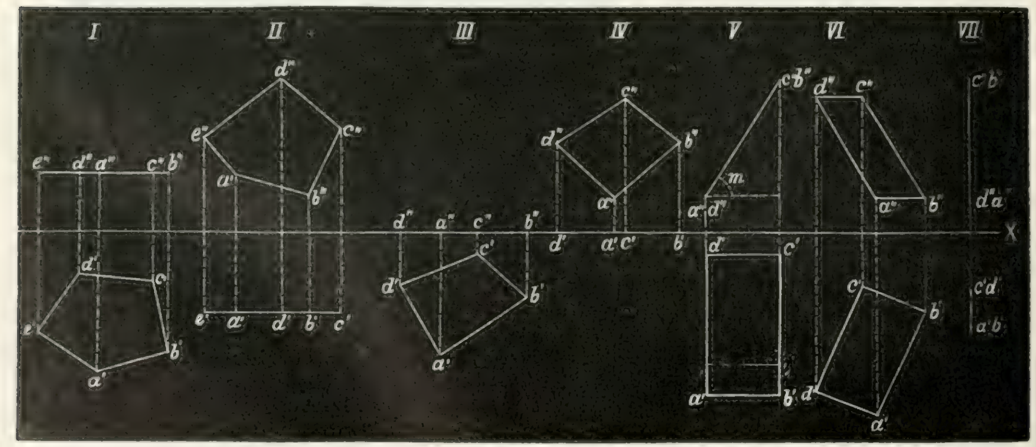


Fig. 175.

zweite Projektion liegt in der Achse. (Fig. 175, III, *a b c d* liegt in der Grundriß-, IV, *a b c d* in der Aufrißebene.)

c) Ist eine Figur gegen eine Projektionsebene geneigt, so ist ihre Projektion auf diese Ebene kleiner als die wahre Größe

dieser Figur; eine gegen beide Projektionsebenen geneigte Figur erscheint in beiden Projektionen kleiner als die gegebene Figur. (Fig. 175, V, *a b c d* ist ein Quadrat, das zur Grundrißebene unter dem ∢ *m* geneigt und zur Aufrißebene ⊥ ist; VI, *a b c d* ist ein gegen beide Projektionsebenen geneigtes Quadrat.)

d) Steht eine ebene Figur auf einer Projektionsebene senkrecht, so ist die dazugehörige Projektion eine Strecke; steht sonach die Fläche einer Figur auf beiden Projektionsebenen senkrecht, so erscheinen beide Projektionen als Strecken. (Fig. 175, VII, *a b c d* ist ein Rechteck, dessen Ebene auf beiden Projektionsebenen ⊥ steht.)

4. Aufgaben.

a) Ein Rechteck von 2·5 *cm* Länge und 2 *cm* Höhe in beiden Projektionen zu zeichnen, das parallel zur Aufrißebene und von dieser 2 *cm* entfernt ist; die Längsseiten des Rechteckes sind ∥ zur Achse.

b) Es sind die Projektionen eines gleichseitigen Dreieckes von 3 *cm* Seitenlänge zu zeichnen, das so in der Grundrißebene liegt, daß eine Seite im Abstande von 2 *cm* ∥ zur Achse ist.

c) Es sind die Projektionen eines Rechteckes von 3 *cm* Länge und 2 *cm* Breite anzugeben, das senkrecht auf der Grundrißebene steht und zur Aufrißebene unter 45° geneigt ist. Die der Achse zugekehrte Längsseite ist von der Aufrißebene 1·5 *cm*, die untere Breitseite von der Grundrißebene 1 *cm* entfernt.

§ 50. Grund- und Aufriß eines Kreises.

Für die Projektion eines Kreises gelten dieselben Lehrsätze, wie sie in § 49 unter 3, *a)* bis *d)*, aufgeführt wurden. Insbesondere wird aber hier noch eigens der Fall 3 *c)* hervorgehoben, in welchem ein Kreis gegen eine oder beide Projektionsebenen geneigt ist.

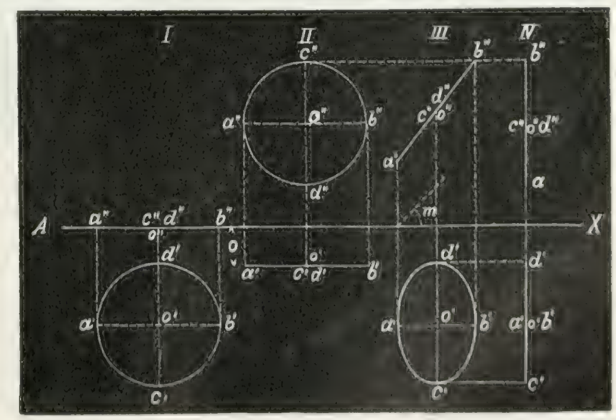


Fig. 176.

Wie sich aus der Drehung eines Kreises um einen Durchmesser, ähnlich wie in § 49, 2, *a)* bis *c)*, und aus der Veranschaulichung mit dem ausgeschnittenen Karton leicht zeigen läßt, ist die Projektion eines gegen eine Projektionsebene geneigten Kreises auf diese Ebene eine Ellipse; ist sonach die Fläche eines Kreises gegen beide Projektionsebenen geneigt, so erscheinen sowohl Grund- als Aufriß als Ellipsen.

Fig. 176 stellt die Projektionen eines Kreises in verschiedenen Lagen dar. I ist ein Kreis in der Grundrißebene, II ein Kreis, der senkrecht auf der Grundrißebene steht und zu der Aufrißebene im Abstande *o*

parallel ist, III ist ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Aufrißebene steht und gegen die Grundrißebene um den $\sphericalangle m$ geneigt ist, IV ist ein auf beiden Projektionsebenen senkrecht stehender Kreis.

III. Kapitel.

Von den Projektionen der Körper.

§ 51. Begriffsfeststellungen.

Die Projektionen eines Körpers setzen sich zusammen aus den Projektionen seiner Begrenzungsflächen.

Die beste Vorstellung von den Projektionen der Körper macht man sich in derselben Weise, wie dies schon bezüglich der Projektionen der Flächen im § 49 gesagt wurde. Man besieht demnach zwecks Darstellung des Grundrisses den Körper von oben senkrecht zur Grundrißebene, zum Zwecke der Darstellung des Aufrisses hingegen von vorne, senkrecht zur Aufrißebene. Man wird sonach die Projektionen der einzelnen Begrenzungsflächen der Körper nach den in den §§ 49 und 50 angegebenen Lehrsätzen leicht zeichnen und damit auch den Körper immer leicht darstellen können.

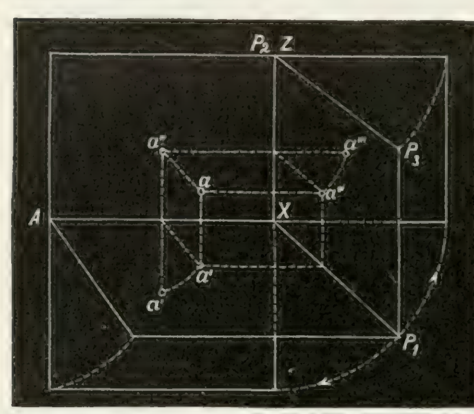


Fig. 177.

Um eine vollkommene und unzweideutige Vorstellung von einem Körper zu erlangen, genügt es aber nicht immer, denselben nur in zwei Projektionen darzustellen, sondern es ist in vielen Fällen außer dem Grundrisse und Aufrisse auch noch eine Seitenansicht von dem betreffenden Körper erforderlich. Wir denken uns diese letztere als Projektion auf eine dritte, zur Grundriß- und Aufrißebene normale Ebene P_3, Fig. 177, welche aber beim praktischen Zeichnen nicht immer wie in der genannten Anschauungsfigur dargestellt werden kann, sondern nach rechts in die Vertikalebene hineingedreht wird.

Diese neue Ebene heißt Kreuzrißebene, und jede Projektion auf dieselbe Seitenansicht oder Kreuzriß.*)

Ist von einem Körper der Kreuzriß zu entwerfen, so wird derselbe von der Seite, senkrecht auf die Kreuzrißebene, angesehen. Die Projektionen der einzelnen Eckpunkte erscheinen hiebei ganz in demselben Abstande von der verlängerten Achse AX, wie die bezüglichen Punkte des Aufrisses, so daß jedem Punkte des Aufrisses in einer horizontal gezogenen Linie der gleichnamige Punkt der Seitenansicht entspricht; Fig. 177.

Sollte in gewissen Fällen endlich mit den drei genannten Projektionen noch nicht das Auslangen gefunden werden, so denkt man

*) Den Kreuzriß eines Punktes bezeichnet man immer durch drei am Kopfe des betreffenden Buchstaben angebrachte Striche; z. B. a''', b''', c'''.

sich den betreffenden Körper an jener Stelle, welche in der Zeichnung besonders ersichtlich gemacht werden soll, gewöhnlich durch zur Grund- oder Aufrißebene parallele Ebenen, durchschnitten und die durch einen solchen Schnitt entstehenden Begrenzungsfiguren extra verzeichnet. Man bezeichnet eine solche Darstellung kurz als Schnitt oder Profil und spricht von einem Längenschnitt oder Längenprofil, wenn man sich einen Körper der Länge nach, und von einem Querschnitt oder Querprofil, wenn man sich einen Körper senkrecht auf die Längsrichtung durchschnitten und die den betreffenden Schnitt bezeichnende Figur dargestellt denkt. Wir werden im folgenden an einigen geeigneten Beispielen auf die ebenen Schnitte von Körpern zurückkommen und an den betreffenden Stellen die nötigen Erörterungen geben.

§ 52. Von den Projektionen der einfachen Körper.

1. Das Prisma.

a) Es sind Grund-, Auf- und Kreuzriß eines vierseitigen geraden Prisma zu zeichnen, dessen Basis in der Grundrißebene liegt und dessen

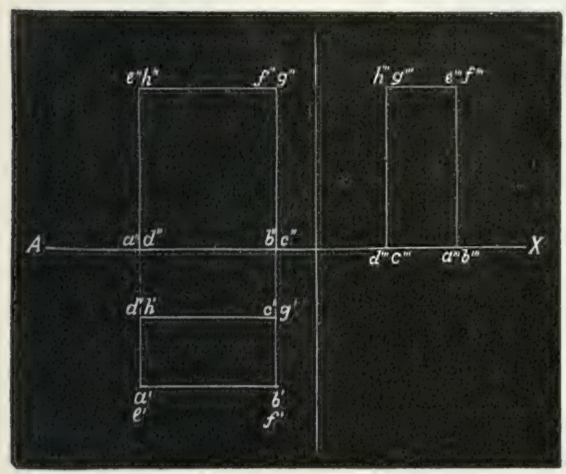


Fig. 178.

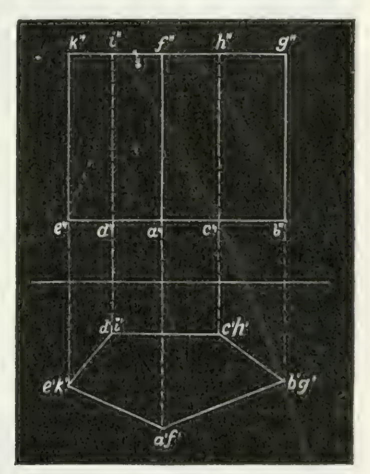


Fig. 179.

zwei kurze Basiskanten auf der Aufrißebene senkrecht stehen. (Fig. 178.)

Der Grundriß (Draufsicht) des Prisma erscheint als ein Rechteck, das mit der Basis des Prisma $\cong$ ist. Der Aufriß (Ansicht) des Prisma ist ebenfalls ein Rechteck von der Größe einer großen Seitenfläche des Prisma. Da die Basis des letzteren in der Grundrißebene liegt, so erscheint der Aufriß der Basis als Strecke in der Achse. Der Kreuzriß (Seitenansicht) erscheint auch als ein Rechteck, das mit einer kleinen Seitenfläche des Prisma $\cong$ ist. Die Veranschaulichung eventuell an einem Modell macht dies sofort verständlich.

b) Es sind Grund- und Aufriß eines geraden fünfseitigen Prisma zu zeichnen, dessen Basis parallel zur Grundrißebene und von dieser 1 *cm* entfernt liegt. (Fig. 179.)

Im Grundrisse (Draufsicht) erscheint von dem gegebenen Prisma nur die Basisfläche, und zwar in der wahren Größe. Im Aufrisse erscheint

die Grundfläche, weil sie parallel zur Grundrißebene ist, in einem Abstande von 1 *cm* als zur Achse parallele Strecke; aus dem gleichen Grunde stellt sich die obere Begrenzungsfläche im Aufrisse als Strecke dar. Die Längskanten des Prisma, welche senkrecht auf der Grundrißebene stehen, erscheinen im Aufrisse als zur Achse senkrechte Strecken, welche so lang sind, wie die wahre Höhe des Prisma. Die nicht sichtbaren Kanten, welche sich dadurch ergeben, daß man das Prisma von vorne anschaut, werden gestrichelt, die sichtbaren hingegen voll ausgezogen.

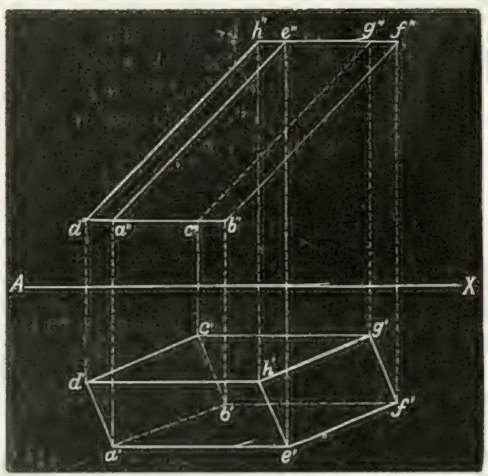


Fig. 180.

c) Es sind Grund- und Aufriß eines vierseitigen schiefen Prisma zu zeichnen, dessen Basis im Abstande von 1 *cm* zur Grundrißebene parallel ist und dessen Seitenkanten 3·5 *cm* lang und zur Grundrißebene 45⁰ geneigt, zur Aufrißebene aber parallel sind. (Fig. 180.)

Die Grundrisse der beiden Grundflächen erscheinen in der wahren Größe, die Aufrisse derselben als zur Achse parallele Strecken. Nachdem die Seitenkanten parallel zur Aufrißebene sind, so stellen sich dieselben im Aufrisse in wahrer Länge, im Grundrisse aber verkürzt und parallel zur Achse dar. Der Neigungswinkel der Seitenkanten zur Grundrißebene erscheint im Aufrisse im wirklichen Ausmaße.

2. Die Pyramide und der Pyramidenstutz.

a) Es sind Grund- und Aufriß einer geraden quadratischen Pyramide zu zeichnen, deren Basis in der Grundrißebene liegt; weiters ist der Schnitt dieser Pyramide durch eine zur Grundrißebene parallele und von dieser 1·8 *cm* entfernte Ebene in beiden Projektionen zu verzeichnen. (Fig. 181.)

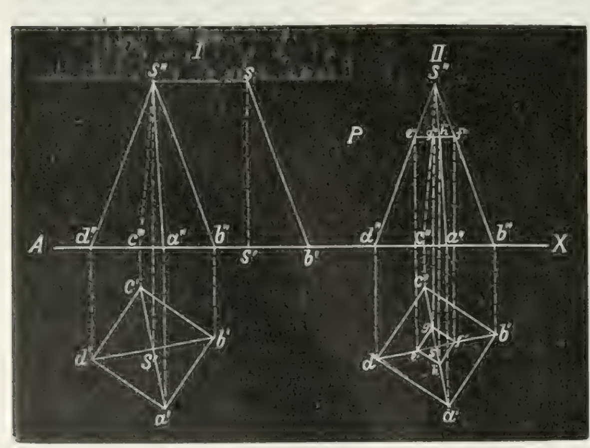


Fig. 181.

Im Grundrisse (Draufsicht) erscheint die wahre Größe der Grundfläche, im Aufrisse (Ansicht) die wahre Größe der Höhe. Die Seitenkanten sind gegen beide Ebenen geneigt und erscheinen daher in beiden Projektionen verkürzt. Die wahre Länge einer Seitenkante ergibt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete der Grundriß dieser Seitenkante und dessen zweite Kathete die Höhe der Pyramide ist (I).

Wird die Pyramide durch eine zur Grundrißebene parallele Ebene geschnitten, so muß auch die entstehende Schnittfigur parallel zur Grundrißebene sein. Es erscheint daher die Schnittfigur im Grundrisse in der wahren Größe, im Aufrisse hingegen als eine zur Achse parallele Strecke, welche denselben Abstand 1·8 *cm* von der Achse hat, wie die horizontale Schnittebene von der Grundrißebene. Projiziert man die Schnittpunkte des Aufrisses der Seitenkanten mit dem Aufrisse der Schnittfigur herab auf die Grundrisse der Seitenkanten, so erhält man den Grundriß der Schnittfigur (Fig. 181, II).

b) Es sind Grund- und Aufriß eines geraden quadratischen Pyramidenstutzes zu zeichnen, dessen untere Grundfläche in der Grundrißebene liegt und dessen Höhe = 1·8 *cm* ist.

Die Lösung dieser Aufgabe findet sich in Fig. 181, II. Die untere und obere Grundfläche erscheinen im Grundrisse, die Höhe im Aufrisse in der wahren Größe. Die wahre Größe der Seitenkanten findet man ähnlich wie vorhin in 2 *a)* als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete der Grundriß der Seitenkante und dessen zweite Kathete die Höhe des Pyramidenstutzes ist.

3. Der Zylinder.

a) Es sind Grund- und Aufriß eines geraden Zylinders zu zeichnen, dessen Basis in der Grundrißebene liegt. (Fig. 182.)

Der Grundriß (Draufsicht) des Zylinders erscheint als ein Kreis von der wahren Größe der Grundfläche; die Höhe erscheint im Aufrisse in der wahren Größe.

b) Man hat den Grund- und Aufriß eines schiefen Zylinders zu zeichnen, dessen Grundfläche im Abstande von 1 *cm* zur Grundrißebene parallel ist und dessen Achse 3·5 *cm* lang und zur Grundrißebene 45° geneigt, zur Aufrißebene aber parallel ist.

Diese Aufgabe ist dieselbe wie in § 52, 1 *c)*; an Stelle des Rechteckes als Grundflächen erscheinen nur zwei Kreise, und an Stelle der vier Kanten nur zwei Begrenzungslinien.

Fig. 182.

4. Der Kegel und der Kegelstutz.

a) Es sind Grund- und Aufriß eines geraden Kegels zu zeichnen, dessen Grundfläche in der Grundrißebene liegt.

Im Grundrisse erscheint die wahre Größe der Grundfläche, und der Aufriß gibt die wahre Größe der Höhe und der Seite des Kegels an. (Fig. 183.)

b) Es sind Grund- und Aufriß eines geraden Kegelstutzes zu zeichnen, dessen Grundfläche in der Grundrißebene liegt. (Fig. 184)

Fig. 183.

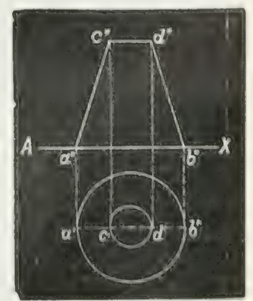


Fig. 184.

Im Grundrisse erscheint die Grundfläche und Schnittfläche, im Aufrisse die Höhe in der wahren Größe.

5. Aufgaben.

a) Es sind Grund- und Aufriß eines Würfels mit der Kantenlänge von 4 *cm* zu zeichnen, welcher mit einer Seitenfläche an der Aufrißebene (befestigt) anliegt.

b) Man zeichne im Grund- und Aufrisse einen geraden Pyramidenstutz, dessen Basis im Abstande von 2 *cm* parallel zur Grundrißebene liegt und ein reguläres Sechseck mit einer Seitenlänge von 2·2 *cm* ist und dessen Höhe 4·5 *cm* beträgt; wie groß ist die wirkliche Länge einer Seitenkante?

c) Das Modell für einen zweiseitig behauenen Balken ist 8 *cm* lang und hat 1·5 *cm* Durchmesser. Die Bezimmerung ist so vorgenommen worden, daß die entstandene ebene Fläche ebenso breit ist, als der Radius des Grundflächenkreises lang ist. (Fig. 185.) Es ist der Grund- und Aufriß, sowie die Seitenansicht dieses Modelles zu zeichnen, wenn dasselbe in der Grundrißebene steht.

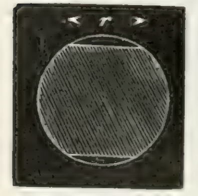


Fig. 185.

d) Man zeichne Grund- und Aufriß eines geraden Kegels von 5 *cm* Höhe und einem Grundflächendurchmesser von 2·2 *cm*, wenn die Grundfläche im Abstande von 1 *cm* parallel zur Aufrißebene liegt.

§ 53. Projektionen von Körperzusammensetzungen.

1. Es sind Grund-, Aufriß und Schnitt senkrecht zur Grund- und Aufrißebene eines regelmäßigen Schotterprisma zu verzeichnen. (Fig. 186.)

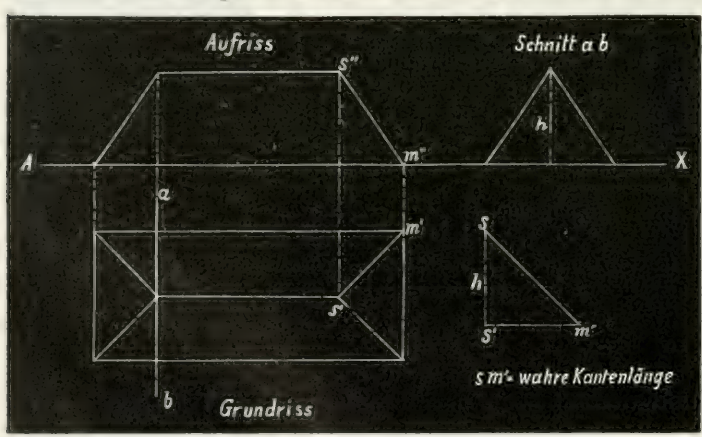


Fig. 186.

Die Basis des Schotterprisma erscheint im Grundrisse, die Höhe im Aufrisse in der wahren Größe.

Wird der Schotterhaufen durch die Vertikalebene *a b* geschnitten, so erscheint eine dreieckige Schnittfigur, deren Basis der Breite des Schotterhaufens und deren Höhe der Höhe des Schotterhaufens entspricht.

Die wahre Länge der Kante *m s* läßt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes bestimmen, dessen horizontale Kathete der Kantengrundriß *m' s'* und dessen zweite Kathete die Höhe des Schotterprisma ist.

2. Es sind Grund- und Aufriß einer sogenannten bündigen Überplattung zu zeichnen, das ist zweier rechtwinklig übereinander gelegter Balken, die so ausgeschnitten sind, daß ihre oberen Flächen eine Ebene bilden.

Zur besseren Veranschaulichung sind die Balken in I vorerst perspektivisch dargestellt. II gibt den Grundriß der aufeinander gelegten Balken und III den Aufriß. In letzterem sieht man die dem Auge zugekehrten Längsflächen ganz, von den senkrecht damit verbundenen Balken hingegen nur die Hirnflächen (Querschnittsflächen).

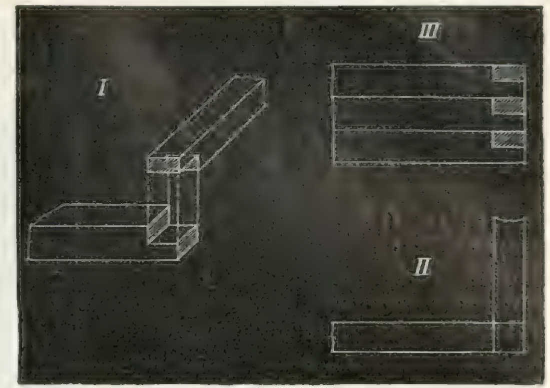


Fig. 187.

3. Es ist ein hölzernes Brückenjoch, bestehend aus sechs Jochfüßen (Piloten), einem Jochholm und Zangenverstrebungen im Aufrisse und in der Seitenansicht darzustellen. (Fig. 188.)

I zeigt den Aufriß mit 6 fest in den Boden eingerammten Holzpiloten als Jochfüßen *a*, welche in den Jochholm *b* eingelassen sind. *c* sind vier horizontale, *d* dagegen zwei schiefe Zangenverstrebungen. Beide Verstrebungen *c* und *d* erscheinen im Aufriß in der wahren Größe. In der Seitenansicht II sieht man von den horizontalen Zangen nur die Hirnflächen, während die diagonalen Zangen bedeutend verkürzt erscheinen. Die Verbindung der Zangen mit den Jochen durch Schrauben ist aus I und II genau ersichtlich.

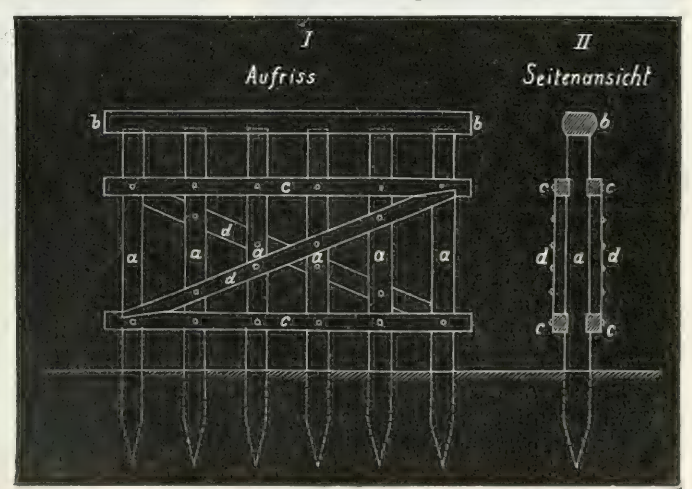


Fig. 188.

4 Eine Spaltaxt ist im Aufrisse und in der Seitenansicht darzustellen. (Fig. 189.)

I stellt den Aufriß, II die Seitenansicht dar.

5. Eine sogenannte Fußbrücke für das Aufschlichten von Brennholzscheitern an einem feuchten Orte ist im Grund- und Aufrisse zu zeichnen. (Fig. 190.)

Im Aufrisse I erscheinen die Längsscheiter in der wahren Länge und Höhe, die Querscheiter hingegen im Hirnschnitte. Im Grundrisse II erscheinen die Querscheiter in der

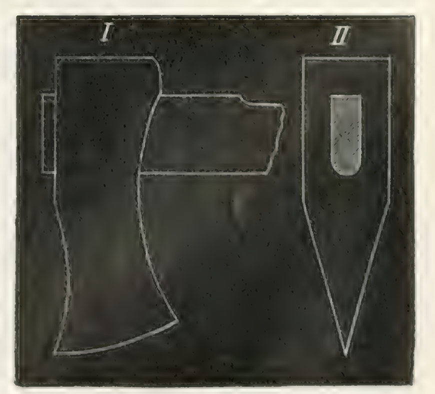


Fig. 189.

wahren Länge und Breite, die Längsscheiter hingegen verkürzt, aber in der wahren Breite.

6. Eine sogenannte Riegelwand (Fachwand aus Holz) ist im Aufrisse und in einem Horizontalschnitte darzustellen. (Fig. 191.)

Eine Riegelwand ist ein Balkengerippe, welches auf einer Untermauerung steht und außen meist eine Verkleidung (Verschalung) von Brettern erhält. Der Aufriß zeigt die Untermauerung *u* und den Schweller *a*, die in den letzteren eingezapften vertikalen Bundsäulen *b* (in Entfernungen von 1 *m*), die Pfette *c*, welche von den Säulen getragen wird und dieselben verbindet, endlich die Riegel *d*, welche in den Säulen beiderseits eingezapft werden. Das zweite Fach von einer Riegelwand trägt die

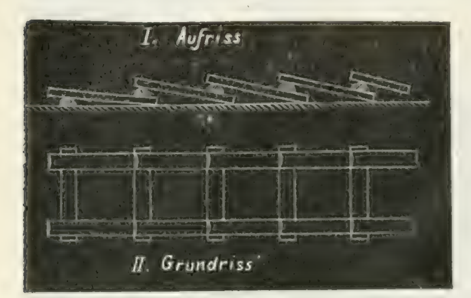


Fig. 190.

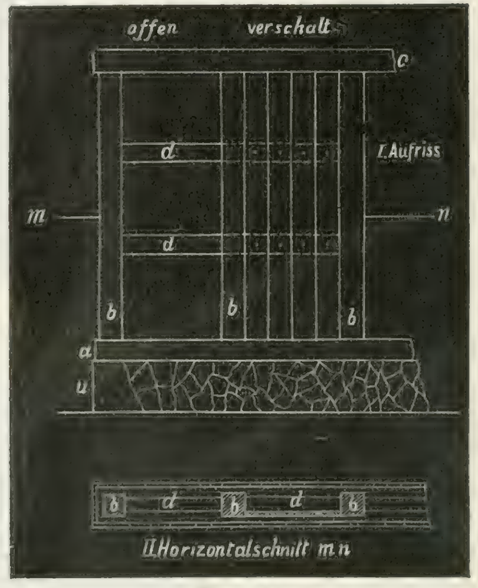


Fig. 191.

durch Nägel festgehaltene Bretterverschalung; das erste Fach ist unverschalt gelassen worden.

Wird die Riegelwand in *mn* horizontal durchschnitten, so zeigt dieser Schnitt (als Draufsicht) die wahre Stärke der Untermauerung, die Breite und Länge des Schwellers, die wahre Querfläche (Hirnfläche) der Bundsäulen, die Riegel in ihrer wahren Breite und Anordnung in den Säulen und endlich die Hirnflächen der Verschalung.

III. Teil.

Praktische Geometrie.

§ 1. Begriff und Einteilung.

Die praktische Geometrie, auch Feldmeßkunde oder niedere Geodäsie genannt, hat die Aufgabe, unter Anwendung der Lehrsätze der Geometrie und mit Zuhilfenahme verschiedener Geräte und Instrumente durch Messung die Gestalt und Größe kleinerer Teile der Erdoberfläche oder die gegenseitige Lage einzelner Punkte derselben zu bestimmen und auf dem Papiere bildlich zu verzeichnen.

Sie zerfällt in die Flächenmeßkunde und Höhenmeßkunde.

Die Flächenmeßkunde hat die Aufgabe, die Gestalt und den Flächeninhalt der Grundstücke genau zu ermitteln und eine bildliche Darstellung derselben zu liefern.

Die Höhenmeßkunde beschäftigt sich mit der Ermittlung der Höhenunterschiede zweier oder mehrerer Punkte und ihrer ziffermäßigen und bildlichen Darstellung.

I. Abschnitt.

Die Flächenmeßkunde.

§ 2. Grundlegende Bemerkungen.

Das Ausmitteln der Gestalt eines vorliegenden Grundstückes wird das Aufnehmen, und die vollkommen ausgeführte Zeichnung der Aufnahme ein Plan oder eine Karte desselben genannt. Der Plan einer Aufnahme wird auf einem Zeichenblatte, also auf einer ebenen Fläche, angefertigt. Das aufzunehmende Grundstück liegt aber in den seltensten Fällen seiner ganzen Ausdehnung nach in einer Ebene, sondern es nehmen die Begrenzungslinien zumeist ganz verschiedenartige Neigungen zueinander ein. Sollen dieselben aber dennoch auf der Papierebene zusammenhängend als Bild des Grundstückes verzeichnet werden, so ist dies nur dadurch möglich, daß man das Grundstück auf eine Ebene in derselben Weise projiziert, wie man die einzelnen Körper (siehe Seite 204) als Projektionen darstellt. Als Projektionsebene nimmt man am einfachsten eine horizontale Ebene an, d. i. eine solche, welche tangential zur Erdkugel an der Stelle der zu vermessenden Fläche liegt.

Es ergibt sich somit als Darstellung eines Teiles der Erdoberfläche, d. i. eines Grundstückes, immer seine Horizontalprojektion oder sein Grundriß.*)

Daraus folgt, daß sämtliche Begrenzungsstrecken nicht schief, sondern horizontal gemessen werden müssen und daß ebenso von den Winkeln die Horizontalprojektionen in der Natur zu bestimmen sind. Die durch Messung gefundenen Längen der einzelnen Begrenzungsstrecken sind daher in der Regel kürzer als die schiefen Längen in der Natur, ausgenommen sie liegen horizontal, in welchem Falle sie dann dieselbe Länge haben, wie ihre horizontale Projektion. Aus diesem Grunde nennt man die horizontale Projektion einer Grenzstrecke auch die auf den Horizont reduzierte Strecke oder kurzweg reduzierte Strecke. In gleicher Weise werden auch die bei der Vermessung der Grundstücke ermittelten Polygonwinkel als auf den Horizont reduzierte Winkel bezeichnet.

Man könnte glauben, daß die Aufnahme der Horizontalprojektion für die Darstellung von Grundstücken keine Berechtigung habe, denn man erhält ja jede schiefe Fläche in der Zeichnung nicht in der wirklichen Größe, sondern kleiner als das wirkliche Ausmaß. Dem gegenüber ist aber zu bedenken, daß die Pflanzen nicht senkrecht auf die schiefe Fläche, sondern immer in der vertikalen Richtung erwachsen, daß also auf einer schiefen Fläche theoretisch auch nicht mehr Pflanzen, insbesondere Baumpflanzen sind, als auf einer horizontalen. Außerdem erfolgt ja auch die Besteuerung von Grund und Boden nicht nach der Fläche allein, sondern auch nach der Güte des betreffenden Grundstückes, während anderseits beim Verkaufe die geringer geneigten Flächen immer einen höheren Preis erlangen, als stark geneigte.

I. Kapitel.

Von den Maßen und Maßstäben.**)

§ 3. Die Maße.

Wenn man von einem Grundstücke die Gestalt und Größe ermitteln will, so muß man die nötigen Bestimmungsstücke desselben messen. Die Grundlage für das Messen bilden die Maße. Messen heißt untersuchen, wie oft ein als Einheit angenommenes Maß in der zu messenden Größe enthalten ist. Ist z. B. die Entfernung zweier Grenzsteine 10·5 *m*, so heißt das, daß man einen Meterstab 10 und $\frac{1}{2}$ mal anlegen muß, um vom ersten bis zum zweiten Grenzsteine zu gelangen. Bei jeder Messung muß daher von einer Einheit ausgegangen werden, welche jedesmal eine andere sein muß, je nachdem Strecken, Winkel, Flächen etc. gemessen werden sollen.

I. Längenmaße.

a) Das metrische Längenmaß. Die Einheit ist das Meter *(m)*.

b) Das alte Wiener Längenmaß. Die Einheit ist die Klafter (°).

---

*) Die Ausdehnung der als Projektionsebene angenommenen Horizontalebene, also auch der Größe des zu vermessenden Grundstückes, kann man nur soweit annehmen, als sich dieselbe bei der ungeheueren Größe der Erdoberfläche so an die letztere anschmiegt, daß man in diesem Umkreise die Krümmung der Erdoberfläche vernachlässigen und das betreffende Flächenstück als eben ansehen kann. Eine Berechnung zeigt, daß diese Voraussetzung bis zu einer Ausdehnung von vielen Quadratkilometern zutrifft.

**) Dieser Gegenstand wurde bereits in der Arithmetik und Geometrie, soweit er dortselbst in Betracht kommt, behandelt. Wir verweisen deshalb auf die bezüglichen Paragraphe und fassen hier nur das für die Vermessungskunde besonders Wichtige zusammen.

Wichtige Umwandlungsfaktoren vom alten ins neue Längenmaß und umgekehrt: $1^0 = 1{\cdot}896484\,m$, $1\,m = 0{\cdot}527292^0 = 3{\cdot}163750'$.

II. Flächenmaße.

a) Das metrische Flächenmaß. Die Einheit des Bodenflächenmaßes ist das Hektar *(ha)*, für kleinere Grundstücke das Ar *(a)*. Bei den kleinsten Bodenflächen (Bauplätzen) dient das Quadratmeter *(m^2)* als Einheit.

b) Das alte Bodenflächenmaß. Die Einheit desselben ist das Joch *(J)* = 1600 Quadratklafter ($\square^0$), für kleinere Bodenflächen (Bauflächen) die Quadratklafter ($\square^0$).

Wichtige Umwandlungsfaktoren vom alten ins neue Flächenmaß und umgekehrt: $1\,J = 0{\cdot}575464\,ha$; $1\,ha = 1{\cdot}737727\,J$.

Anmerkung: In Tirol wird öfter noch nach Jauch gerechnet. 1 Jauch hat 1000 Tiroler Quadratklafter = $1117\frac{1}{4}$ Wiener Quadratklafter; fälschlich rechnet man hie und da 1 Jauch auch bloß zu 1000 Wiener Quadratklafter.

III. Winkelmaße.

a) Alte Teilung oder Sexagesimalteilung. $1\,R = 90^0$, $1^0 = 60'$, $1' = 60''$.

b) Neue Teilung oder Zentesimalteilung. $1\,R = 100^0$, $1^0 = 100'$, $1' = 100''$.

Umwandlungsfaktoren vom alten ins neue Winkelmaß und umgekehrt: $1^0\,a.\,T. = \frac{100}{90} = \frac{10^0}{9}\,n.\,T.$, $1^0\,n.\,T. = \frac{90}{100} = \frac{9^0}{10}\,a.\,T.$

Sollte bei den Längenmaßen für ungefähre Messungen (oder Schätzungen) das Schrittmaß in Anwendung kommen, so rechnet man 4 Schritte (Zeichen = $^{\times}$) zu 3 Meter, wonach also 1 Schritt = $0{\cdot}75\,m$ und $1\,m = 1{\cdot}33^{\times}$.

Wiederholungsaufgaben aus der Arithmetik § 8 und 15.

§ 4. Die Maßstäbe.

I. Natürliche Maßstäbe.

Zum Messen der in der Natur vorhandenen Längen dienen Geräte, welche die Maßeinheit in natürlicher Größe entweder nur einmal oder öfter aufgetragen und zumeist auch noch Unterabteilungen der Maßeinheit enthalten. Wir nennen solche Geräte im allgemeinen natürliche Maßstäbe und werden die wissenswerten Formen derselben im II. Kapitel kennen lernen.

II. Verjüngte Maßstäbe.

Beim Aufzeichnen eines vermessenen Grundstückes kann es sich nicht darum handeln, dasselbe in seinen Naturmaßen darzustellen. Man wird vielmehr nur eine verkleinerte Zeichnung von jedem in der Natur aufgenommenen Grundstücke anfertigen können, die mit der Figur in der Natur vollkommen ähnlich ist. Hiernach wird jede Länge in der Zeichnung nur einen bestimmten Teil von der bezüglichen Länge in der Natur betragen, während alle Winkel gleich jenen in der Natur sind.

Wir bezeichnen die Ausmaße, in denen die einzelnen Längen in der Zeichnung erscheinen, als verjüngte (verkleinerte) Maße und nennen das Verhältnis, in welchem jede Strecke in einer Zeichnung zu der entsprechenden Strecke in der Natur steht, das Verjüngungsverhältnis. Ist 1 *m* in der Zeichnung gleich 2880 *m* in der Natur, so ist das Verjüngungsverhältnis 1 : 2880 oder $\frac{1}{2880}$.

Um zu erfahren, wieviel beispielsweise 28·5 *m* Naturmaß in dem Verjüngungsverhältnisse 1 : 2880 in der Zeichnung ausmachen, hat man folgendermaßen zu schließen: 2880 *m* in der Natur sind 1 *m* auf dem Papiere; daher ist 1 *m* in der Natur $\frac{1}{2880}$ *m* auf dem Papiere, und 28·5 *m* in der Natur $\frac{1}{2880} . 28·5 = 0·00989\ m = 9·89\ mm$ auf dem Papiere. Diesen Vorgang könnte man für jede in der Natur gemessene Länge einschlagen, um die Größe der verjüngten Strecke zu erhalten und die letztere sodann auf einem nach Zentimeter und Millimeter genauestens geteilten Meterstabe mit dem Zirkel abzunehmen und in die Karte zu übertragen.

Zum Zwecke der Vermeidung dieser umständlichen Rechnungsarbeit bedient man sich der sogenannten verjüngten oder Verjüngungsmaßstäbe. Es sind dies solche Maßstäbe, auf denen die Längeneinheiten



Fig. 192

in entsprechender Verjüngung (beim Metermaße die verjüngten Meter) sowie zumeist auch Teile dieser Einheiten aufgetragen sind, so daß man ohne jede Rechnung imstande ist, die verlangten Längen direkt in der zugehörigen Verjüngung auf dem Maßstabe abzugreifen.

Man unterscheidet einfache Verjüngungsmaßstäbe und Transversalmaßstäbe.

1. Fig. 192 stellt einen einfachen Verjüngungsmaßstab für das Verjüngungsverhältnis 1 : 1000 vor. 1 verjüngtes Meter besitzt hiebei die wahre Länge von 1 *mm*.*) Die Teilung von 10 zu 10 *m* verjüngten Maßes geht von dem angenommenen Nullpunkte nach rechts, jene von Meter zu Meter vom Nullpunkt nach links. Will man auf diesem Maßstabe z. B. 12 *m* mit dem Zirkel abnehmen, so setzt man die eine Zirkelspitze in den Punkt 10 und öffnet den Zirkel bis zum Punkte 2 nach links. Ist die Länge 33·6 *m* in den Zirkel zu nehmen, so setzt man die erste Zirkelspitze bei 30 ein und öffnet den Zirkel bis zu jenem Punkte zwischen 3 und 4, der schätzungsweise von 3 gegen 4 gerechnet 0·6 eines verjüngten Meters ausmacht.

2. Transversalmaßstäbe. Die einfachen Verjüngungsmaßstäbe sind für genaue Abmessungen unzureichend, denn aus dem vorhergehenden Beispiele ersehen wir, daß, um Dezimeter (Zehntel) im verjüngten Maße abzunehmen, schon eine Schätzung nach dem Augenmaße platzgreifen

*) Schluß: 1000 *m* in der Natur entsprechen 1 *m* auf dem Papiere, folglich entspricht 1 *m* Naturmaß $\frac{1}{1000}\ m = 1\ mm$ auf dem Papiere.

muß. Ist die Verjüngung eine weitgehende, so kann es dahin kommen, daß man beim Abgreifen selbst Meter schätzungsweise beurteilen muß. Man konstruiert deshalb zur Erreichung einer größeren Genauigkeit anstatt der einfachen Verjüngungsmaßstäbe sogenannte Transversalmaßstäbe, deren Einrichtung und Konstruktion im folgenden an der Hand einiger Beispiele und der daraus folgenden Regeln näher erörtert werden wird.

A. Es ist ein Transversalmaßstab für das Verjüngungsverhältnis 1:1000 zu zeichnen, auf welchem man ganze Dezimeter (Naturmaß) als verjüngtes Maß noch genau abgreifen kann.

In dem verlangten Maßstabe entsprechen 1000 *m* Naturmaß einem Meter in der Verjüngung; es ist daher 1 *m* in der Natur gleich $\frac{1}{1000}$ *m* oder 1 *mm* am Papier. Damit man noch kleinere Teile (also Dezimeter der Natur, d. i. Zehntelmillimeter am Papier) abgreifen könne, bedient man sich folgender Konstruktion: Denkt man sich über der Länge von 1 *m* verjüngten Maßes $= ab$,*) Fig. 193, ein rechtwinkliges Dreieck von beliebiger Höhe verzeichnet, die Kathete bc in 10 gleiche Teile geteilt und durch die einzelnen Teilpunkte zu ab Parallele gezogen, so ist das $\triangle\, bca \sim \triangle\, 9c9' \sim \triangle\, 8c8' \sim \triangle\, 7c7' \ldots . \sim \triangle\, 1c1'$, weil in allen Dreiecken die Winkel gleich sind. Nachdem nun die Länge $c1 = \frac{1}{10} bc$, $c2 = \frac{2}{10} bc$, $c3 = \frac{3}{10} bc \ldots . . c9 = \frac{9}{10} bc$ ist, so ist auch $1'1 = \frac{1}{10} ab$, $2'2 = \frac{2}{10} ab$, $3'3 = \frac{3}{10} ab \ldots 9'9 = \frac{9}{10} ab$; d. h. wir greifen mit einem Zirkel in $1'1 \ldots \frac{1}{10}$, in $2'2 \ldots \frac{2}{10}$, ... in $9'9 \ldots \frac{9}{10}$ des verjüngten Meters, entsprechend 1 *dm*, 2 *dm*, ... 9 *dm* in der Natur, auf dem Papiere ab.

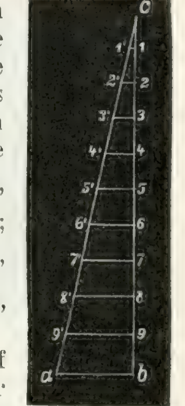


Fig. 193.

Einen vollständigen Maßstab konstruiert man auf dieser Grundlage wie folgt: *a)* Man trägt, Fig. 194, auf einer Geraden AB die Länge von 11 *cm* auf und teilt diese in 11 Teile; ein solcher Teil beträgt dann 10 *mm*, d. i. 10 verjüngte Meter,**) entsprechend 10 *m* in der Natur. *b)* Hierauf errichtet man in den einzelnen Teilpunkten Senkrechte auf die Gerade AB und zieht zu der letzteren in einem entsprechenden, aber beliebigen Abstande eine Parallele CD. *c)* Nun unterteilt man den ersten Teil auf beiden Linien AB und CD in 10 gleiche Teile, wovon jeder = 1 verjüngtes Meter. *d)* Alsdann teilt man auch die Linie AC in 10 gleiche Teile und zieht in den Teilungspunkten Parallele zu AB. *e)* Hierauf beziffert man den Maßstab von der Nullinie des in Millimeter, d. i. in verjüngte Meter geteilten Faches in dem letzteren nach links mit 1, 2, 3, 4, 5, ... 10, in den 1 *cm*, d. i. 10 verjüngte Meter haltenden Fächern dagegen mit 10, 20, 30, 40, ... 100 *m* nach rechts. *f)* Um endlich Zehntel von 1 *m* abmessen zu können, zieht man in dem nach verjüngten

*) Zur besseren Veranschaulichung ist die Strecke ab vergrößert angenommen worden.

**) Man trägt deshalb auf einmal 11 *cm* als eine Strecke auf und unterteilt dieselbe erst in Zentimeter, um die durch das Auftragen von einzelnen Zentimetern unvermeidliche Anhäufung von Fehlern zu umgehen, denn es ist klar, daß, indem 1 *cm* nacheinander 11mal aufgetragen wird, ein beim Abgreifen eines Zentimeters gemachter Fehler am Schlusse sich verelffacht, während man den Fehler, der beim Abgreifen der ganzen 11fachen Länge gemacht wird, durch deren Unterteilung auf den 11ten Teil herabdrückt. Man arbeitet also bei solchen Dingen immer vom Großen ins Kleine.

Metern geteilten Fache von 0 oben nach 1 unten, 1 oben nach 2 unten..., 9 oben nach 10 unten schiefe Gerade, die sogenannten Transversalen, und beziffert die zu AB und CD gezogenen Parallellinien von oben nach unten mit 1 bis 9. Hiedurch erhält man den vollständigen Maßstab, der wegen der schiefen Teilungslinien als Transversalmaßstab bezeichnet wird.

Will man beispielsweise 0·6 *m* abmessen, so muß der Zirkel von 6—*a* geöffnet werden. Die Länge von 6·8 *m* ist gegeben durch die Linie 8—*b*, denn es kommt zu der zwischen den parallelen Transversalen 0 und 6 gegebenen Strecke noch das Stück *c* 8 hinzu, welches 0·8 des verjüngten Meters ist. Sollen 26·4 *m* abgegriffen werden, so setzt man den Zirkel auf die Vertikallinie 20 in *d* ein und öffnet ihn bis *e*, dann hat man

von *d* bis 4 . . . . 20·0 *m*
„ 4 „ *f* . . . . 0·4 *m*
„ *f* „ *e* . . . . 6·0 *m*
zusammen also von *d* bis *e* . . . . 26·4 *m*

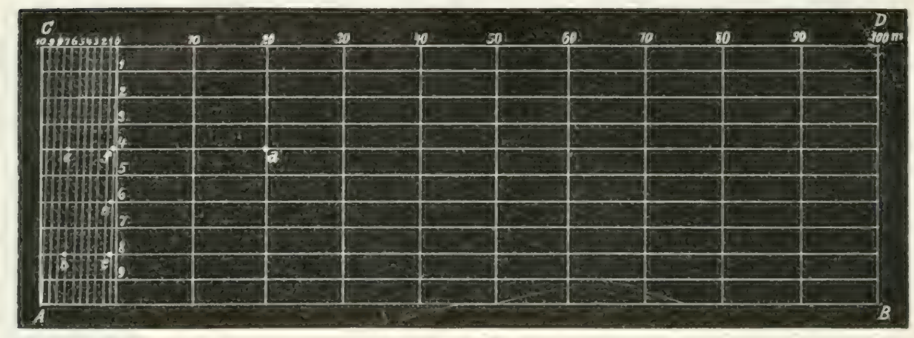


Fig. 194.

Will man annäherungsweise auch Zentimeter haben, so setzt man den Zirkel nach dem Augenmaße in dem betreffenden Zwischenraume zwischen zwei Parallellinien ein. Denkt man sich in der Mitte zwischen den Parallelen durch 7 und 8 noch eine Parallele gezogen, so ist dasjenige Stück davon, welches zwischen der Nullinie und der ersten Transversalen liegt, offenbar 0·75 *m* lang; denn das Stück bei 7 ist 0·7 *m*, bei 8 ist es 0·8 *m*; ein Stück, welches aber genau in der Mitte zwischen beiden liegt, ist das arithmetische Mittel, also 0·75.

B. Es ist ein Verjüngungsmaßstab 1 : 2880 zu zeichnen, auf welchem noch halbe Meter in der Natur auf dem Papiere genau abgegriffen werden können.

2880 *m* in der Natur entsprechen 1 *m* in der Zeichnung,
1 *m* „ „ „ entspricht $\frac{1}{2880}\,m = 0{\cdot}00034722\,m$ in der Zeichnung.

Da hier die Einheit, d. i. das verjüngte Meter, mit 0·34722 *mm* nicht gut verzeichnet und unterteilt werden kann, so faßt man zweckmäßig 10 verjüngte Meter zusammen und teilt dann diese Größe durch Transversalen.*) Es sind 10 *m* in der Natur 3·4722 *mm* auf dem Papiere. Um diese Länge durch Transversalen bis auf $\frac{1}{2}\,m$ zu unterteilen, braucht man 20 Parallellinien, welche mit der aufgetragenen Einheit von 10 *m* parallel laufen, denn es ist $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}\,m$.

*) Es wird also auch hier und in jedem ähnlichen Falle vom Großen ins Kleine gearbeitet.

Die zweckmäßigste Konstruktion wäre hier folgende: Man trägt, wenn man höchstens Längen bis zu 500 *m* auf dem Papiermaßstabe abgreifen soll, eine Größe von $500 \times 0{\cdot}00034722\, m = 0{\cdot}1736\, m$ auf, teilt diese in fünf gleiche Teile, von denen einer 100 *m* in der Natur gleichkommt und unterteilt den ersten dieser Teile wieder in zehn Teile, wovon dann einer 10 *m* beträgt. Zur Unterteilung auf $\frac{1}{2}\, m$ zieht man nun die Transversalen von 10 zu 10 *m*, sowie 20 Parallellinien.

C. Auf einer Karte wurde die Länge einer Grenzlinie unter Benützung eines natürlichen Maßstabes mit 6·35 *cm* und in der Natur die zugehörige Länge mit 158·75 *m* gemessen; in welchem Verjüngungsverhältnisse ist die Karte gezeichnet?

0·0635 *m* auf der Zeichnung sind 158·75 *m* in der Natur; daher ist 1 *m* auf der Zeichnung $158{\cdot}75 : 0{\cdot}0635 = 2500\, m$ in der Natur und hienach das Verjüngungsverhältnis 1 : 2500.

D. Auf einer Karte ist die Verjüngung angegeben durch die Gleichung $1'' = 40^0$. Wie lautet die Verhältniszahl dieser Verjüngung?

Zur Lösung dieser Aufgabe bringt man beide Seiten der Gleichung auf die gleiche Benennung. $40^0 = 40 \,.\, 6 \,.\, 12'' = 2880''$, also $1''$ in der Zeichnung $= 2880''$ in der Natur. Das Verjüngungsverhältnis ist demnach 1 : 2880. Hätte man einen Maßstab in dem Verhältnisse 1 : 2880 im alten Maße zu konstruieren, so bedenke man, daß $1'' = 40^0$, $2''$ daher $= 80^0$ und $2\frac{1}{2}'' = 100^0$. Man wird also $2\frac{1}{2}''$ als Einheit auftragen und die erste Einheit in zehn Teile teilen, wodurch man dann 10^0 abgreifen könnte; zieht man dann noch 10 Parallele und in der ersten Einheit die Transversalen, dann kann man auch einzelne Klafter abgreifen.

E. Regeln für die Konstruktion von Transversalmaßstäben.

a) Man ermittelt nach dem Verjüngungsverhältnisse die Länge eines Meters in der Natur auf dem Papiere, d. i. die Länge eines verjüngten Meters *b)*. Ist dieselbe zu klein, um genau aufgetragen werden zu können, so nimmt man ein Vielfaches, gewöhnlich das Zehn- oder Hundertfache dieser Länge als Einheit der sogenannten Grundteilung an und unterteilt dann *c)* diese Einheit erst durch Transversalen und Parallellinien. Die Anzahl der zur Grundteilung parallel laufenden Linien muß so groß sein, daß die Einheit der Grundteilung, dividiert durch die Anzahl der Parallellinien, gleich ist der verlangten auf dem Maßstabe noch genau abgreifbaren Größe, daß also im Beispiele $B\ \frac{10}{x} = 0{\cdot}5\, m$. Diese Gleichung kann man auch schreiben: $10 = 0{\cdot}5\, x$, oder $x = \frac{10}{0{\cdot}5} = 20$. *d)* Die Bezifferung der Transversalmaßstäbe geht für jenes Stück, welches durch Transversalen geteilt wird, von der Nullinie nach links, für den übrigen Maßstab dagegen von der Nullinie nach rechts.

Die besten Transversalmaßstäbe sind die auf schmale Messingplatten eingeritzten, welche vom Mechaniker bezogen werden. Für seltener vorkommende Verjüngungsverhältnisse muß man sich selbst einen Transversalmaßstab konstruieren und verwendet hiezu starkes Zeichen- oder Kartonpapier.

III. Zum Bestimmen der Winkelmaße

dienen transporteurartige Teilungen auf eigenen Instrumenten. Die gemessenen Winkel trägt man bei den einfachsten Messungen mit Hilfe von Halbkreis- ($0-180^0$ beziehungsweise 200^0) oder Vollkreistransporteuren ($0-360^0$, beziehungsweise 400^0) auf.

II. Kapitel.

Von den einfachsten Operationen der Flächenaufnahme.

§ 5. Behelfe zur Bezeichnung von Punkten in der Natur.

I. Art der Vermessungspunkte in der Natur.

Da jedes Grundstück von Linien begrenzt ist, die Grenzen der Linien aber Punkte sind, so ist es erforderlich, vor der Aufnahme in der Natur jeden in Betracht kommenden Punkt in gehöriger Weise zu bezeichnen. Eine solche Bezeichnung der Punkte in der Natur kann entweder eine bleibende oder eine vorübergehende sein.

1. Mit bleibenden Bezeichnungen werden versehen:

a) Die Eigentumsgrenzpunkte, welche durch behauene oder unbehauene (Findlings-)Grenzsteine markiert werden.

b) Die Operationspunkte, das sind Hauptbilfspunkte, auf deren Grundlage größere Vermessungen aufgebaut werden und die zum Zwecke von Nachmessungen dauernd erhalten werden müssen. Man bezeichnet die Operationspunkte durch auf der oberen Fläche eben behauene Steine, auf denen die Lage des eigentlichen Vermessungspunktes durch den Schnittpunkt eines eingemeißelten Kreuzes deutlich ersichtlich wird.*)

c) Die sogenannten Sicherheitssteine im Walde, das sind solche bleibende Punkte, welche die Lage der künstlichen Durchhiebe (Schneisen) im Walde festhalten. Sie sind auf der oberen Seite schief abgemeißelte Hausteine, im Gebirge aber gewöhnlich nur Findlinge.

2. Vorübergehende Bezeichnungen von Punkten werden angewendet für minder wichtige Linien, wie beispielsweise die Begrenzung der verschiedenen Grundstücke eines und desselben Besitzers, die Scheidelinien von Äckern und Wiesen, Weide und Wald u. dgl. Ihre Bezeichnung für die Zwecke der Vermessung ist erforderlich, um den ganz genauen Ort dieser Punkte für die Aufnahme zu wissen und um mit dieser Ortsbestimmung gleichzeitig eine genaue Bezifferung der Punkte zur Vermeidung von Verwechslungen beim Zeichnen dieser Figuren verbinden zu können.

Zur Festhaltung solcher Punkte benützt man sogenannte Meßpflöcke oder kurz Pflöcke von etwa 30—35 *cm* Länge und 3—6 *cm* Stärke, die bei der Vermessung von Feldern oder sonstigem holzleeren Terrain durch Arbeiter mitgetragen werden (Spaltschindeln), bei Meßarbeiten im Walde aber immer erst an Ort und Stelle bei jedem einzelnen Punkte erzeugt werden.

II. Hilfsmittel zur besseren Ersichtlichmachung der bezeichneten Vermessungspunkte.

Bei Vermessungen ist es meist erforderlich, die dauernd oder vorübergehend bezeichneten Punkte zum Zwecke der Messung erst deutlicher sichtbar zu machen, um hiedurch das Sehen von Grenzstein zu Grenzstein im hohen Grase oder im Gebüsche zu ermöglichen, oder Punkte

*) Die Hauptoperationspunkte sind allgemein unter dem Namen „trigonometrische Punkte“ bekannt.

überhaupt auf weite Entfernung als solche zu unterscheiden. Zu diesem Zwecke bedient man sich der sogenannten **Signale**. Für unsere Zwecke sind als wichtigste Signale die **Absteckstäbe** oder **Visierstäbe** und die **Meßfahnen** zu nennen.

Die **Absteckstäbe** sind 2 bis 4 *m* lange, etwa 2·5 bis 4 *cm* im Durchmesser haltende gerade Stangen (Fig. 195, *a*), am besten aus zähen, unterdrückt gewesenen Fichtenstämmchen, die unten mit einem eisernen Schuhe zum Einstoßen in die Erde versehen und streifenweise abwechselnd mit weißer und roter Ölfarbe angestrichen sind. Im Notfalle, insbesondere bei Vermessungen im Walde, wendet man als Absteckstäbe wohl auch nur rohe Fichtenstangen an, die geschält und unten zugespitzt werden. **Meßfahnen** (Fig. 195, *b*) sind Absteckstäbe, welche behufs noch besserer Ersichtlichmachung oben mit einem weißen oder roten Fähnchen (im Notfalle einem Taschentuche) versehen sind. Absteckstäbe und Meßfahnen werden bei den durch Steine oder Pflöcke bezeichneten Punkten in den Boden eingestoßen und nach dem Augenmaße oder durch Anhalten eines Senkels vertikal gerichtet.



Fig. 195.

Die Zulässigkeit der Verwendung von Absteckstäben an Stelle der am Erdboden befindlichen eigentlichen Vermessungspunkte ist darin begründet, daß es sich bei Flächenmessungen stets nur um die Horizontalprojektion der einzelnen Punkte handelt und eine vertikale Linie (d. i. der Absteckstab) als Horizontalprojektion nur einen Punkt, nämlich den Naturpunkt gibt. Darauf ist es auch begründet, daß man bei der Aufnahme von Häusern die vertikalen Hauskanten anstatt der eigentlichen Bodennaturpunkte benützt u. dgl. m.

Für Vermessungen ausgedehnter Grundkomplexe verwendet man als Hauptsignale **Stangensignale**, **Baumsignale** und sogenannte **Pyramiden**. Alle diese Signale dienen dazu, Operationspunkte, von denen aus die Vermessung vorgenommen wird, auf längere Zeit (aber nicht dauernd), selbst Jahre lang, auf weitere Entfernungen hin sichtbar zu machen.

Die **Stangensignale** bestehen aus etwa 4 *m* hohen und 7 bis 10 *cm* starken geraden Nadelholzstangen, an deren Zopfende zwei mit Kalk oder weißer Farbe bestrichene Schindeln kreuzweise befestigt sind. Im Boden werden die Stangensignale durch Einlassung hölzerner Hülsen (Kästchen) befestigt, aus denen das Signal erforderlichenfalls wieder herausgenommen werden kann.

Bei weniger wichtigen Operationspunkten, deren Erhaltung auch nicht immer erforderlich wird, wendet man statt der eigentlichen Stangensignale entsprechend hohe Bäume an, die am Wipfel vom Astwerk befreit und ebenfalls mit zwei querüberlegten Schindeln versehen werden. Solche Signale heißen **Baumsignale**.

Auf den wichtigsten Operationspunkten endlich, die bei ihrer Auswahl sofort versteint werden und welche die **Versteinung** für alle **Zeiten** behalten sollen (Punkt I *b*), baut man über dem durch ein Kreuz bezeichneten Punkte des Steines als Signal eine sogenannte **Pyramide** auf. Dieselbe besteht aus drei schief in den Boden eingestoßenen stärkeren, etwa 3 bis 4 *m* langen Nadelholzstangen, die in Form eines Dreifußes angeordnet sind und oben mit einer entsprechenden Anzahl von Bändern zusammengehalten werden. Im Scheitel der Pyramide wird eine kürzere, mit zwei oder mehreren Schindeln versehene Stange eingeklemmt, deren Mitte herabgesenkelt genau über dem Kreuzungspunkte am Steine liegen muß.*)

*) Die Stangen- und Baumsignale, sowie die Pyramiden wurden hier deshalb erwähnt, weil die Schutzorgane oftmals deren Erhaltung zu überwachen haben.

§ 6. Das Abstecken von geraden Linien in der Natur.

In der Meßkunde heißt eine am Boden verlaufende Linie dann eine Gerade, wenn ihre Horizontalprojektion eine Gerade ist. Wenn man in den Endpunkten einer solchen Geraden je einen Absteckstab vertikal einsteckt, so kann man sich durch die beiden Absteckstäbe eine Vertikalebene gelegt denken, deren Schnitt mit dem Horizont die Horizontalprojektion der Linie ist.

In gleicher Weise wie die beiden Absteckstäbe in den Endpunkten der Geraden die letzteren selbst bezeichnen, so werden auch andere Absteckstäbe, die genau in der durch den ersten und letzten Absteckstab gelegten Vertikalebene eingesteckt werden, Zwischenpunkte der durch den Anfangs- und Endpunkt gegebenen Geraden bezeichnen. Man nennt den Vorgang, vermittels dessen man von einer durch zwei Punkte gegebenen Linie unter Anwendung von Absteckstäben noch andere Punkte dieser Linie bestimmt, das Abstecken dieser Geraden in der Natur.

Die Grundbedingung für das richtige Abstecken von Geraden in der Natur ist die vertikale Stellung der Absteckstäbe. Man prüft die vertikale Stellung eines Absteckstabes dadurch, daß man entweder daneben einen zweiten Stab frei zwischen dem Daumen und Mittelfinger hängen läßt und nun den eingesteckten Stab mit dem oberen Ende so lange richtet, bis er mit dem frei hängenden Stabe parallel ist, oder daß man neben dem eingesteckten Stabe einen Senkel frei hängen läßt und den Stab nun mit der Senkelschnur parallel richtet.

Für das Abstecken von geraden Linien kommen für uns folgende Aufgaben in Betracht:

1. Aufgabe. Eine Gerade AB ist nach rückwärts über den Punkt B hinaus zu verlängern. (Fig. 196).

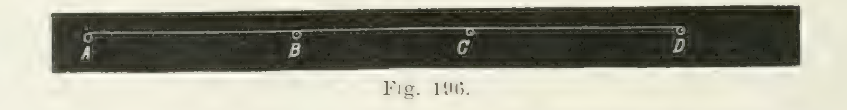


Fig. 196.

Man steckt in A und B je einen Absteckstab in vertikaler Richtung in den Boden, nimmt einen dritten Absteckstab und begibt sich nach C, hält diesen Stab so weit als möglich am oberen Ende zwischen dem Daumen und Mittelfinger der rechten Hand und läßt ihn frei herabhängen, so daß der Stab vollkommen die Richtung einer Vertikalen annimmt. Man sieht nun bei geschlossenem linken Auge nach der einen Kante dieses Absteckstabes und bewegt den Stab, oder erforderlichenfalls sich selbst, so weit nach links oder rechts, bis sich die Kante des Stabes in der Hand mit den auf derselben Seite liegenden Kanten der beiden anderen Stäbe vollkommen deckt, d. h. mit den letzteren genau in derselben Vertikalebene liegt. Ist dies der Fall, so läßt man den Stab herabfallen und erhält hiedurch am Boden einen Punkt der Verlängerung. Besser ist es, wenn man den Stab durch einen Gehilfen halten läßt, sich selber aber um einige Schritte nach rückwärts stellt und von da den Stab einvisiert. In derselben Weise verfährt man auch beim Aufsuchen anderer Verlängerungspunkte. Ergibt sich bei dieser Manipulation, daß die Stäbe in A und B nicht genau parallel sind mit

dem frei gehaltenen Stabe in C, so ist dies ein Zeichen, daß die Stäbe in A und B nicht genau vertikal stehen; es müssen dieselben daher vor der endgiltigen Bestimmung des Punktes C erst auf Grundlage der Richtung des frei gehaltenen Stabes vertikal gestellt werden.

2. Aufgabe. Zwischen den Endpunkten einer Geraden AB sind mehrere Zwischenpunkte zu bestimmen. (Fig. 197 und 198.)

a) Das vermessende Organ hat einen Gehilfen. (Fig. 197.)

Man steckt in A und B Absteckstäbe ein, stellt sich einige Schritte hinter einem der Punkte, etwa B, auf und schickt den Gehilfen (Figuranten) nach C mit einem Absteckstabe, den derselbe frei hängend, wie bei Aufgabe 1 gesagt wurde, in der ausgestreckten Hand hält. Der Gehilfe wird sodann durch Zurufe („zu sich", „von sich") oder durch deutliche Handbewegungen solange zum Verrücken des Stabes angewiesen, bis sich der letztere mit seiner Kante genau in der die Absteckstäbe B und A tangierenden Sehebene des Beobachters befindet.

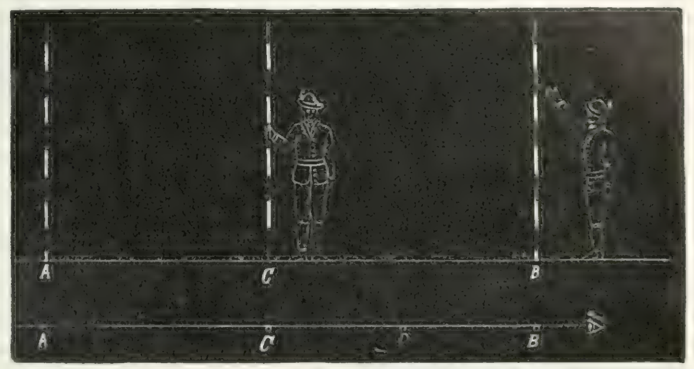


Fig. 197.

Man nennt diesen Vorgang gewöhnlich das Einvisieren*) oder Einrichten zwischen zwei gegebenen Punkten. Sind von B aus mehrere Punkte einzuvisieren, so beginnt man immer mit den entfernteren, also jenen, die dem Punkte A näher liegen.

b) Das Abstecken wird ohne Gehilfen ausgeführt.

Man verlängert die Gerade AB, Fig. 198, durch Einsetzen eines Absteckstabes im Sinne der Aufgabe 1 nach rückwärts bis zum Punkte C

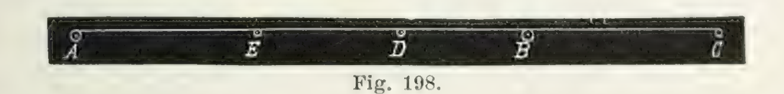


Fig. 198.

und bringt sodann durch Rückwärtsverlängerung der Linie BC nach D und E die gewünschten Punkte zwischen die ursprüngliche Gerade AB.

3. Aufgabe. Es soll zwischen zwei Punkten A und B, Fig. 199, deren gegenseitige Lage infolge eines inmitten befindlichen flachen Rückens (Hügels) oder infolge ihrer großen Entfernung das Sehen von einem Punkte auf den anderen nicht gestattet, eine Gerade abgesteckt werden, oder die Gerade soll zwischen zwei Punkten A und B abgesteckt werden, welche unzugänglich sind. (Abstecken aus der Mitte.)

Man stellt je einen Gehilfen mit einem Stabe in einem Punkte a und in einem Punkte b derart zwischen A und B auf, daß man sowohl

*) Visieren heißt sehen, durchsehen, und von einem Punkte nach einem zweiten eine Vertikalebene sich gelegt denken. Die so gedachte gerade Linie bezeichnet man als Sehstrahl oder Visierlinie und ruft daher, wenn ein Zweiter die Visur verdeckt, wohl auch „aus der Visur".

von a als auch von b aus beide Stäbe in A und B sehen kann. Der erste Gehilfe in a visiert nun den Stab b des zweiten in der Richtung nach B ein, wodurch er auf b_1 kommt, worauf der Gehilfe in b_1 den Stab a auf den Endpunkt A nach a_1 einrichtet. Nunmehr wird b_1 von a_1 aus auf b_2, sodann a_1 von b_2 aus auf a_2 eingerichtet und dieses Verfahren abwechselnd solange fortgesetzt, bis man von dem letzten a-Punkte nach B und von dem letzten b-Punkte nach A sieht und der bei jeder dieser Visuren inzwischen befindliche Stab sich mit jenem in B, beziehungsweise A, vollkommen deckt.

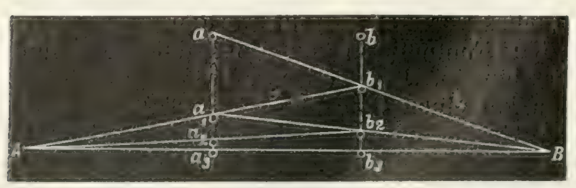


Fig. 199.

4. Aufgabe. Es ist der Durchschnittspunkt zweier Geraden AB und CD in der Natur zu suchen. (Fig. 200.)

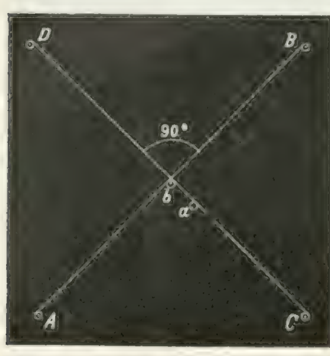


Fig. 200.

Man steckt vorerst in den Endpunkten der Geraden Absteckstäbe vertikal ein. Sodann stellt sich ein Mann beim Stabe in A und ein zweiter bei jenem in C auf, während ein Gehilfe sich in die Nähe des mutmaßlichen Schnittpunktes begibt. Nun visiert der Mann in C den Gehilfen, der einen Absteckstab frei hängend in der Hand hält, in die Richtung CD in a ein, worauf auch der Mann in A den Gehilfen in die Gerade AB einrichtet. Der Gehilfe darf zu letzterem Zwecke beim Verlassen des Punktes a aus der Richtung CD nicht heraustreten, sondern muß, während ihm A nach b zu gehen befiehlt, auch gleichzeitig von C aus in der Richtung CD erhalten werden. Der Punkt b, welcher sowohl von A nach B, als auch von C nach D richtig einvisiert ist, ist der gesuchte Schnittpunkt.

Über das Abstecken von geraden Linien, wenn die Visur nicht frei ist, vgl. § 12.

§ 7. Die Längenmessung in der Natur.

I. Geräte und Instrumente zur Längenmessung.

1. Geräte für die Messung von Längen überhaupt.

Von den Geräten, welche bei Längenmessungen im forstlichen Betriebe für uns in Betracht kommen, sind zu nennen:

A. Die Meßlatte. *B.* Die Meßbänder. *C.* Die Meßkette.

A. Die Meßlatte ist ein 2—5 *m* langer Maßstab aus geradfaserigem Fichten- oder Tannenholze mit flachrechteckigem Querschnitte von 3 *cm* Dicke und 5—8 *cm* Breite. Behufs Erhöhung der Dauerhaftigkeit werden die Meßlatten mit Ölfarbe angestrichen und an den Enden zum Schutze gegen das Abstoßen mit einem sehr genau anliegenden eisernen Beschläge versehen. Zur Ersichtlichmachung der einzelnen Meter und Dezimeter, eventuell auch Zentimeter, ist die Latte außerdem mit

einer genauen bezifferten Teilung, eventuell in verschiedenen Farben, versehen.

Eine Meßlatte muß vollkommen gerade (nicht geworfen) sein und die richtige Länge besitzen. In ersterer Beziehung prüft man die Latte durch Anlegen an eine straff gespannte Schnur, in letzterer Hinsicht durch genaueste Vergleichung mit einem von einem Aichamte geprüften Maßstabe oder einer zweiten als richtig erkannten Meßlatte.

B. Die Meßbänder. Von den Meßbändern wenden wir zwei Formen an, und zwar für genaue Messungen das Stahlmeßband, für minder genaue Messungen das Leinenmeßband.

a) Beschreibung der Meßbänder.

Das Stahlmeßband ist ein Stahlband von gewöhnlich 20 *m* Länge und 20 *mm* Breite. Es ist nach ganzen Metern und Dezimetern eingeteilt, wobei die ersteren durch numerierte kleine Messingplättchen, die letzteren hingegen durch kleine Durchlochungen im Bande bezeichnet sind. An den Enden des Meßbandes befinden sich um ihre Achse drehbare messingene Handringe oder sonstige Handhaben, an denen gewöhnlich Marken zur Bezeichnung des Anfanges und Endes der Länge von 20 *m* angebracht sind. Außer Gebrauch wird das Meßband auf ein hölzernes oder eisernes Kreuz aufgewickelt. Hiebei ist strenge darauf zu achten, daß das Band vorher ganz abgetrocknet, eventuell schwach eingeölt werde, um den Ansatz von Rost ferne zu halten.

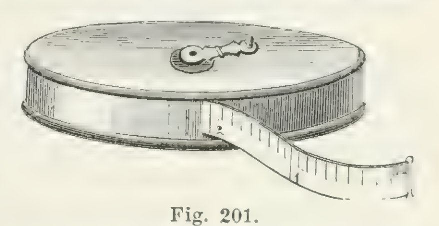


Fig. 201.

Das Leinenmeßband (Fig. 201) ist ein aus gutem Hanfleinen verfertigtes schmales Band von gewöhnlich 20 oder 30 *m* Länge, welches zur Erhöhung der Dauerhaftigkeit häufig eingewobene Drahtfäden besitzt und mit Leinöl oder ähnlichen Substanzen durchtränkt oder rot lackiert und gewöhnlich bis auf Zentimeter geteilt ist. Die Bezifferung der ganzen Meter und jener der Dezimeter ist verschiedenfarbig angebracht, um Irrungen auszuweichen. Zum Zwecke einer bequemeren Handhabung befindet sich das Meßband außer Gebrauch in einer flachen Ledertrommel, aus der es beim Messen hervorgerollt wird. Das Aufrollen geschieht mittels einer an der Außenseite der Trommel angebrachten messingenen Kurbel, die umlegbar ist, so daß man das Meßband leicht in der Tasche mittragen kann.

Das Leinenmeßband ist wegen seiner leichten Handhabung in den letzten Jahren für weniger genaue forstliche Vermessungen, wie beispielsweise kleine Schlag- und Wegaufnahmen, Aussteckung von Pflanzverbänden, Langholzkubierungen u. dgl. sehr in Anwendung gekommen und kann als eines der wichtigsten Meßgeräte des Försters bezeichnet werden. Das Leinenmeßband hat den Fehler, daß es sich beim Naßwerden zusammenzieht*) und daher ohne Berücksichtigung einer entsprechenden Korrektur für genauere Aufzeichnungen nicht taugliche Resultate ergibt.

b) Prüfung der Meßbänder. Korrektur bei Messungen mit einem fehlerhaften Bande.

Die Richtigkeit eines Meßbandes wird daraus ersehen, daß dasselbe von der Anfangsmarke bis zur Endmarke genau die angegebene Länge zeigen muß und daß innerhalb dieser Länge die Unterabteilungen auch

*) Wohl auch bei längerem Gebrauche etwas dehnt.

richtig aufgetragen sind. Um sich von der Richtigkeit eines Meßbandes zu überzeugen, trage man auf einem ganz ebenen Boden, etwa auf einem Gange, mit einem vollkommen richtigen Meterstabe soviele Meter auf, als die Länge des Meßbandes beträgt und spanne über dem Anfangs- und Endpunkte der abgemessenen Linie das Meßband aus. Findet man hiebei keine vollkommene Übereinstimmung, so tut man am besten, das Stahlmeßband von einem Mechaniker auf die genaue Länge richtig stellen zu lassen, während man bei einem Leinenmeßbande im Notfalle für weniger genaue Messungen durch solides Einnähen oder Verlängern sich auch selbst helfen kann.

Man kann aber auch mit einem unrichtig abgelängten Meßbande richtig messen, wenn eine Korrektur in Rechnung gezogen wird. Hat beispielsweise die Prüfung ergeben, daß das Meßband bei 20 *m* um 3·0 *cm* zu kurz ist, so fällt der Endpunkt des fehlerhaften Meßbandes auf 19·97 *m* der richtigen Länge und wir werden, wenn wir die wirkliche Länge von 20 *m* mit dem fehlerhaften Meßbande messen, nicht 20 *m* ablesen, sondern fehlerhaft 20 *m* + 0·03 *m*. Man mißt also pro 20 *m* wirklicher Länge mit dem fehlerhaften Meßbande um 3 *cm* zu viel, also pro 1 *m* um $\frac{0{\cdot}03}{20}$ *m* = = 0·0015 *m*, welche Größe man pro 1 *m* fehlerhafter Länge abziehen muß, um das richtige Resultat zu erhalten.

Hätte man beispielsweise mit dem fehlerhaften Meßbande für eine Länge 55·25 *m* als Resultat erhalten, so wäre die richtige Länge 55·25 — — 0·0015 . 55·25 = 55·25 — 0·08 = 55·17 *m*.

Umgekehrt wird man bei einem zu langen Meßbande zu kurze Distanzen erhalten; es muß daher zu der unrichtig gemessenen Länge die betreffende Korrektur hinzugezählt werden.

Aufgabe: Ein Leinenmeßband von angeblich 20 *m* Länge ist um 35 *mm* zu lang. Man hat damit folgende Längen erhalten: 1 . 33·25 *m*, 2 . 102·32 *m*, 3 . 217·80 *m*. Wie groß sind die richtigen Längen?

C. Die Meßkette.

a) Beschreibung. Die Meßkette (Fig. 202) ist gewöhnlich 20 *m* lang und besteht aus einzelnen 2 *dm* langen Kettengliedern aus etwa 5 *mm* starkem Eisendraht, die an ihren Enden umgebogen und durch ebenso starke Ringe untereinander verbunden sind, welche es ermöglichen, die ganze Kette zusammenlegen und tragen zu können. Die einzelnen Meter sind durch etwas größere eiserne oder messingene Ringe nach je 5 Kettengliedern gekennzeichnet; einzelne Dezimeter und Zentimeter müssen abgeschätzt oder mit einem Maßstabe gemessen werden. An den beiden Enden der Kette befinden sich starke eiserne Ringe, mit denen man die Kette halten und spannen kann. Eine in der Mitte dieser

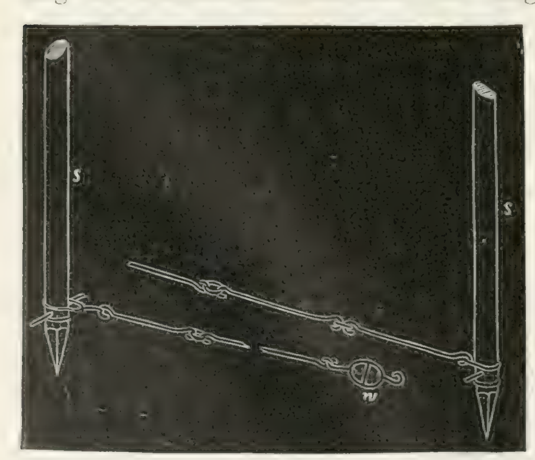


Fig. 202.

Ringe vorhandene Marke zeigt die genauen Enden der Länge von 20 *m* an. Häufig besitzen die Meßketten in der Mitte auch noch einen so-

genannten Wirbel, d. i. eine Schraubenvorrichtung, vermittels welcher die Länge der Kette erforderlichenfalls um ein geringes Stück reguliert werden kann.

Zu jeder Meßkette gehören: *aa)* zwei Kettenstäbe (Fig. 202, *s*), das sind runde, etwa 1 *m* lange und 3 *cm* starke Stäbe, welche unten einen eisernen Schuh zum Einstoßen in den Boden und über diesem ein eisernes Querstück besitzen. Die Kette wird mit den Endringen über je einen Kettenstab geschoben und durch die Querstücke daran festgehalten; *bb)* eine Garnitur (gewöhnlich 10 Stück) Kettennägel (Fig. 203), das sind etwa 3 *dm* lange und 7 bis 8 *mm* dicke eiserne Nägel, welche am Kopfe ein Öhr besitzen. Dazu gehören zwei eiserne Ringe, auf welche sie beim Gebrauche aufgereiht werden. (Siehe auch den später folgenden Absatz II, 1, *B*, *a*, Seite 229.)

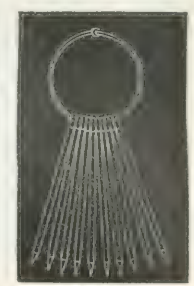


Fig. 203.

Die Meßkette war früher das fast ausschließlich in Anwendung stehende Längenmeßgerät. Infolge ihrer umständlichen Handhabung und der äußerst schwierigen Messung in gebirgigem Terrain, sowie infolge einer geringeren Genauigkeit gegenüber dem Stahlmeßbande hat sie schon fast ganz an Bedeutung verloren; man vollzieht heute genaue Messungen mit der Latte oder mit dem Stahlmeßbande, weniger genaue mit dem Leinenmeßbande.

b) Prüfung der Meßkette. Die Prüfung der Meßkette erfolgt in derselben Weise, wie die der Meßbänder. Geringere Fehler kann man durch Zusammen- oder Auseinanderschlagen der Kettenglieder oder auch durch den Wirbel beheben.

2. Geräte für die Herstellung horizontaler Ebenen zum Zwecke der Horizontalmessung schiefer Linien.

Nach dem Gesagten dürfen schiefe Linien nicht in ihrer wirklichen Länge, sondern nur in ihrer horizontalen Projektion gemessen werden. Es ist also nötig, hier kurz jene Instrumente kennen zu lernen, mit denen man unter Anwendung von Längenmeßgeräten die Horizontalprojektion schiefer Linien messen kann. Zu diesen Instrumenten gehören: *A.* Der Senkel oder das Lot. *B.* Die Setz- oder Schrotwage. *C.* Die Libelle oder Wasserwage.

A. Der Senkel oder das Lot besteht aus einem birnförmigen Stück Metall, gewöhnlich Blei, Messing oder Eisen, das mittels einer Schraube oder einer Art Öhr an einem Faden aufgehängt ist. Für sich allein findet der Senkel gewöhnlich nur zum Vertikalstellen von Stäben oder Latten, dann auch zum Herabloten von hochgelegenen Punkten auf den festen Boden Verwendung. Dagegen bildet er einen Hauptbestandteil

B. der Setz- oder Schrotwage.

a) Beschreibung. Die Setzwage ist das einfachste Instrument, um eine horizontale Richtung herzustellen. Sie ist ein aus Lattenstücken zusammengesetztes gleichschenkliges (gewöhnlich gleichschenklig-rechtwinkliges) Dreieck (Fig. 204), an dessen Spitze *c* ein Senkel *cs* frei herabhängt, der bei vollkommen

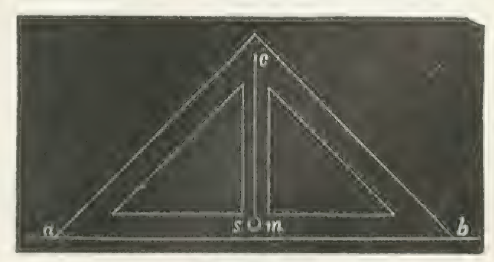


Fig. 204.

horizontaler Lage der Grundlinie $a\,b$ genau auf der Marke m im Mittelpunkte von $a\,b$ steht, was man als das „Einspielen" des Lotes bezeichnet.

b) Die Prüfung der Setzwage auf ihre Richtigkeit geschieht folgendermaßen (Fig. 205): Man stellt das Instrument auf eine schiefe Fläche $A\,B$ und bezeichnet auf demselben genau den Punkt s, auf welchen der Senkel zeigt. Sodann dreht man die Setzwage um 180° um, so daß b nach b' und a nach a' kommt und findet dann, daß der Senkel auf s' zeigt. Da nun $a\,b\,c$ ein gleichschenkliges Dreieck ist, so muß sowohl s als auch s' gleichweit von der Höhe abstehen, d. h. es muß m als ein Punkt der Höhe in der Mitte von $s\,s'$ liegen. Man hat also nur nötig, die Entfernung der beiden Senkelstellungen s und s' zu halbieren, um die richtige Senkellage zu erhalten. Fällt diese mit der an dem Geräte schon vorhandenen Marke zusammen, so ist dieselbe zweifellos richtig.

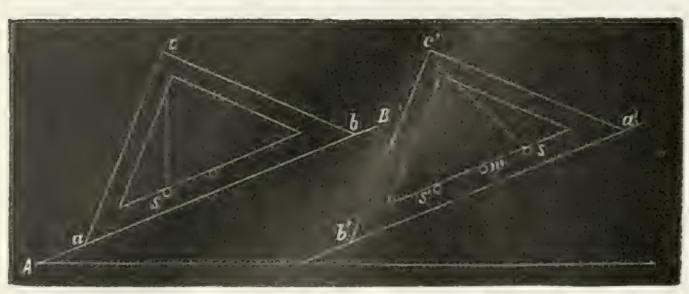


Fig. 205.

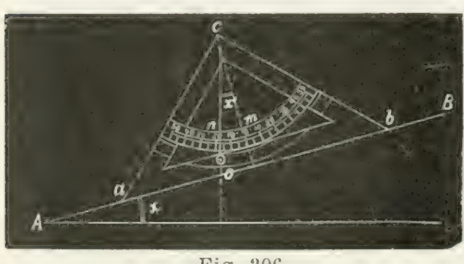


Fig. 206.

Eine Vervollkommnung der Setzwage ist die Bergwage, die dazu dient, die Neigung des Terrains gegen den Horizont in einfachster Weise zu bestimmen. Dieses Instrument (Fig. 206) besitzt einen messingenen Gradbogen, der von m ausgehend nach rechts und links in Grade und oft auch Teile derselben geteilt ist. Ist z. B. die Neigung der schiefen Ebene $A\,B$ gegen den Horizont zu messen, so setzt man die Bergwage auf dieselbe und erhält in dem Winkel x' die gesuchte Neigung, denn es ist $\sphericalangle x' = \sphericalangle x$, da die Schenkel beider Winkel auf einander senkrecht stehen.

C. Die Libelle oder Wasserwage.

a) Beschreibung. Die Libelle (Fig. 207) ist ein hohler, flach tonnenförmig ausgebauchter Glaszylinder a, der im Innern ausgeschliffen und an den Enden durch Stöpsel geschlossen oder ganz zugeschmolzen ist. Dieser Glaszylinder ist mit einer leicht beweglichen Flüssigkeit, Weingeist oder Schwefeläther, so weit gefüllt, daß noch eine kleine Luftblase b übrig bleibt. Zum Schutze gegen das Zerbrechen liegt die Glasröhre in einem Messingmantel c, welcher eine Durchbrechung besitzt, um den mittleren Teil des Glaszylinders genau sehen zu können. Letzterer ist auf der offen liegenden Seite von der Mitte nach außen hin mit einer symmetrischen Teilung versehen, welche die genaue Beobachtung des jeweiligen Standes der Luftblase ermöglicht. Um endlich die Libelle auf eine horizontal zu stellende Unterlage aufsetzen zu können, ruht die Libellenröhre auf zwei Trägern d und e, die ihrerseits auf einer

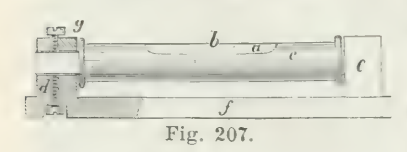


Fig. 207.

ebenen Metallplatte *f* befestigt sind. Mit dem Träger *c* ist die Röhre durch eine horizontale Umdrehungsachse verbunden, während sie auf dem Träger *d* durch zwei leicht verstellbare Schrauben *g*, die sogenannten Rektifizierschrauben, gehalten wird, welche es ermöglichen, daß die Röhre, indem sie sich um die Achse in *e* dreht, ein kurzes Stück gehoben oder gesenkt werden kann.

Statt der unteren Schraube ist häufig eine Spiralfeder angebracht, welche der oberen Schraube *g* entgegenwirkt und die Libelle beim Nachlassen dieser oberen Schraube selbsttätig hebt.

Soll beispielsweise eine Meßlatte mit der Libelle horizontal gestellt werden, so wird die letztere auf die Latte gestellt und diese so lange gehoben oder gesenkt, bis die Luftblase genau symmetrisch zum Mittelpunkte der Teilung der Glasröhre steht. Man sagt dann: „die Libelle spielt ein." Ist dagegen die Latte, oder allgemein die horizontal zu stellende Unterlage, noch nicht horizontal, so steht die Luftblase nicht in der Mitte der Teilung, sondern immer auf jener Seite der Glasröhre, welche höher liegt, denn die Luftblase muß sich, weil sie leichter ist als die Flüssigkeit, immer auf den höchsten Punkt der Oberfläche der letzteren stellen.

b) Prüfung und Rektifikation*) der Libelle. Man kann mit der Libelle nur dann eine Unterlage vollkommen horizontal stellen, wenn die Achse der Libellenröhre genau parallel zur unteren Fläche der Metallplatte *f* ist. Ist dies der Fall, dann wird sich die Luftblase, wenn man die Libelle auf eine horizontale Unterlage bringt, genau zwischen die 2 Hauptstriche der Teilung stellen, und man kann umgekehrt aus dem Einspielen der Luftblase auf die wagrechte Lage der Unterlage schließen. Nun ist aber nicht von jeder Libelle von vorneherein bekannt, ob ihre Auflagefläche mit der Achse parallel ist und sie muß vor der Benützung erst darauf geprüft werden. Man stellt die Libelle auf ein vollkommen eben gehobeltes Brett, das man auf einer Tischplatte durch Unterschieben eines ganz flachen Keiles etwas heben und senken kann, und bringt die Luftblase auf diese Art zum Einspielen. Sodann setzt man die Libelle um 180° um, so daß die Enden der Metallplatte gegenüber der ersten Stellung genau verwechselt stehen. Spielt in dieser neuen Lage die Blase noch ein, dann ist 1. die Unterlage tatsächlich horizontal, 2. die Libellenachse mit der Auflagefläche parallel. Spielt aber die Blase nach dem Umsetzen der Libelle nicht ein, d. h. zeigt sie einen „Ausschlag", dann muß die Libelle erst rektifiziert werden. Dies geschieht auf folgende Weise: Man beseitigt den halben Ausschlag der Blase durch Heben oder Senken der Unterlage mittels des Keiles und den andern halben Ausschlag mittels der Rektifizierschräubchen *g*. Diese Operation wiederholt man so oft, bis die Blase in beiden Stellungen der Libelle genau einspielt. Dann ist die Libelle rektifiziert und sie kann zu weiteren Horizontalstellungen verwendet werden, ohne daß man die Rektifizierschräubchen weiter zu berühren braucht.**)

Eine für uns wenig wichtige Libelle ist die Dosenlibelle. Sie besteht aus einer kreisförmigen Metalldose mit ebener Grundfläche, welche oben mit einem auf der Innenseite konkav, also kugelschalenförmig ausgeschliffenen Glasdeckel luftdicht verschlossen ist. Diese Dose ist mit einer leicht beweglichen Flüssigkeit bis auf eine Luftblase gefüllt, welche hier natürlich eine kreisrunde Form annimmt. Die Horizontalstellung der Unter-

*) Rektifizieren = richtigstellen.

**) Als Unterlagsebene für die Rektifikation einer Libelle wählt man am besten einen Meßtisch (siehe diesen).

lage wird dadurch angezeigt, daß die Luftblase genau in der Mitte der Dose steht. Die Dosenlibellen sind ungenauer als die Röhrenlibellen und kommen selten in Anwendung. Ihre Rektifikation muß erforderlichenfalls der Mechaniker vornehmen.

Zusatz. Durch den oben erklärten Vorgang hat man bloß eine Linie des Unterlagsbrettes horizontal gestellt, nicht aber das Brett nach allen Richtungen. Will man eine Ebene horizontal stellen, so ist es, da eine Ebene durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt ist, notwendig, in dieser Ebene zwei sich schneidende Richtungen horizontal zu stellen. Man nimmt hiezu in der Regel zwei aufeinander senkrechte Richtungen. Um daher eine Ebene horizontal zu stellen, muß man eine rektifizierte Setzwage oder Libelle vorerst in einer Richtung zum Einspielen bringen, dieselbe sodann um 90° umdrehen und auch in dieser Lage einspielen lassen und diesen Vorgang so oft wiederholen, bis das zur Horizontalstellung verwendete Instrument in beiden Lagen einspielt.

II. Die Ausführung der Längenmessung.

1. Längenmessungen in horizontalem Terrain.

A. Mit der Meßlatte.

a) Mit zwei Meßlatten. Hiebei verwendet man am besten zwei Gehilfen mit je einer gleichlangen Meßlatte. Die Latte I wird, am Boden liegend, vorerst an den Anfangspunkt der zu messenden Geraden angeschoben und von dem sie handhabenden Arbeiter vom Beginnpunkte aus in die Richtung der zu messenden Geraden einvisiert.*) Hierauf wird die Latte II, ebenfalls in der Richtung der Meßlinie, genau an das Ende der Latte I sachte angestoßen, diese sodann zurückgeschoben und aufgehoben, wobei der Arbeiter bei einer Lattenlänge von 5 *m* laut 5 ausruft. Sodann wird die Latte I vorwärts getragen, an II angelegt und diese nun zurückgeschoben und aufgehoben, wobei der zweite Arbeiter laut 10 ausruft. Bei dem folgenden Aufheben und Vorwärtstragen der Latte I ruft der Arbeiter 15, also jedesmal um eine Lattenlänge mehr aus. Der Rest der Länge wird, wenn die Latten keine Bezeichnung auf Zentimeter besitzen, mit einem gewöhnlichen Handmaßstabe gemessen und zu der zuletzt ausgerufenen Zahl hinzugezählt.

Zur Sicherheit werden die Längen wenigstens zweimal gemessen. Aus den geeigneten**) Einzelwerten für eine Länge berechnet man dann das Mittel, das als richtige Länge auch beibehalten wird. Man kann bei jeder einzelnen Messung Irrungen schon dadurch vermeiden, daß das Ende der Meßlatte I weiß, jenes der Meßlatte II aber rot ist, so daß der Figurant mit der weißen Latte immer ungerade, jener mit der roten Latte aber immer gerade Zahlen ausrufen muß.

b) Mit einer Meßlatte. Hat man nur eine Meßlatte zur Hand, so legt man dieselbe genau an den Anfangspunkt der zu messenden Linie an und markiert das Ende der Latte durch einen Querstrich mit einem Nagel im Boden, hebt dann die Latte ab und legt sie genau an diesen Querstrich an, macht dann einen zweiten Strich, hebt die Latte ab, legt sie an diesen wieder an usw. Bei genauen Messungen mit einer Latte

*) Soll eine Meßlatte oder ein Stab in der Richtung einer Geraden *AB* gelegt werden, so sieht der Arbeiter, indem er das Ende der Latte an *A* legt, von *A* nach *B* und richtet das zweite Ende der Latte nach § 6 auf *B* ein.

**) Siehe diesbezüglich Seite 232, III.

genügt es aber nicht, die Quermarken in den Boden einzuritzen, sondern man schlägt in diesem Falle beim Endpunkte jeder Lattenlänge ein Pflöckchen mit einem ebenen Kopfe ein und markiert darauf das jedesmalige Ende einer Lattenlänge mit einem Messer durch einen feinen Strich. Auch hier mißt man das restliche Stück erforderlichenfalls mit einem Handmaßstabe.

B. Mit den Meßbändern.

a) Mit dem Stahlmeßbande. Beim Messen mit dem Stahlmeßbande sind immer zwei Personen notwendig, von denen die eine den Anfang, die zweite das Ende des Bandes führt. Beide Figuranten tragen je einen Kettenstab, über den sie die Endringe des Stahlbandes schieben, mit sich; der vordere Mann ferner einen Kettenring (siehe Seite 225) mit 10 oder mehr Kettennägeln, der hintere Mann hingegen nur einen Ring.

Soll eine Gerade *AB* gemessen werden, so ist hiebei folgender Vorgang einzuhalten: Der hintere Mann steckt den Stab in *A* ein und visiert den vorderen Stab genau in die Richtung von *AB* bei straff gespanntem Bande ein. Hierauf steckt der vordere Mann an Stelle des Stabes einen Kettennagel vertikal ein und ruft „fertig", worauf beide Personen das Band in der Richtung gegen *B* so weit ziehen (in trockenem Grase) oder abgerollt tragen (bei feuchtem oder steinigem Boden), bis der hintere Mann zum ersten Kettennagel gelangt, wo er nun dem vorderen Mann „Halt" zuruft und den Kettenstab so einsetzt, daß die Endmarke des Meßbandes an den Kettennagel zu liegen kommt. Sodann visiert der Hintermann seinen Kameraden abermals in die Richtung der Linie ein, der seinerseits wieder bei straffem Bande den zweiten Kettennagel einsetzt und „fertig" ruft. Der hintere Mann nimmt hierauf den ersten Kettennagel heraus, hängt ihn auf seinen Ring und trägt das Band mit dem Vordermanne weiter, bis er zum zweiten Kettennagel kommt, ruft wieder „Halt", visiert den Vordermann ein usw. Die Anzahl der gemessenen vollen Bandlängen ist gleich der Zahl der vom Hintermanne gesammelten Kettennägel, also bei einer Bandlänge von 20 *m* und fünf gesammelten Nägeln 100 *m*. Restlängen mißt man gewöhnlich auch mit dem Bande oder mit einem Meterstabe. Bei genauen Messungen läßt man die Kettennägel weg und benützt ähnlich wie bei der Lattenmessung Holzpflöcke, die nach jeder Bandlänge tief eingeschlagen werden und auf welche das jedesmalige Ende einer Länge mit einem Messer durch einen feinen Einschnitt bezeichnet wird. Auch läßt man in diesem Falle die Kettenstäbe meist ganz weg,*) indem die Arbeiter das Band direkt an den Handringen ergreifen und fortziehen. Das Stahlmeßband ist stets sehr straff zu spannen.

b) Mit dem Leinenmeßbande. Der Vorgang ist im allgemeinen derselbe wie beim Stahlmeßbande. Daß beim Leinenbande die Spannstäbe überflüssig werden, ist selbstverständlich.

C. Mit der Meßkette.

Dieselbe ist infolge ihres verhältnismäßig großen Gewichtes nur unter Anwendung von Spannstäben zu handhaben, und zwar genau in derselben Weise, wie es für das Stahlmeßband dargetan wurde. Es ist bei dieser Messung stets darauf zu achten, daß die Kette sehr gut gespannt ist und Verschlingungen der Kettenglieder nicht vorkommen. Zu diesem Zwecke muß die Kette jedesmal gehörig vom Vordermanne „angeschnellt" oder „ausgeworfen" werden.

---

*) Auch bei Anwendung von Kettennägeln benützt man in vielen Fällen keine Spannstäbe. Es wurden deshalb bei Beschreibung des Stahlbandes die Spannstäbe außeracht gelassen.

2. Längenmessungen in geneigtem Terrain. Das Staffelmessen.

Sind A und B (Fig. 208) zwei an einer Lehne liegende Punkte, so darf nach den Ausführungen im § 2, deren Entfernung nicht in schiefer Richtung von B nach A, sondern nur als horizontale Projektion, also horizontal von B nach A' gemessen werden. Da nun so lange Meßbänder in der Regel nicht zur Verfügung stehen und es bei geneigtem Terrain nicht tunlich ist, das Meßband so hoch zu halten, als es die Herstellung der horizontalen Längen, z. B. BA', zum Zwecke des Herablotens erfordert, so muß man sich die Länge BA' in mehrere Teile zerlegt denken und folgenden Weg einschlagen: Man nimmt ein geeignetes Längenmaß, legt dasselbe in der Richtung BA in B horizontal an und senkelt dessen Endpunkt nach 1 herab. Hierauf schiebt man dasselbe Maß an den herabgeloteten Punkt 1, hält es wieder in der Richtung BA horizontal und lotet das Ende abermals auf den Boden nach 2. Setzt man diesen Vorgang in unserem Falle noch zweimal fort, so fällt das Lot zuletzt mit dem Grenzpunkte A zusammen. Es ist dann $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = BA'$, denn es ist, da die Lote parallel sind, $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = B1' + 1'2' + 2'3' + 3'A' = BA'$. Man kann also auf diese Weise, indem man das Längenmaß entsprechend oft in Form von Staffeln aneinanderreiht, die horizontalen Längen aller schiefen Strecken messen und bezeichnet den Hergang hiebei wegen der staffelförmigen Aneinanderreihung des Längenmaßes als das Staffelmessen.

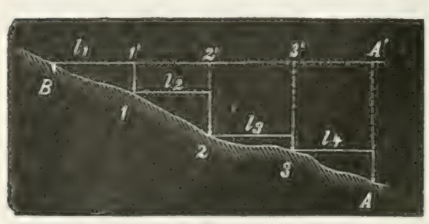


Fig. 208.

Es ist einleuchtend, daß das Längenmaß beim Staffelmessen um so kürzer sein muß, je steiler das Terrain ist. Man wird also die Meßbänder nur bei geringen Steigungen anwenden können und bei stärker geneigtem Terrain zu den Meßlatten greifen müssen.

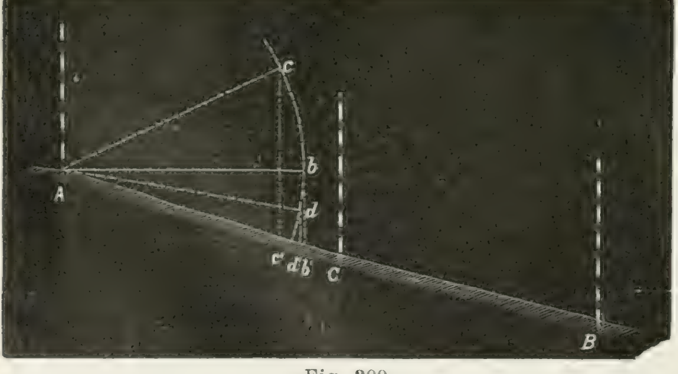


Fig. 209.

A. Die Staffelmessung mit den Meßbändern und der Meßkette (Fig. 209). Ist eine schwach geneigte Linie AB in dieser Weise zu messen, so wird folgender Vorgang eingehalten: Man visiert vorerst zwischen die Endpunkte von AB einen Zwischenstab C ein, um bei der Messung die gerade Richtung zwischen A und B leichter beibehalten zu können. Sodann legt der erste Arbeiter den Anfangspunkt des Meßbandes auf A und visiert den Vordermann nach CB ein. Dieser hebt das Ende des

Meßbandes ohne Anwendung einer Setzwage oder Libelle in die horizontale Lage, spannt das Band und lotet nun die Endmarke mit einem Senkel herab. Den herabgeloteten Punkt bezeichnet er im Boden durch einen Kettennagel und ruft dann dem Hintermanne „fertig" zu. Beide tragen hierauf das Meßband um eine Länge weiter, bis der Hintermann auf den ersten Kettennagel kommt, dort den Anfang des Meßbandes anlegt und den Vordermann einvisiert. Dieser lotet das Ende des horizontal angezogenen Bandes wieder herab, steckt einen zweiten Nagel ein usw. Das Zählen der einzelnen Bandlängen geschieht in der Seite 229 dargestellten Weise.

Da man bei der Staffelmessung mit dem Meßbande keine Libelle oder Setzwage anwendet, so muß man die richtige horizontale Lage desselben wie folgt beurteilen: Ist der Endpunkt des Meßbandes (Fig. 209) zu hoch in *c*, so gibt derselbe herabgelotet den Bodenpunkt *c'*, und ist er zu tief in *d*, so erhält man den Bodenpunkt *d'*; bei der horizontalen Lage des Bandes in *b* endlich fällt der Senkel auf *b'*. Es ist hieraus zu ersehen, daß bei der horizontalen Lage des Bandes gegenüber allen schiefen Lagen desselben dessen Endpunkt am weitesten absteht und daß man beim praktischen Messen das Meßband daher vorerst augenscheinlich etwas höher hält, dann nach abwärts senkt und den entferntest gelegenen Senkelpunkt als richtig mit einem Nagel bezeichnet.

Geht bei der Staffelmessung mit dem Meßbande das Terrain in einigen Punkten zu stärkerer Neigung über, so wird anstatt der ganzen Länge des Bandes nur die halbe Länge genommen, oder es werden selbst nur einige Meter angewendet.

Die Meßkette ist zum Staffelmessen bei weitem weniger geeignet als das Meßband, da sie infolge ihres Gewichtes trotz großer Spannung immer eine kleine Einbauchung bekommt und deshalb ein zu großes Resultat ergibt.

B. Die Staffelmessung mit der Meßlatte.

Diese nimmt der Vermesser mit zwei Hilfsarbeitern unter Anwendung einer Setzwage oder einer Röhrenlibelle sowie eines Senkels vor. Der hintere Arbeiter legt die Latte an den Anfangspunkt der zu messenden Linie an und visiert längs der Latte den Vordermann auf den Endpunkt der Linie ein; bei langen Linien muß selbstverständlich ein Zwischenstab eingesteckt werden. Der Vordermann bringt die Latte mittels der Setzwage oder Libelle in die horizontale Lage und senkelt nun das Ende der Latte auf den Boden herab. Der herabgelotete Punkt wird am besten durch einen Drahtstift markiert (da Kettennägel zu groß sind), oder aber (bei genauen Messungen) durch einen Einschnitt auf einem eingeschlagenen Pflocke. Der Hintermann überträgt sodann die Latte, legt sie genau an die Marke an und bringt sie in die Richtung der Meßlinie; der Vordermann stellt die Latte wieder horizontal, lotet das Ende herab usw.

Zum Zwecke einer sicheren Horizontalstellung der Latte bedient sich der Vordermann eines Absteckstabes als Unterstützungsstab, den er nahe am Ende der Latte in den Boden stößt und längs welches er dieselbe nun so lange hebt und senkt, bis die Libelle einspielt. Ist infolge von Graswuchs, Gestrüpp, Abfallreisig u. dgl. ein genaues Bezeichnen der Lattenendpunkte am Boden nicht möglich, so müssen die entsprechenden Plätze jedesmal etwas gesäubert werden.

Die Staffelmessungen führt man aus Rücksichten einer handlichen Messung und einer größeren Genauigkeit immer in der angegebenen Weise von oben nach unten aus. Linien, längs welcher in der Mitte

eine Einsattlung sich befindet, werden durch einen Pflock an dieser Stelle in zwei Teile geteilt, von denen nun jeder von oben nach unten gemessen wird.

III. Die Genauigkeit der Längenmessung.

Wenn man eine und dieselbe Länge zwei- oder mehreremale mißt, so werden die erhaltenen Resultate nicht alle gleich sein, sondern mehr oder weniger voneinander abweichen. Die Ursache dieser Abweichung liegt in dem nicht ganz genauen Anreihen der einzelnen Maßlängen, in der nicht vollkommen gleichmäßigen Einhaltung der geraden Richtung der zu messenden Linie, in Unvollkommenheiten unserer Beobachtung u. dgl. Es sind dies sogenannte unvermeidliche Fehler, welche allen Messungen in mehr oder weniger großem Maße anhaften und die erfahrungsgemäß für die einzelnen Instrumente bekannt sind.

Messungen mit dem Stahlmeßbande ergeben im günstigsten Falle in ebenem Terrain einen Fehler von $\frac{1}{1000}$ der gemessenen Länge, also bei 1000 *m* je 1 *m* Fehler, in geneigtem Terrain aber einen Fehler von $\frac{1}{500}$ der Länge, also bei 1000 *m* je 2 *m* Fehler. Eine genaue Lattenmessung ergibt etwas geringere Fehler, dagegen sind die Fehler mit dem Leinenmeßbande beinahe doppelt so groß, als jene mit dem Stahlmeßbande. Bei der österreichischen Katastralvermessung ist für die gewöhnlich vorkommenden Längenmessungen ein Fehler von $\frac{1}{200}$ als zulässig erklärt.

Wie bereits erwähnt, mißt man zur Sicherheit jede Länge mindestens zweimal; weichen die einzelnen Längen hiebei um nicht mehr als um den unvermeidlichen Fehler voneinander ab, so nimmt man aus beiden Messungen das arithmetische Mittel und sieht dieses dann als die richtige Länge an. Weichen dagegen die Messungen um ein Bedeutendes voneinander ab, so ist das ein Zeichen, daß nicht nur unvermeidliche Fehler vorliegen, sondern daß ein grober Fehler gemacht worden ist. In diesem Falle muß die Messung noch ein drittes-, eventuell gar viertesmal wiederholt werden, bis es sich zeigt, welche von den Messungen wirklich fehlerhaft war. Aus den zusammenstimmenden Messungen wird sodann das Mittel gezogen.

Aufgaben: 1. Eine Länge in ebenem Terrain ergab viermal mit dem Stahlmeßbande gemessen: 86·52, 86·58, 86·60 und 86·54 *m*; welches ist die mittlere Länge? 2. Eine Länge wurde mit der Kette zweimal gemessen mit 45·35 und 45·12 *m*. Wenn ein Fehler von $\frac{1}{200}$ zulässig ist, fragt es sich, ob aus den beiden Längen das Mittel als richtige Länge gebildet werden darf; wie groß ist dasselbe im bejahenden Falle. 3. Unter denselben Voraussetzungen wie bei Aufgabe 2 wird eine Länge viermal gemessen mit 45·50, 45·35, 45·17, 45·76 *m*. Welche von diesen Werten sind für das Mittel unbrauchbar und wie groß ist das anzuwendende Mittel?

§ 8. Das Abstecken rechter Winkel in der Natur.

I. Ohne Anwendung von Winkelinstrumenten.

Obwohl bei Vermessungsarbeiten zum Abstecken rechter Winkel immer Instrumente verwendet werden, so sollen doch auch einige Aufgaben für die Absteckung von Senkrechten ohne Winkelinstrument in

Kürze vorgenommen werden, die im Notfalle in der Praxis auch Verwendung finden.

1. Aufgabe: In der Geraden AB (Fig. 210 und 211) ist in C eine Senkrechte zu errichten.

a) Durch Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes. (Fig. 210.) Man mache $Ca = Cb$, nehme ein Leinenmeßband oder eine Schnur, befestige die Enden in a und b, ergreife das Band in der Mitte und spanne es in D straff an. Es ist dann $aD = bD$ und die Linie CD steht als Höhe eines gleichschenkligen Dreieckes senkrecht auf AB. Statt des Meßbandes kann man auch zwei längere Meßlatten nehmen und dieselben über a und b in D zusammenstoßen.

b) Durch Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes. (Fig. 211.) Man bezeichne auf einem etwa 20 *m* langen Leinenmeßbande oder einer Schnur drei Längen im Verhältnisse von 3 : 4 : 5 (also etwa 4·5 *m*, 6·0 *m* und 7·5 *m*) und spanne das Meßgerät um den Punkt C so, daß CE 3, CD 4 und DE 5 Teile hat. Es ist dann $3^2 + 4^2 = 5^2$, also $CD \perp AB$.*)

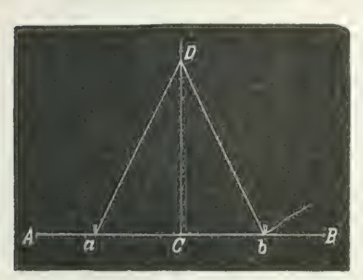


Fig. 210.

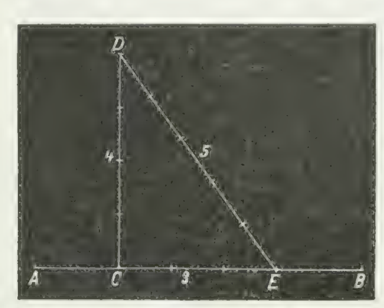


Fig. 211.

2. Aufgabe: Es ist vom Punkte D (Fig. 210) auf AB eine Senkrechte zu fällen (D liegt nahe an AB).

Man nehme eine Schnur oder ein Leinenmeßband genau in der Mitte und lasse zwei Figuranten mit den Enden des Bandes gegen die Linie AB gehen und von einem dritten Arbeiter genau in die Richtung AB einvisieren. Die Mitte zwischen den einvisierten Punkten mit D verbunden, gibt die verlangte Senkrechte.

II. Mit Anwendung von Winkelinstrumenten.

Nach der auf Seite 212 gegebenen Erklärung müssen bei der Flächenaufnahme nicht nur die Seiten, sondern auch die Winkel in ihrer Horizontalprojektion bestimmt werden. Denken wir uns zur näheren Erläuterung dieser Forderung durch die beiden einen Winkel bildenden Schenkel je eine vertikale Ebene gelegt, so stellt der Schnitt dieser beiden Vertikalebenen mit einer etwa durch den Scheitel gelegten Horizontalebene die horizontale Projektion des zu messenden Winkels dar. Wenn wir also beispielsweise mit dem Transporteur einen Feldwinkel messen sollen, so müssen wir den Mittelpunkt desselben genau über den Scheitel des Winkels halten, den Transporteur selbst vollkommen horizontal stellen und nun einmal vom Mittelpunkte aus nach dem einen Schenkel, das zweitemal nach dem zweiten Schenkel visieren und die Richtung dieser beiden Visuren auf dem Transporteur durch vertikal

*) Hiezu eignet sich die Meßkette gut, da man die Ringe direkt in die Pflöcke in C und E einhängen kann.

stehende Nadeln genau anzeichnen. Der zwischen beiden Nadeln befindliche Winkel ist der gesuchte Feldwinkel. Auf diesem Prinzipe beruhen die folgenden einfachen Instrumente zur Absteckung rechter Winkel, sowie auch die sämtlichen anderen Winkelmeßgeräte.*)

Zum Abstecken von rechten Winkeln verwendet man am häufigsten folgende Instrumente: *A*. Das Winkelkreuz, *B*. die Winkeltrommel, *C*. den Winkelspiegel.

A. Das Winkelkreuz.

a) Beschreibung. Das Winkelkreuz (Fig. 212) besteht aus zwei zueinander senkrechten Leisten aus Holz oder Messing, an deren Enden gewöhnlich 4 Stiftchen *a*, *b*, *c*, *d* so eingeschlagen sind, daß $ac \perp bd$. Auf der Unterseite trägt das Instrument im Kreuzungspunkte der Leisten eine Metallhülse, mittels welcher es auf einen Stab, d. i. ein sogenanntes Stockstativ, oder einen Dreifuß, d. i. ein Dreifußstativ aufgesetzt wird. Sind die 4 Stifte von dem Kreuzungspunkte der Linien *db* und *ac* gleichweit entfernt, dann bilden sie ein Quadrat, und es ist dann $ab = bc = cd = da$. Wollte man das Instrument auch zur Absteckung von 45-grädigen Winkeln benützen, so müßte die genannte Entfernung noch halbiert werden. Übrigens bildet auch die Richtung *ab* mit *ac* einen Winkel von 45°.

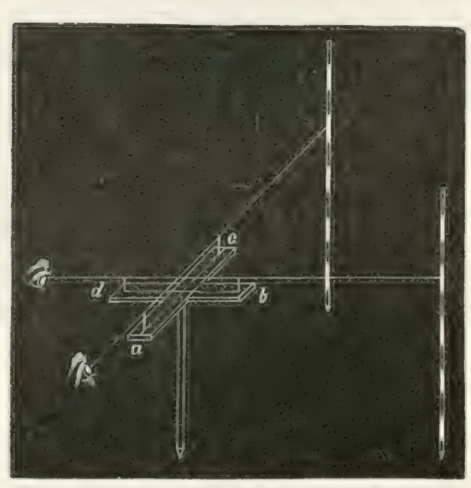


Fig. 212.

b) Gebrauch (Fig. 213). Ist in dem Punkte *C* der Geraden *AB* auf diese eine Senkrechte zu errichten, so stellt man das Winkelkreuz mit dem Stative im Punkte *C* vertikal auf und visiert über das eine Paar Stiftchen genau nach dem Punkte *B*. Hierauf macht man die Visur über das zweite Stiftchenpaar und richtet mit diesen einen Absteckstab *D* ein. Die Linie *CD* ist dann eine Senkrechte zur Linie *AB*.

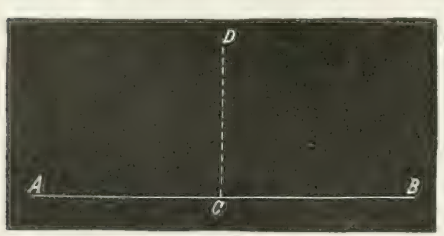


Fig. 213.

Ist hingegen von dem außerhalb der Linie *AB* liegenden Punkte *D* eine Senkrechte auf die Gerade *AB* zu fällen, so begibt man sich mit dem Winkelkreuze genau in der Richtung *AB* auf jene Stelle dieser Geraden, an welcher der Fußpunkt *C* der Senkrechten aus *D* mutmaßlich liegen wird. Hierauf richtet man das eine Paar Stiftchen nach *A* und sieht nach, ob das zweite Stiftchenpaar nach dem Punkte *D* zeigt. Ist dies nicht der Fall, so verrückt man das Instrument auf *AB* so lange, bis die Visur über das zweite Stiftchenpaar genau durch *D* geht. Dieser so gefundene Standpunkt des Winkelkreuzes stellt dann den Fußpunkt *C* der Senkrechten dar.

*) Meßtisch, Theodolit, Waldboussole.

c) Prüfung des Winkelkreuzes. Man steckt (Fig. 214) in möglichst horizontalem Terrain eine Gerade ABC durch drei genau vertikal stehende Absteckstäbe aus und stellt sodann das Winkelkreuz mit genau vertikalem Stativ an Stelle des Absteckstabes in B. Hierauf dreht man das Winkelkreuz so lange, bis die Visur über die Stiftchen a und b genau durch C und die Rückvisur über b und a genau durch A geht und visiert in der Richtung der zweiten Stiftchenlinie cd von d aus in nicht zu weiter Entfernung einen Absteckstab D ein. Alsdann dreht man das Winkelkreuz so weit (bei einem richtigen Winkelkreuze um 90°) nach links, bis c nach c' und d nach d' kommt, daß also die zweite Stiftchenlinie genau in der Richtung AC erscheint. Bei dieser Drehung ist die erste Stiftchenlinie in die Lage $a'b'$ gelangt. Visiert man nun über die letztere, so muß, wenn $\sphericalangle bBc = \sphericalangle cBa = \sphericalangle aBd = \sphericalangle dBb = 1R$ ist, diese Visur genau durch den Stab D gehen. Ist dies nicht der Fall und geht die Visur beispielsweise nach D',

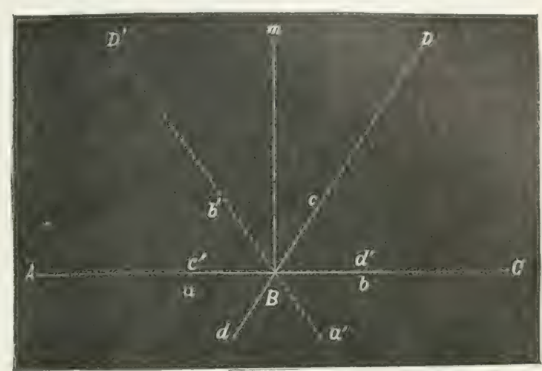


Fig. 214.

so ist das Winkelkreuz unrichtig. Die richtige Stellung der Stiftchen ist dann jene, bei welcher die Visur durch den Halbierungspunkt m von DD' geht (wobei natürlich $BD = BD'$ gemacht werden muß), denn es ist $\sphericalangle bBc = b'Bc'$ und die Halbierungslinie von $\sphericalangle cBb'$ deshalb senkrecht auf AC. Man wird demnach die Stiften ab so verschieben müssen, daß ihre Richtung nach der Umdrehung des Instrumentes genau auf die Hälfte von DD' zeigt. Diese Arbeit kann man bei einfachen Winkelkreuzen meist selbst ausführen.

(In der Figur ist der Fehler der größeren Deutlichkeit halber stark übertrieben.)

B. Die Winkeltrommel.

a) Beschreibung. Die Winkeltrommel (Fig. 215) ist ein beiläufig 8 bis 10 *cm* hoher, ganz oder zum Teile geschlossener hohler Zylinder oder abgestutzter Kegel oder auch ein ebenso hohes Prisma, in dessen Mantelfläche in dem einen wie in dem anderen Falle gewöhnlich 8 Absehöffnungen angebracht sind, von denen je zwei diametral gegenüberliegende zusammengehören. Von diesen Absehöffnungen bestehen vier nicht unmittelbar aufeinander folgende aus einfachen vertikalen Schlitzen a, die übrigen hingegen je zur Hälfte aus einem Schlitz b, zur anderen Hälfte dagegen aus einer fensterartigen Öffnung c mit einem eingezogenen Roßhaarfaden, so daß jedem Schlitze immer ein Faden gegenüberliegt. Durch je einen Schlitz und einen Faden ist eine vertikale Visierebene gegeben.*) Solcher Ebenen sind im ganzen vier, von denen sich je zwei benachbarte unter einem

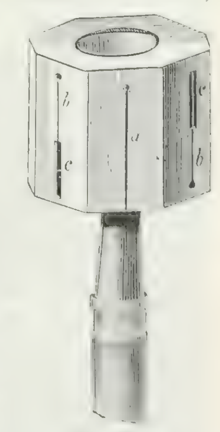


Fig. 215.

*) Eine aus einem solchen Schlitze und Faden gebildete Visiervorrichtung heißt ein Diopter. Der Schlitz selbst heißt das Okular, die Öffnung mit dem Roßhaarfaden hingegen das Objektiv.

Winkel von 45°, daher jede erste und dritte unter einem Winkel von 90° schneiden. Man kann also, indem das Auge durch zwei nicht aufeinander folgende Ritzen nach den gegenüberliegenden Fäden sieht, Winkel von 90°, und mit Zuhilfenahme jener Ritzen, denen kein Faden gegenüberliegt, auch Winkel von 45° abstecken.

Behufs Absteckung dieser Winkel auf dem Felde kann die Trommel mittels einer Hülse auf einem Stock- oder Dreifußstative befestigt werden.

b) Gebrauch. Der Gebrauch der Winkeltrommel ist derselbe wie jener des Winkelkreuzes. Die Visuren sind hiebei durch je einen Schlitz und den gegenüberliegenden Roßhaarfaden gegeben.

c) Die Prüfung der Winkeltrommel wird genau in derselben Weise vorgenommen, wie jene des Winkelkreuzes. Einen etwa vorhandenen Fehler kann man nur dann selbst korrigieren, wenn die Roßhaarfäden in den Fenstern durch zwei kleine Schräubchen verschiebbar sind. Im anderen Falle gibt man das Instrument zum Mechaniker.

C. Der Winkelspiegel (Fig. 216).

a) Beschreibung. Der Winkelspiegel besteht aus einem dreiseitigen prismatischen Gehäuse aus Messing, dessen eine Seitenwand ganz offen ist, während die beiden anderen Seitenwände oben fensterartig durchbrochen sind. Diese beiden Wände sind unter einem Winkel von 45° zueinander geneigt und besitzen unter den Öffnungen je einen Spiegel *s* und *s'* von etwa 2·5 *cm* Breite und 2 *cm* Höhe; der Spiegel *s'* ist fest, während *s* mit Hilfe dreier Rektifizierschrauben um ein kleines Stück an die Seitenfläche angezogen oder von dieser entfernt werden kann, wenn der von den Spiegeln gebildete Winkel bei der Prüfung des Instrumentes sich als unrichtig herausstellen sollte. Auf der Bodenfläche des Winkelspiegels ist endlich ein messingener Handgriff *g* eingeschraubt, mit welchem der Spiegel gehalten wird.



Fig. 216.

Die Begründung für die Anwendung des Winkelspiegels zum Abstecken rechter Winkel läßt sich kurz wie folgt geben: Aus der Naturlehre ist der Satz bekannt, daß ein auf eine ebene Spiegelfläche fallender Lichtstrahl unter demselben Winkel gegen das Einfallslot zurückgeworfen (reflektiert) wird, unter welchem er eintritt. Es seien (Fig. 217) *s* und *s'* die beiden Spiegel in der Draufsicht (Horizontalschnitt). Ein Lichtstrahl vom Punkte *D* trifft den Spiegel *s* in *a* und wird unter dem gleichen Einfallswinkel auf den zweiten Spiegel *s'*, den er in *b* trifft, zurückgeworfen, der seinerseits den empfangenen Strahl nach *A* außerhalb des Spiegels zurückwirft. Dieser letztere Strahl scheint einem in der Linie *bA* befindlichen Auge von *B* aus dem Spiegel herauszukommen und läßt daher das Bild des Punktes *D* im

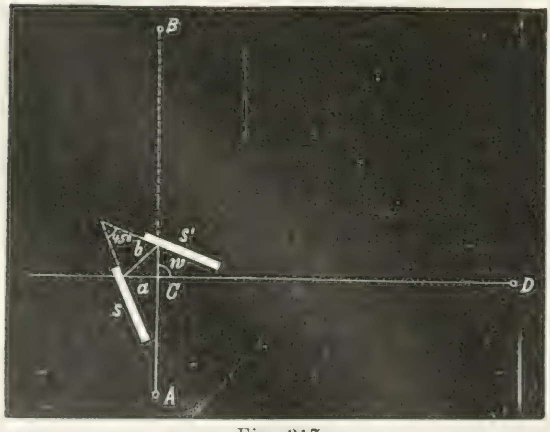


Fig. 217.

Spiegel s' in der Verlängerung von bA, d. i. in der Linie bB erscheinen. Denkt man sich nun in der Linie AC nahe beim Spiegel s das Auge eines Beobachters und in D und B je einen Absteckstab, so wird, indem das Auge durch die Durchbrechung oberhalb des Spiegels s' nach dem Stabe in B sieht, im Spiegel s' gleichzeitig das Bild des Stabes D erscheinen, und zwar wird der in der Durchbrechung sichtbare Stab B genau in der Verlängerung des im Spiegel s' erscheinenden Bildes vom Stabe D liegen. Der Strahl DC und die Visur BC durchschneiden sich unter dem Winkel w. Dieser wird, wie eine einfache Beweisführung zeigt, dann 1 R, d. h. die Linie DC ist dann senkrecht zu BC, wenn der Neigungswinkel der beiden Spiegel s und s' 45^0 beträgt.

b) Der Gebrauch des Winkelspiegels ergibt sich aus der vorhergehenden Erörterung von selbst. Ist erstens auf eine gegebene Gerade (Fig. 217) AB in C eine Senkrechte zu errichten, so hält man den Winkelspiegel mit den Spiegelflächen vertikal genau so über dem Punkt C an der Handhabe, daß das Auge durch die Öffnung über dem Spiegel s' den Absteckstab in B sieht. Sodann wird der Figurant mit dem Stabe D so lange angewiesen, bis das Bild des Stabes D im Spiegel s' genau in die Verlängerung des durch die Öffnung oberhalb des Spiegels sichtbaren Stabes B zu liegen kommt.

Ist weiters zweitens von dem Punkte D auf die Gerade AB eine Senkrechte zu fällen, also der Punkt C zu suchen. so wird der Spiegel so lange in der Richtung von AB in der Stellung von Fig. 217 an der Handhabe fortgetragen, bis das Spiegelbild von D genau mit dem Stabe B, den man durch die Öffnung über dem Spiegel sieht, in eine Linie fällt. Ist dies der Fall, so befindet sich der Spiegel im gesuchten Punkte C, der nun herabgelotet wird.

c) Die Prüfung des Winkelspiegels (Fig. 218). Man steckt auf horizontalem Boden eine Gerade AB durch zwei Absteckstäbe aus und fällt von einem dritten Punkte D auf diese Gerade zweimal eine Senkrechte, indem man, in der Linie AB gehend, das einemal nach dem Stabe in A und das zweitemal nach dem Stabe in B blickt. Kommt man hiebei auf zwei verschiedene Fußpunkte C' und C'', so ist das Instrument unrichtig. Der richtige Punkt C liegt dann in der Mitte von C' und C'', denn es muß, wenn man einmal nach A und das zweitemal nach B blickt, beidemal der gleiche Winkel aufgetragen worden sein, also $\sphericalangle D'C'A = \sphericalangle DC''B$. Es ist also $C'C''D$ ein gleichschenkliges Dreieck und die Linie $DC \perp AB$. Man geht nun mit dem Instrumente auf C, sieht durch die Öffnung auf B und korrigiert die Neigung der beiden Spiegelflächen mit den vorhandenen Rektifizierschräubchen so lange, bis das Spiegelbild von D genau mit dem Visierstabe in B eine Gerade bildet.

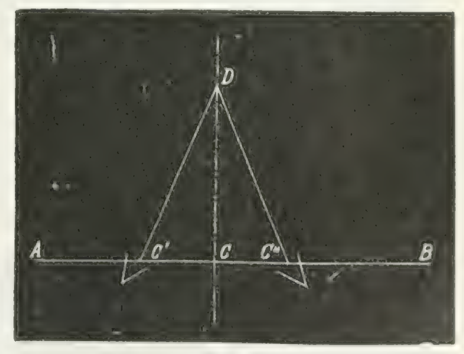


Fig. 218.

Die Anwendung der Winkelinstrumente für das Abstecken rechter Winkel.

Behufs Beurteilung der Anwendbarkeit der vorgeführten Winkelinstrumente haben wir zwischen einem wenig übersichtlichen Wald- und

Gebirgsterrain einerseits und zwischen einem ebenen und freien Terrain anderseits zu unterscheiden. Für den ersten Fall sind das Winkelkreuz und die Winkeltrommel dem Winkelspiegel vorzuziehen, und zwar insbesondere wegen der besseren Übersichtlichkeit, welche diese Instrumente gegenüber dem letzteren gewähren. Außerdem erhält man mit dem Winkelspiegel auf geneigtem Boden fehlerhafte Ergebnisse. Dagegen ist dieser auf einem ebenen, übersichtlichen Terrain, wie auf Feldern und Wiesen, ebenen Holzschlägen und lichten Waldbeständen mit größerem Vorteile anzuwenden als die beiden anderen Instrumente, da man damit bedeutend rascher arbeitet.

§ 9. Die Messung beliebiger Winkel in der Natur.

I. Bei alleiniger Anwendung von Längenmeßgeräten.

Soll (Fig. 219) der Winkel BAC ohne Zuhilfenahme eines eigenen Winkelmeßgerätes gemessen und in eine Karte übertragen werden, so trägt man mit dem Meßbande auf den Schenkeln AB und AC zwei beliebige, aber nicht zu kleine Stücke Ab und Ac auf, welche man zur Vereinfachung der Arbeit gleich groß annehmen kann. Hierauf mißt man noch das Stück bc und hat hiedurch die Bestimmungsstücke für ein Dreieck gegeben, bei dessen Konstruktion aus den drei Seiten in einem verjüngten Maßstabe selbstverständlich auch der Winkel BAC auf dem Papiere aufscheinen wird. Man bezeichnet die abgemessenen Stücke Ab, Ac und bc als die Sperrmaße des Winkels BAC.

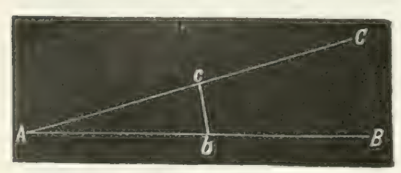


Fig. 219.

II. Unter Anwendung von Winkelmeßinstrumenten.

Das Prinzip für die Messung von beliebigen Winkeln im Freien wurde bereits Seite 233 angedeutet. Die auf dieser Grundlage beruhenden genauesten Winkelmeßinstrumente, die sogenannten Theodolite, fallen, schon in Anbetracht der erhöhten Kenntnisse, welche zu ihrem Verständnisse und ihrer Handhabung notwendig sind, außerhalb des Lehrplanes der niederen forstlichen Schulen. Dagegen wird die Kenntnis zweier einfacher Winkelinstrumente, des Meßtisches und der Waldboussole, nicht selten vom Forstschutzmanne verlangt, weshalb ihrer in den §§ 16, 17 und 18 in Kürze gedacht wird.

An dieser Stelle sei eine Vervollkommnung der Winkeltrommel erwähnt, welche es ermöglicht, mit einem für kleinere Messungen ausreichenden Genauigkeitsgrade nicht nur beliebige Winkel in der Natur zu messen, sondern auch solche abzustecken. Die Vervollkommnung wurde von Professor C. Bohn an der Winkeltrommel vorgenommen und von demselben wie folgt beschrieben: „Die die Messung beliebiger Winkel ermöglichende Erweiterung der Winkeltrommel besteht darin, zwei Trommeln zu verbinden. Die untere sitzt auf dem Stocke, die obere ist um eine Achse drehbar, welche senkrecht aus dem oberen Boden der unteren gewöhnlichen Winkeltrommel hervorragt. Der Mantel der feststehenden unteren Trommel ist in Grade eingeteilt; unter dem Augenteile (der Schauritze) des einen Absehers der oberen ist ein Zeiger (Strich) angebracht. Steht dieser auf 0 der Teilung, so geben die oberen Abseher (Schauritzen) dieselben Absehebenen wie die unteren Abseher; dreht man aber die obere Trommel, so gelangt der Zeiger an eine andere Stelle der Teilung und man kann dann ablesen, welchen Winkel die Richtung des bezeichneten Absehers mit der desjenigen Absehers der unteren Trommel bildet, an welchem Null steht."

„Soll nun ein Winkel gemessen werden, so stelle man die Trommel im Scheitelpunkte desselben vertikal auf, drehe den mit Null bezeichneten Abseher der unteren in die Richtung des einen (linken Schenkels), dann den bezeichneten Abseher der oberen Trommel in die Richtung des zweiten (rechten) Schenkels und lese an der Teilung die Größe des Winkels ab."

„Wie man Winkel gegebener Größen absteckt, ist nun leicht zu ersehen. Gibt man der Trommel einen Durchmesser von 120 *mm*, so wird ein Grad in der Teilung etwas größer als 1 *mm*, und es können also halbe Grade noch aufgetragen, auch weitere Unterteilungen noch geschätzt werden." Zum genaueren Ablesen der Winkel ist an der beweglichen Trommel häufig ein Nonius angebracht (siehe diesen).

§ 10. Das Abstecken von Parallellinien in der Natur.

1. Aufgabe: Zu einer beiderseits freien, oder in der Mitte nur durch einen Teich unterbrochenen, also nach ihrer Längsrichtung vollkommen übersehbaren Geraden AB ist eine Parallele im Abstande m zu ziehen.

a) Lösung mit einem Winkelinstrumente (Fig. 220). Man nimmt in der Linie zwei möglichst weit voneinander entfernte Punkte C und D an, errichtet in denselben je eine Senkrechte und macht dann $CC' = DD' = m$. Es ist hienach die Verbindungslinie $C'D' \parallel AB$.

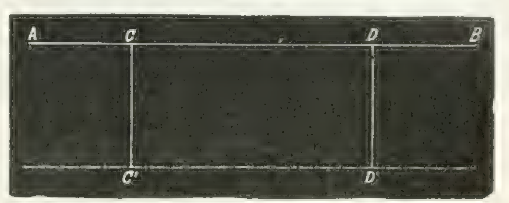


Fig. 220.

b) Lösung ohne Winkelinstrument (Fig. 221).*) Man nimmt in AB ebenfalls zwei Punkte D und E an, steckt eine beliebige Linie CE ab und halbiert sie im Punkte F, steckt sodann die Linie DF ab, verlängert sie nach rückwärts und macht $DF = FG$.



Fig. 221.

Verbindet man dann C mit G, so entstehen die beiden Dreiecke DFE und CFG, welche zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben und daher $\cong$ sind. Daraus folgt, daß $\sphericalangle FCG = \sphericalangle DEF$ und $\sphericalangle CGF = \sphericalangle EDF$. Da aber die Schenkel FE und FC, sowie FD und FG miteinander parallel laufen (indem einer die Verlängerung des anderen bildet), müssen auch die anderen Schenkel DE und CG miteinander parallel sein (Wechselwinkel).

2. Aufgabe: Wie vor, nur befindet sich in der Geraden AB (Fig. 222) ein Zaun, so daß man kein Winkelinstrument in AB aufstellen kann.



Fig. 222.

a) Lösung mittels eines Winkelinstrumentes. Man nimmt ein rechtwinkliges Dreieck (Zimmermannswinkel oder den rechten Winkel einer Setzwage) und errichtet damit in A und B je eine nur so lange Senkrechte AA' und BB', daß man das Winkelinstrument in den Punkten

*) Bei dieser Lösung wird kein bestimmter Abstand m verlangt.

A' und B' bequem aufstellen kann. Mit dem Instrumente errichtet man nun in A' und B' auf die Linie $A'B'$ je eine Senkrechte, macht $AC = BD = m$ und erhält $CD \parallel AB$.

b) Lösung ohne Winkelinstrument (wie bei 1 *b*).

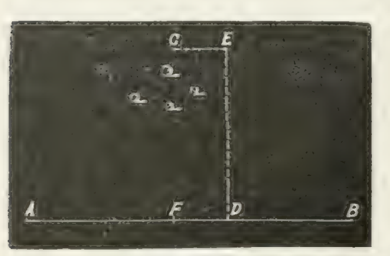


Fig. 223.

3. Aufgabe: Man soll auf eine Gerade AB (Fig. 223), von einem außerhalb liegenden Punkte C eine Senkrechte fällen, wenn der Fußpunkt der letzteren von C aus durch ein Hindernis gedeckt ist.

Man errichtet in irgend einem Punkte D der Geraden AB, aber möglichst nahe an dem Hindernisse vorüber eine Senkrechte auf AB, fällt dann auf diese Senkrechte von C aus eine zweite Senkrechte nach E und trägt die Länge CE von D nach F auf. F ist der gesuchte Fußpunkt.

§ 11. Indirektes (mittelbares) Messen von Längen in der Natur.

Indirekte Längenmessungen kommen für forstliche Zwecke verhältnismäßig selten vor und werden dann gewöhnlich mit genaueren Instrumenten ausgeführt. Wir nehmen daher nur die für uns wichtigen Fälle, d. i. solche Aufgaben vor, die gleichzeitig beim folgenden Paragraph (Abstecken von geraden Linien mit Hindernissen) Verwendung finden.

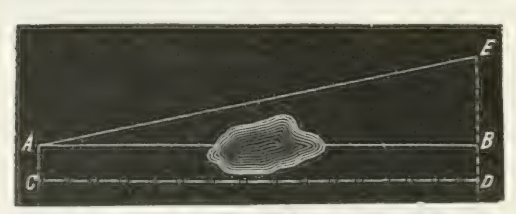


Fig. 224.

1. Aufgabe: Man soll die Länge einer Geraden AB ermitteln, wenn sich in deren Mitte ein Hindernis befindet, über welches von A nach B zwar visiert, aber nicht gemessen werden kann (Fig. 224).

a) Lösung mittels Konstruktion einer Hilfsparallelen.

Man errichtet in A und B mit einem Winkelinstrumente je eine Senkrechte, trägt auf diesen Senkrechten die Strecken $AC = BD$ nur so groß auf, daß die dadurch gebildete Parallele knapp an dem Rande des Hindernisses vorübergeht*), und hat nun $CD = AB$.

b) Lösung mittels des pythagoräischen Lehrsatzes.

Man errichtet in B auf AB mit dem Winkelinstrumente eine Senkrechte bis E so weit, daß die Verbindungslinie mit A ganz nahe an dem Hindernisse vorübergeht.**) Man kann sodann AE und BE messen und hat sonach $AB^2 = AE^2 - BE^2$; $AB = \sqrt{AE^2 - BE^2}$.

2. Aufgabe: Es ist die Länge der an den beiden Enden zugänglichen Geraden AB (Fig. 225) zu messen, wenn sich zwischen den Endpunkten ein Hindernis befindet, über welches von A nach B weder gesehen noch gemessen werden kann.

a) Lösung mittels des pythagoräischen Lehrsatzes.

*) Man macht deshalb die Senkrechten ziemlich kurz, damit ein etwaiger Fehler, der beim Abstecken des rechten Winkels geschieht, möglichst wenig in Betracht kommt, denn je kürzer der Schenkel ist, desto kleiner, im Längenmaße genommen, ist auch die Abweichung von der Senkrechten.

**) Aus demselben Grunde wie bei Anmerkung *).

Man steckt eine möglichst nahe an dem Hindernisse (hier am Hause) vorübergehende Hilfsgerade AC ab, fällt von B aus auf diese Hilfsgerade eine Senkrechte BD, mißt AD und BD und hat dann $AB^2 = AD^2 + BD^2$; $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$.

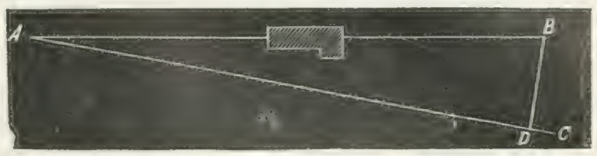


Fig. 225.

b) Lösung mittels der Konstruktion kongruenter Dreiecke. Man nimmt (Fig. 226) den Punkt C an, steckt die Linien AC und BC aus und verlängert sie nach rückwärts, so daß $CD = BC$, $CE = AC$ wird. Es ist dann $\triangle ABC \cong \triangle DEC$, also $AB = DE$, welch letzteres nun gemessen wird.

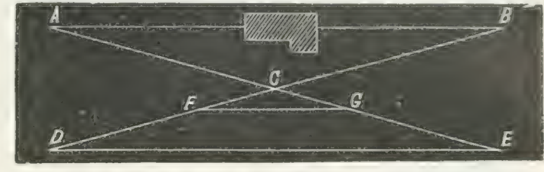


Fig. 226.

c) Lösung mittels der Konstruktion ähnlicher Dreiecke. Man nimmt (Fig. 226) einen Punkt C an, steckt AC und BC ab, verlängert diese Geraden nach rückwärts bis nach F und G und macht je nach dem vorhandenen Raume $CF = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}$ von BC und ebenso $CG = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}$ von AC. Es ist dann $\triangle ABC \sim \triangle FGC$, also auch die Linie $FG = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}$ von AB. AB ist dann gleich $2\,FG$, $3\,FG$, $4\,FG$, $5\,FG \ldots n\,.\,FG$. Man hat also nur FG zu messen und mit 2, 3, 4, 5 ... n zu multiplizieren. Dadurch wird natürlich ein Fehler, der etwa beim Messen von FG gemacht wird, bedeutend vergrößert, weshalb die Messung von FG sehr genau vorgenommen werden muß. In der Regel macht man FC und GC nicht kleiner als den vierten Teil von BC, bezw. AC.

3. Aufgabe: Eine Gerade AB zu messen, wenn nur ein Punkt zugänglich ist, in der Richtung AB aber (Fig. 227 und 228) visiert werden kann.

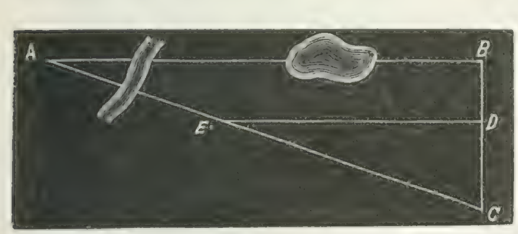


Fig 227.

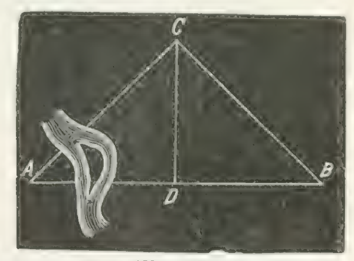


Fig. 228.

a) Lösung mittels rechtwinklig-ähnlicher Dreiecke. (Fig. 227.) Man errichtet in B eine Senkrechte auf AB bis C, steckt von C aus die Gerade CA ab, nimmt auf BC den Punkt D an und errichtet daselbst eine Senkrechte auf BC bis nach E. Es ist dann $\triangle ABC \sim \triangle EDC$, daher $AB : BC = ED : DC$ und hieraus $AB = \frac{BC\,.\,ED}{DC}$.

b) Lösung ebenfalls mittels ähnlicher Dreiecke. (Fig. 228.) Man steckt eine beliebige Gerade BC annähernd unter einem Winkel von 45° gegen AB aus, fällt von A aus eine Senkrechte auf BC und von C aus wieder eine Senkrechte auf AB nach D. Es ist dann $\triangle ABC \sim \triangle BCD$,*) daher $AB : BC = BC : BD$ und hieraus: $AB = \frac{BC^2}{BD}$.

*) Den einen Winkel CBD haben sie gemeinsam und Winkel ACB und CDB sind beide rechte, daher auch einander gleich.

Hätte man den Winkel bei B genau 45⁰ gemacht, dann wäre ABC ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, daher $BD = AD$, oder $AB = 2\,BD$.

§ 12. Das Abstecken von geraden Linien mit Hindernissen.

1. Aufgabe: Es ist ein Grenzgraben behufs Grabenaushubes auszustecken, wenn sich zwischen den beiden Grenzsteinen A und B (Fig. 229) ein Haus befindet, so daß von A nach B nicht gesehen werden kann.

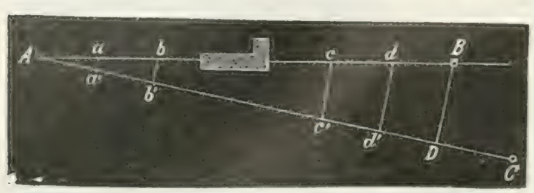


Fig. 229.

Die Lösung ist ähnlich wie bei Aufgabe 2 *a)* in § 11. Man steckt knapp bei dem Hause vorbei eine Hilfsgerade AC aus und fällt von B auf AC die Senkrechte BD. Hierauf nimmt man in der Hilfsgeraden AC mehrere Punkte a', b', c', d' an und errichtet in diesen Punkten mittels eines Winkelinstrumentes Senkrechte auf AC, deren Länge vorläufig unbekannt ist. Sollen die Endpunkte dieser Senkrechten aber in der unbekannten Verbindungslinie AB liegen, so kann man ihre Länge auf folgende Art berechnen:

Es ist $\triangle ADB \sim \triangle Aa'a \sim \triangle Ab'b \sim \triangle Ac'c \sim \triangle Ad'd$. Da nun AD und BD im großen Dreiecke ADB und Aa', Ab', Ac' und Ad' in den kleinen Dreiecken gemessen werden können, so wird man, um die Längen der Senkrechten $a'a$, $b'b$, $c'c$, $d'd$ zu erhalten, folgende Proportionen aufstellen:

$$AD : BD = Aa' : a'a, \text{ woraus } a'a = \frac{BD \,.\, Aa'}{AD},$$

$$AD : BD = Ab' : b'b, \quad " \quad b'b = \frac{BD \,.\, Ab'}{AD},$$

$$AD : BD = Ac' : c'c, \quad " \quad c'c = \frac{BD \,.\, Ac'}{AD},$$

usw. Da in allen diesen Resultaten der Quotient $\frac{BD}{AD}$ vorkommt, so wird man denselben ein- für allemal berechnen und ihn nur immer mit der betreffenden Länge Aa', Ab', Ac', Ad' multiplizieren, um die Längen der einzelnen Senkrechten zu erhalten. Man trägt dann letztere auf und hat sonach in a, b, c, d Punkte der Geraden AB gegeben.

Es würde zwar genügen, nur je einen Punkt vor und hinter dem Hause zu bestimmen, um sodann die Linie von A und B nach dem Hause hin verlängern zu können; der Sicherheit und Kontrolle halber wird man aber gut tun, mehrere Punkte rechnerisch zu ermitteln.

2. Aufgabe: Es ist eine Gerade vom Punkte A nach B abzustecken, wenn die Fläche zwischen A und B (Fig. 230) durchaus mit dichtem Wald bestanden ist.

Bei der Lösung dieser Aufgabe wird vorausgesetzt, daß die Entfernung zwischen A und B nur so groß ist, daß man den kräftigen Ruf eines Menschen noch deutlich vernehmen kann. Der Arbeitsleiter stellt sich alsdann im Punkte A auf und schickt einen Figuranten mit dem Auftrage auf den Punkt B, in nicht zu rascher Aufeinanderfolge kurze und deutliche Rufe (hupp, hupp) eine bestimmte Zeit hindurch von sich zu

geben. Der Arbeitsleiter nimmt hierauf einen Absteckstab, zielt mit demselben wie mit einem Gewehre genau nach der Richtung, aus welcher der Ruf kommt, und visiert einen zweiten Gehilfen mit einem Absteckstabe in die Ziellinie ein. Nur zufällig wird der auf diese Weise eingesteckte Stab genau in der Geraden AB liegen, vielmehr wird er in der Mehrzahl der Fälle etwas abseits dieser Linie, etwa in C eingesteckt werden. Verlängert man nun die sonach durch zwei Absteckstäbe bestimmte Linie AC, indem man alles im Wege stehende Gehölz (Bäume und Astwerk) durch einen schmalen Aufhieb beseitigen läßt, so wird man anstatt im richtigen Punkte B in einem Punkte D neben B herauskommen.

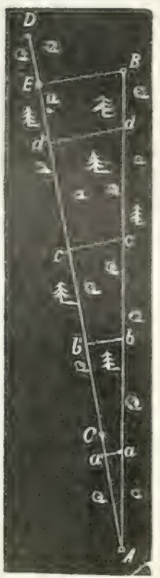


Fig. 230.

Fällt man nun vom Punkte B auf die falsche Linie AD eine Senkrechte BE, so kann man so wie in der 1. Aufgabe aus den falschen Punkten a', b' usw. die richtigen Punkte a, b usw. finden. Der einfacheren Rechnung halber macht man $Aa' = a'b' = a'c' =$ usw. $=$ etwa 50 *m*. Ist das Terrain zwischen A und B jedoch hügelig, so trachtet man, daß die Punkte auf die Rücken und in die Einsenkungen zu liegen kommen und merkt auf den Pflöcken ihre Entfernung von A vor.

Die im vorhergehenden besprochene Aufgabe bezeichnet man gewöhnlich als das Durchpikieren von Linien im Walde. Beim Festlegen der jährlichen Schlaglinien (d. s. die Grenzen der Holzschläge), beim Durchpikieren von Einteilungslinien, sogenannten Schneisen, im Walde, zu welchem das Schutzorgan mitunter aushilfsweise herangezogen wird, beim Aufhiebe von Straßen- und Wegteilen zwischen gegebenen Punkten hat der Forstmann diese Aufgabe immer vor sich. Bei Schneisen wird die pikierte Linie gewöhnlich auf 2 bis 8 *m* Aufhiebsbreite nach einer Seite hin erweitert, indem man in dem genannten Abstande zu der pikierten Linie eine Parallele aussteckt und nun den zwischen beiden Linien befindlichen Streifen des Holzes entledigt. Bei Straßen und Wegen erfolgt der ihrer Breite entsprechende Aufhieb von der Pikierungslinie als Mittellinie nach beiden Seiten.

3. Aufgabe: Im Walde ist eine gerade Linie durchzupikieren, wenn ein Teil dieser Linie bereits ausgesteckt ist, während die weitere direkte Verlängerung derselben durch eine Jagdhütte, einen Kohlenmeiler oder dgl. unmöglich wird.

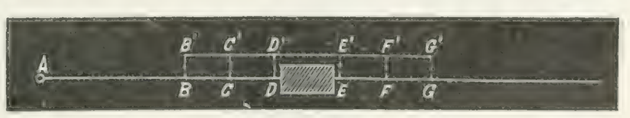


Fig. 231.

Man verlängert die gegebene Richtung bis nahe an das Hindernis in D (Fig. 231), errichtet in den drei etwa 20 *m* voneinander entfernten Punkten B, C, D der Linie AD Senkrechte auf AD und macht dieselben gleich jedoch nur so lang, daß die durch die Endpunkte derselben gehende Linie $B'C'D'$ knapp an der Hütte vorbeigeht. Man verlängert nun die Linie $B'C'D'$ auf eine größere Strecke an dem Hindernisse vorbei (etwa 60 bis 100 *m*) nach rückwärts bis G', errichtet auf die zu AG parallele Linie $B'G'$ in drei Punkten E', F', G' Senkrechte, macht diese in der Richtung gegen die ursprüngliche Linie genau ebenso lang, wie die erstmaligen Senkrechten auf AD und bestimmt so hinter der Hütte drei in der ursprünglichen Richtung von Ab

gelegene Punkte E, F, G, welche man nun für die weitere Rückwärtsverlängerung von AB benützt.

Auch diese Aufgabe kommt in der forstlichen Vermessung beim Auszeigen von Schlaglinien und beim Pikieren von Schneisen öfters vor, besonders wenn man einen starken Stamm, der gerade in der Visur steht, nicht fällen will.

§ 13. Die Methoden der Aufnahme von Grundstücken mit den einfachsten Hilfsmitteln.

Ein Grundstück „aufnehmen" oder „vermessen" heißt nach den Auseinandersetzungen auf Seite 211 und 212 alle jene Bestimmungsstücke in der Natur ermitteln, welche für die geometrische Konstruktion der betreffenden Figur in einem verjüngten Maßstabe erforderlich sind. Die für die Konstruktion notwendigen Bestimmungsstücke findet man je nach der Größe (Ausdehnung) der Figur und der notwendigen Genauigkeit, sowie nach sonstigen Umständen: I. Nach der Koordinatenmethode, II. nach der Dreiecksmethode, III. nach der Umfangsmethode, IV. nach der Polarmethode.

I. Aufnahme eines Grundstückes nach der Koordinatenmethode.

1. Allgemeines.

Der Begriff und Zweck der Koordinaten wurde bereits in der Geometrie Seite 128 hervorgehoben. Gleichwie wir nun an jener Stelle

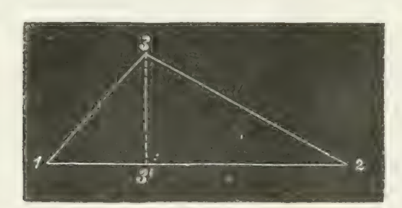


Fig. 232.

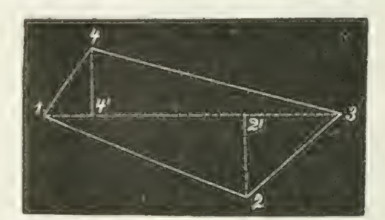


Fig. 233.

behufs Übertragung einer gegebenen Figur mittels Koordinaten in Fig. 74 eine Abszissenachse wählen, auf diese von den einzelnen Winkelpunkten die Ordinaten fällen und letztere sowie die dazugehörigen Abszissen messen mußten, so wird es behufs Übertragung eines Grundstückes in verjüngtem Maße auf das Papier auch erforderlich sein, in der Natur eine Abszissenachse **abzustecken**, die Ordinaten von den einzelnen Punkten auf diese mittels eines Winkelinstrumentes zu fällen und sodann Ordinaten und Abszissen mit Hilfe eines Meßbandes oder dgl. zu messen. Man nennt die Abszissenachse in der Vermessung gewöhnlich **Aufnahms-** oder **Operationslinie**, auch **Aufnahmsachse**, weil sich auf diese Linie die ganze Vermessung bezieht.

Bei der Aufnahme eines **dreieckigen** Grundstückes nach der Koordinatenmethode (Fig. 232) nimmt man die für die Messung am bequemsten gelegene, zugleich aber auch die längste Seite $1\,2$ als Aufnahmslinie an,*) betrachtet 1 als den Anfangspunkt des Koordinatensystems und

*) Damit die Höhe als Ordinate ziemlich kurz wird und ein Fehler in der Absteckung des rechten Winkels weniger in Betracht kommt.

fällt nun von dem gegenüberliegenden Winkelpunkte auf die Achse die Ordinate. Zur Kontrolle ist es zu empfehlen, außer den Koordinaten des für die Konstruktion allein erforderlichen Punktes *3* und der Länge der Aufnahmslinie auch noch die Seitenlängen *1 3* und *2 3* zu messen.

Ein aufzunehmendes Viereck (Fig. 233) zerlegt man durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, betrachtet diese Diagonale als Aufnahmslinie und *1* als den Anfangspunkt. Auch werden zur Kontrolle die Seiten *1 2, 2 3, 3 4, 4 1* gemessen und danach die Richtigkeit der aus den Koordinaten erhaltenen Zeichnung beurteilt.

Bei einem Vielecke (Fig. 234) ist die Lage der Aufnahmslinie im allgemeinen eine beliebige. Es ist jedoch zweckmäßig, sie durch zwei Winkelpunkte der aufzunehmenden Figur zu legen und überdies so zu wählen, daß die Längen der zu bestimmenden Ordinaten (Senkrechten) möglichst kurz ausfallen. Aus diesem Grunde wird die Aufnahmslinie immer in die Richtung der größten Längenausdehnung zu legen sein. Auf die gewählte Aufnahmslinie fällt man aus sämtlichen Punkten die Ordinaten und mißt vom Anfangspunkt *1* aus sämtliche Abszissen und hierauf auch die Längen sämtlicher Ordinaten. Daß auch hier wenigstens bei etwas genaueren Messungen die Längen der einzelnen Seiten zur Kontrolle gemessen werden sollen, ist selbstverständlich.

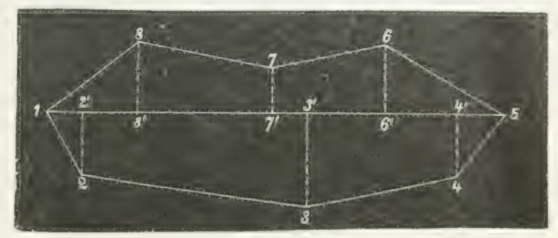


Fig. 234.

2. Praktischer Vorgang bei der Aufnahme eines Grundstückes nach der Koordinatenmethode.

Die Reihenfolge der Arbeiten, welche bei der Aufnahme einer Fläche oder eines Linienzuges nach der Koordinatenmethode vorzunehmen sind, ist folgende: *A.* Das Auspflocken der Punkte und Numerieren derselben mit Zimmermannsbleistift oder blauer Försterkreide. *B.* Die Auswahl der Aufnahmslinie (Achse) und ihre Aussteckung. *C.* Das Fällen der Ordinaten von den einzelnen Winkelpunkten auf die Achse. *D.* Die Messung der Abszissen und Ordinaten. *E.* Die mit der Messung Hand in Hand gehende Anfertigung einer Skizze (oder eines Handrisses) von der aufzunehmenden Fläche in einem Aufnahmsbuche, Manuale, auf Grund welcher Skizze dann erst die genaue Zeichnung der vermessenen Figur auf dem Papiere zu erfolgen hat.

A. Für das Auspflocken der Punkte verwendet man die oben besprochenen Pflöcke, wenn das zu vermessende Objekt nicht durch Grenzsteine, Grenzbäume u. dgl. bezeichnet ist. Die Pflöcke werden nach einem bestimmten Systeme, entweder nur von Westen nach Süden über Osten nach Norden, also entgegengesetzt dem Sinne des Zeigers einer Uhr, oder von Westen über Norden nach Osten und Süden numeriert, und zwar gewöhnlich mit arabischen Ziffern. Die Anwendung römischer Ziffern oder gar von großen lateinischen Buchstaben ist für die Zwecke der Vermessung mit Koordinaten nicht gebräuchlich.

B. Die Aufnahmslinie wird nach den im vorhergehenden unter 1 dargestellten Gesichtspunkten ausgewählt und in den Anfangs- und

Endpunkten sowohl, als auch in mehreren eventuell noch erforderlichen, genauestens einvisierten Zwischenpunkten durch Absteckstäbe u. dgl. deutlich markiert.

C. Das Fällen der Ordinaten geschieht in ähnlicher Weise, wie im § 8 dargestellt wurde. In jedem Fußpunkte wird ein kleiner Pflock eingeschlagen, der für den Winkelpunkt *1* mit *1'*, für den Winkelpunkt *2* mit *2'* usf. bezeichnet wird.

D. Das Messen der Abszissen und Ordinaten. Hiezu verwendet man gewöhnlich ein Leinenmeßband. oder wenn eine größere Genauigkeit verlangt wird, ein Stahlmeßband. Die Abszissen werden immer von einem und demselben Punkte aus gemessen, also z. B. in Fig. 234 durchaus von dem Punkte *1* angefangen und nicht etwa von Fußpunkt zu Fußpunkt. denn hiebei würden sich die Fehler mehr anhäufen. Man legt zu diesem Zwecke das Meßband in der Richtung *1 5* an, steckt bei 20 *m* einen Kettennagel ein und liest nun am Meßbande die Abszissen der Fußpunkte, welche innerhalb der ersten Meßbandlänge liegen, ab. Sodann überträgt man das Band um eine Länge weiter und liest innerhalb dieser zweiten Länge wieder sämtliche Fußpunktentfernungen unter Zuschlag der ersten 20 *m* ab, so daß sämtliche Abszissen von *1* aus genommen erscheinen. Die Ordinaten werden ebenfalls mit dem Meßbande vom Fußpunkte aus gemessen, bei kurzen Ordinaten aber noch zweckmäßiger mit einer Meßlatte.

E. Die Anfertigung einer Skizze oder eines Handrisses von der aufzunehmenden Fläche. Zu diesem Zwecke muß man bei dem Vermessen folgende Utensilien mit sich führen: *a)* Einen Bleistift, mittelhart, d. i. am besten einen Faberschen oder Hardtmuthschen Stift Nr. 3. *b)* Zwei kleine 45° Dreiecke,*) wovon eine Kathete etwa 6 bis 8 *cm* lang ist. *c)* Ein unliniiertes Skizzenbuch (Manuale) in Oktavformat mit festen Einbanddecken. *d)* Einen Maßstab, und zwar einen gewöhnlichen Zimmermannsmaßstab oder noch besser einen Maßstab von der Form eines dreikantigen Prisma von zirka 40 *cm* Länge (Fig. 235) mit sechs verschiedenen Verjüngungsmaßstäben, von denen je zwei auf einer Prismafläche sich befinden.

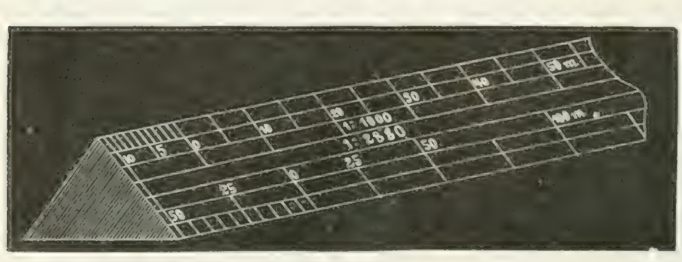


Fig. 235.

Der Geometer verzeichnet in das Skizzenbuch oder Manuale vorerst die Richtung der Aufnahmslinie, und zwar so, daß nach dem Augenmaße gerechnet, die ganze Figur auf einer Seite Platz findet. Hienach ist auch der Anfangspunkt der Koordinaten, in unserem Falle (Fig. 236) der Winkelpunkt *1*, auf dem Papiere anzunehmen, sowie auch die Größe des für die Skizze dienenden Verjüngungsverhältnisses zu wählen. Hat man einen verjüngten Maßstab nicht zur Hand, so zeichnet man unter Zuhilfenahme eines Zimmermannsmaßstabes einen einfachen Verjüngungsmaßstab (ohne Transversalen, siehe Seite 214) in das Skizzenbuch ein. Die Längen der Abszissen und Ordinaten werden nun sofort nach erfolgter Messung in

*) In vielen Fällen muß man sich wohl auch ohne Dreiecke behelfen.

verjüngter Größe ohne Anwendung eines Zirkels in die Skizze eingezeichnet und ihrer Größe nach eingeschrieben. Auf die Einzeichnung der Ordinaten ist stets die größte Sorgfalt zu verwenden und es ist insbesondere darauf zu achten, daß nicht etwa eine Ordinate, welche in der Natur nach der linken Seite hin verläuft, am Papier auf die rechte Seite gezogen werde. Die Längen der Abszissen werden an die Fußpunkte der Ordinaten geschrieben, die Längen der Ordinaten an die Winkelpunkte selbst. Die Bezeichnung der Fußpunkte auf der Skizze (in unserem Falle 1′, 2′, 3′ usw.) unterbleibt, um die Übersichtlichkeit durch zuviele Ziffern und Buchstaben nicht zu erschweren. Die eventuell zur Kontrolle gemessenen Seitenlängen der aufzunehmenden Figur werden in der Längsrichtung der Seiten parallel mit diesen eingeschrieben. Endlich zeichnet man unter Zuhilfenahme eines kleinen Kompasses, den man bei sich trägt, oder nach dem Stande der Sonne die Nordrichtung in die Skizze mit einem Striche und Pfeile ein.

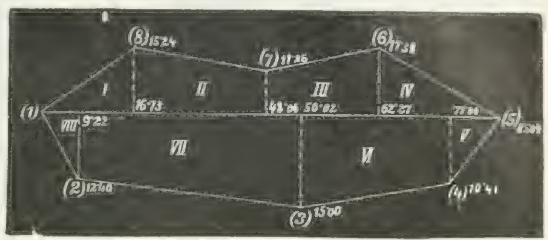


Fig. 236.

Die genaue Verzeichnung der vermessenen Figuren erfolgt auf Grundlage der Skizze im Zimmer unter Anwendung eines Zirkels und genauer Transversalmaßstäbe, sowie der sonst notwendigen Requisiten, worüber auf Seite 293 und 294 das Nötige gesagt wird.

3. Kurze Andeutung für die Aufnahme krummer Linien, der Straßen und Wege, ferner der Bäche und Gräben nach der Koordinatenmethode.

Um eine krumme Linie mittels Koordinaten vermessen zu können, wählt man in ihr so viele Punkte, daß die zwischen je zwei Bogenpunkten befindliche Sehne von dem Bogen nicht merklich abweicht; man wird daher in flachen Krümmungen weniger Punkte, in starken Krümmungen dagegen mehr Punkte wählen müssen.

Bei Straßen und Wegen vermißt man nur die eine Seite mittels Koordinaten, für die Eintragung der anderen mit der ersten in der Regel parallelen Seite in die Karte aber genügt es, stellenweise die Breite der Straße zu messen und in die Skizze und Karte einzutragen. Nur in dem Falle, als mit der anderen Seite der Straße zusammenfallende und für die Vermessung belangreiche Objekte, wie Grenzsteine, Häuser u. dgl. vorhanden sind, müssen diese ebenso wie die erste Seite der Straße mittels Koordinaten eingemessen werden. Die Breite der Straße ist einschließlich der Straßengräben zu nehmen.

Bäche und Gräben werden ebenso aufgenommen wie Straßen und Wege; als Begrenzung des Baches oder Grabens ist hiebei jene Stelle zu betrachten, an welcher die Uferböschung beginnt. Im Falle die Böschung sehr flach und der Beginn derselben nicht ausgesprochen ist, wird die Begrenzung des Baches dort angenommen, bis wohin der angeschwemmte oder der mit Geröll bedeckte Boden reicht. Bei Aufnahme von Flüssen sind selbstverständlich beide Ufer gesondert mittels Koordinaten aufzunehmen, die aber dann wegen der Unmöglichkeit, die Ordinaten messen zu können, gewöhnlich auf zwei verschiedene Aufnahmsachsen bezogen werden müssen.

II. Die Aufnahme eines Grundstückes nach der Dreiecks-Methode.

Aus der Geometrie (Seite 116) ist bekannt, daß ein Dreieck aus seinen drei Seiten vollkommen bestimmt ist. Wenn man daher ein Grundstück in Dreiecke zerlegt und sämtliche Seiten der so entstandenen Dreiecke mißt, so kann man das ganze Grundstück auf dem Papiere im verjüngten Maßstabe verzeichnen und die Fläche desselben berechnen. Dieser Vermessungsvorgang, welcher auf der Bestimmung der einzelnen Punkte einer Figur durch die Konstruktion von Dreiecken beruht, wird als Dreiecksmethode bezeichnet.

A. So läßt sich in Fig. 237 das Viereck $ABCD$ dadurch vermessen, daß man in der Natur die Diagonale BD absteckt und sowohl diese als auch die vier Seiten mißt. Auf dem Papiere ist dann die Figur durch die Konstruktion der beiden Dreiecke DBC und DBA gegeben.

B. Das Polygon in Fig. 238 läßt sich durch Absteckung der Diagonalen DF, DA und DB in vier Dreiecke *I*, *II*, *III*, *IV* zerlegen, aus denen sich die Figur durch Messung dieser Diagonalen und der Polygonseiten leicht konstruieren läßt. Man geht hiebei in der Weise vor, daß

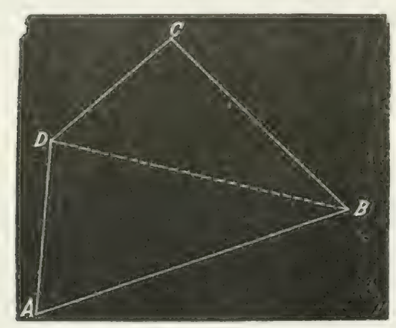


Fig. 237.

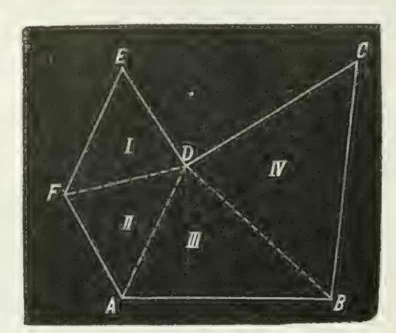


Fig. 238.

man in unserem Falle vorerst über der Diagonale DF die Dreiecke *I* und *II* konstruiert, sodann über der folgenden Diagonale DA das Dreieck *III* und über der letzten Diagonale DB endlich das Dreieck *IV* verzeichnet. Diese Art Konstruktion hat den Nachteil, daß sich infolge des Aufbaues der einzelnen Dreiecke immer aus den vorher konstruierten die unvermeidlichen Fehler in die folgenden, und zwar um so mehr fortpflanzen, je mehr Dreiecke konstruiert werden, denn das letzte Dreieck birgt dann zweifelsohne die Fehler sämtlicher vorhergegangener Messungen. Man sucht deshalb diesem Übelstande dadurch entgegenzutreten, daß man

C. über das ganze Polygon ein großes Dreieck ACE sich gelegt denkt (Fig. 239), dieses große Dreieck sehr genau vermißt und dann an die erhaltenen Punkte A, C, E die übrigen Polygonpunkte durch Bildung kleiner Dreiecke anschließt, also kurz vom Großen ins Kleine arbeitet. In unserem Falle würde man auf Grundlage des großen Dreieckes ACE die kleinen Dreiecke ACB, ECD und AEF aufbauen und hiedurch die Punkte B, D und F bestimmt erhalten. Den Polygonpunkt G kann man zweckmäßig durch Messung des kleinen Dreieckes AFG und zur Kontrolle wohl auch des kleinen Dreieckes FEG erhalten. Bei der Auswahl des großen Dreieckes, dessen Endpunkte wir als „Punkte erster Ordnung" bezeichnen können,

sowohl als auch bei der Auswahl der kleinen Dreiecke, deren Eckpunkte als „Punkte zweiter Ordnung" angesprochen werden können, ist

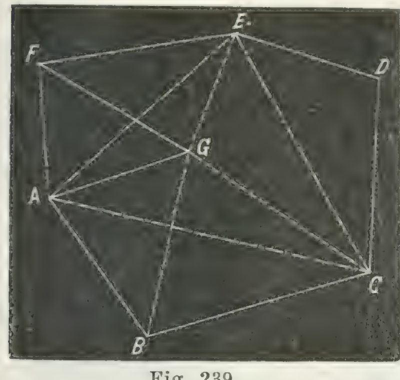


Fig. 239.

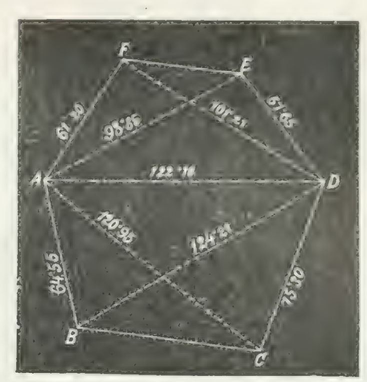


Fig. 240.

darauf zu achten, daß nach Tunlichkeit gleichseitige Dreiecke gebildet werden, denn durch die Konstruktion zu spitzer oder zu stumpfer Winkel ergeben sich sehr unzuverlässige Schnittpunkte.

In manchen Fällen erscheint es zweckdienlich, die Bildung eines großen Dreieckes zu umgehen und

D. die Dreiecke so zu wählen, daß sie sämtlich eine und dieselbe passend angenommene und genauestens gemessene Basis besitzen, daß also eine Übertragung des Fehlers von einem Dreiecke auf das andere nicht möglich ist. Man bezeichnet diese Basis dann als Standlinie und den hierauf gegründeten Aufnahmsvorgang auch wohl als die Standlinien-Methode.

Hätten wir nach dieser Methode das Polygon $ABCDEF$ (Fig. 240) zu vermessen, so erschiene es zweckmäßig, die Diagonale AD als Standlinie anzunehmen und den Punkt B aus dem Dreiecke ADB, den Punkt C aus dem Dreiecke ADC, den Punkt E aus dem Dreiecke ADE und den Punkt F aus dem Dreiecke ADF zu bestimmen.

Auch bei der Vermessung eines Grundstückes nach der Dreiecks- und der Standlinienmethode ist selbstverständlich die Führung eines Manuales erforderlich. Man schreibt die Längen der einzelnen Seiten in die Längsrichtung der betreffenden Linien, wie dies die Fig. 240 ersichtlich macht.

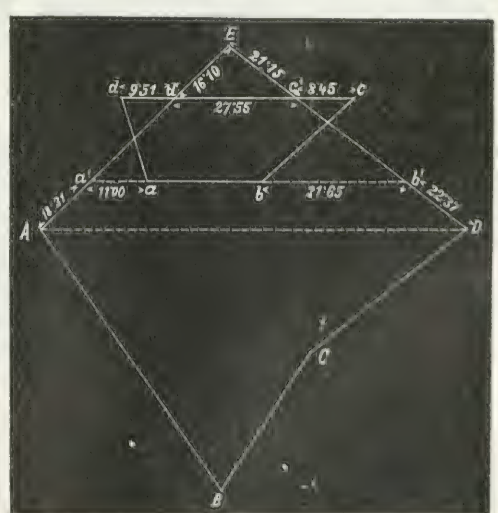


Fig. 241.

E. Einen besonderen Fall stellt die Aufgabe dar, wenn z. B. innerhalb des Polygons $ABCDE$ (Fig. 241) noch die Wiesenfläche $abcd$ einzumessen ist. Ist ein Winkelspiegel oder ein Winkelkreuz vorhanden, so kann man sich die Polygonseiten AE und DE, sowie die Diagonale AD als je eine Auf-

nahmslinie vorstellen, die Punkte a und b auf die Diagonale AD, den Punkt c auf die Polygonseite DE und den Punkt d auf die Polygonseite AE beziehen und mittels Abszissen und Ordinaten einmessen. Steht aber kein Winkelinstrument zur Verfügung, so kann man sich in folgender Weise behelfen: Zur Bestimmung der Punkte a und b verlängert man mittels Absteckstäben die Linie ab bis zum Schnittpunkte mit AE, beziehungsweise DE und mißt die Strecken Aa' und Db', ferner $a'a$ und $b'b$ und zur Kontrolle auch die Länge ab. Behufs Einmessung der Punkte c und d sucht man die Schnittpunkte c' und d' der Linie cd mit den Polygonseiten DE und AE und mißt $d'E$ und $c'E$, ferner cc' und dd'. Die einzumessenden Punkte werden hier im wesentlichen ebenfalls durch die Konstruktion von Dreiecken bestimmt und in ein vorhandenes größeres Dreieck gewissermaßen eingebunden. Aus diesem Grunde bezeichnet man diese Methode zur Vermessung untergeordneter Punkte auch als Einbindemethode. Daß auch hier die Führung eines Manuales unerläßlich und genauestens zu handhaben ist, braucht wohl nicht erst betont zu werden. Die einzelnen Längen werden hiebei in der Längsrichtung der betreffenden Linien eingetragen, wie dies aus Fig. 241 ersichtlich ist.

III. Die Vermessung eines Grundstückes nach der Umfangsmethode.

Kann man das Innere eines Grundstückes aus irgend einem Grunde nicht betreten (Teich, Sumpf, angebautes Feld), dann legt man sich um

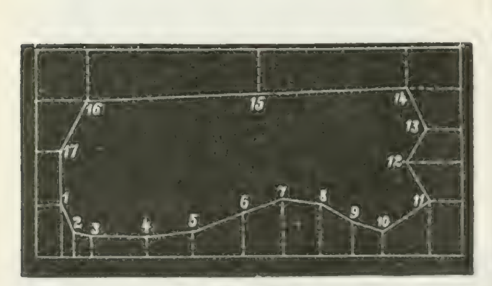


Fig. 242.

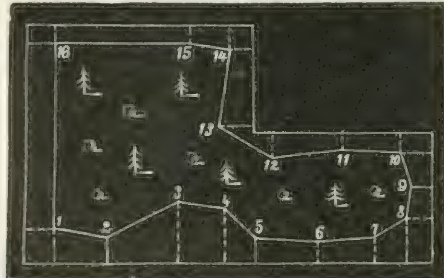


Fig. 243.

dasselbe mit Hilfe eines Instrumentes zum Abstecken rechter Winkel ein Rechteck (Fig. 242) oder eine andere Figur mit lauter rechten Winkeln (Fig. 243), betrachtet die Seiten dieser Figur als Aufnahmslinien und mißt die einzelnen Umfangspunkte des Grundstückes mittels Abszissen und Ordinaten ein, nachdem man vorher die herumgelegte Hilfsfigur genau aufgenommen hat. In diesem Falle ist die Umfangsmethode eine Anwendung der Koordinatenmethode.



Fig. 244.

Ist es jedoch wegen der Beschränktheit des Raumes nicht möglich, ein Polygon um das aufzunehmende Grundstück zu legen, dann bleibt nichts übrig, als alle Seiten und alle Winkel zu messen, letztere mit Hilfe ihrer Sperrmaße, welche in solchen Fällen nicht von den inneren, sondern von den äußeren Polygonwinkeln genommen werden (Fig. 244). Wegen der geringen Genauigkeit hat diese Art der Vermessung nur eine

beschränkte Anwendbarkeit. — Wie man ein Polygon aus dem Umfange mit Hilfe von Winkelmeßinstrumenten aufnimmt, wird später gezeigt werden.

IV. Die Vermessung eines Grundstückes nach der Polarmethode.

Ist $ABCDE$ (Fig. 245) ein Polygonzug und P ein fixer Punkt, von dem aus man nach allen Polygonpunkten sehen und messen kann, so ist die Lage der letzteren untereinander und zu dem fixen Punkte P eindeutig bestimmt, wenn die Entfernungen PA, PB, PC, PD, PE und sämtliche der im Punkte P gebildeten Winkel APB, APC, APD, APE gemessen werden; man kann nämlich dann auf Grundlage eines genau geführten Manuales, aus welchem die Längen der einzelnen Visuren und die genannten Winkel ersichtlich sind, eine verjüngte Zeichnung zuhause anfertigen, indem man zuerst die Länge PA aufträgt, und an diese Richtung den Winkel APB anschließt, sodann auf dem erhaltenen Schenkel die Länge PB aufträgt, weiters an AP den Winkel APC anträgt, auf dem erhaltenen Schenkel die Länge PC absticht usw. Die um P liegenden Winkel werden von einer Visur aus gemessen, in unserem Falle von PA angefangen, und nicht etwa von Visur zu Visur, damit eine Fehleranhäufung vermieden wird.

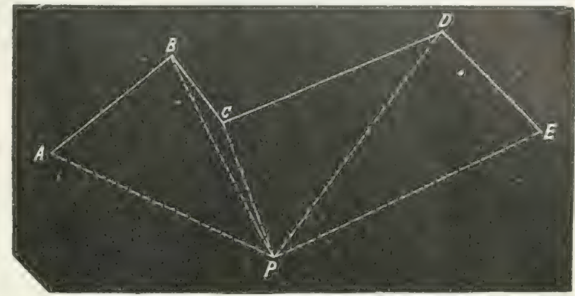


Fig. 245.

Diesen Vermessungsvorgang, bei welchem alle festzulegenden Punkte auf einen und denselben Bestimmungspunkt bezogen werden, bezeichnet man als die Polarmethode. Der Punkt P heißt der Pol, und die einzelnen, nach den festzulegenden Punkten abgesteckten oder gezogen gedachten Visuren die Rayons.*) Es ist hiebei nicht notwendig, daß alle zu vermessenden Punkte auf einen und denselben Pol bezogen werden, sondern man kann in dem Falle, als nicht alle Punkte von demselben Pole aus sichtbar wären, oder als von dem ersten Punkte die Rayons zu lang ausfallen würden, auch noch weitere Pole wählen, nur müssen diese Pole dann mit dem ersten Pole in einem eindeutig bestimmten Zusammenhange stehen. Es muß also (Fig. 246) für die Benützung eines zweiten Poles Q, auf welchen die Polygonpunkte F, G, H, J, K bezogen werden, noch die Länge QP und der Winkel APQ gemessen werden; für alle weiteren Winkelmessungen wird dann vorteilhaft die Linie PQ als ein Schenkel angenommen.

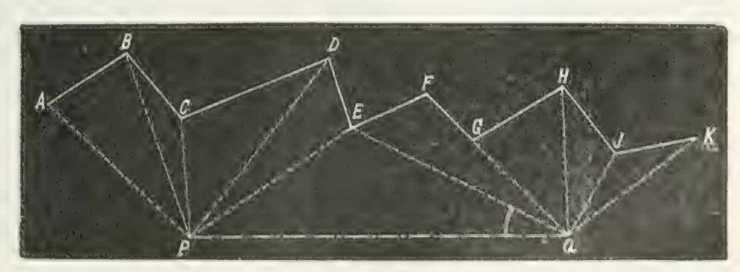


Fig. 246.

*) Rayon = Strahl, aus dem Französischen.

Wie Polygonzüge, so lassen sich auch geschlossene Polygone mittels der Polarmethode aufnehmen, indem man am besten in der Mitte des Polygons einen Pol annimmt, von welchem aus sämtliche Eckpunkte sichtbar sind. Die Messung der Winkel erfolgt, unter Voraussetzung, daß kein Winkelmeßinstrument zur Verfügung steht, durch Messung sämtlicher Dreieckseiten, in welchem Falle dann diese Methode in die Dreiecksmethode übergeht.

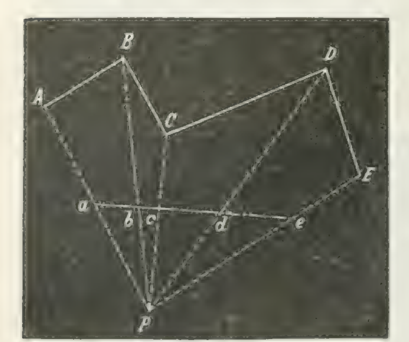


Fig. 247.

Man kann sich aber hiebei auch vorteilhaft der sogenannten Transversalmethode bedienen, indem man (Fig. 247) auf den Endstrahlen *PA* und *PE* zwei Punkte *a* und *e* annimmt, die Schnittpunkte der hiedurch bestimmten Transversalen mit den Strahlen *PB*, *PC* und *PD* in *b*, *c*, *d* ermittelt und nun nebst den Strahlen *PA*, *PB*, *PC*, *PD*, *PE* auch die abgeschnittenen Strahlenstücke *Pa*, *Pb*, *Pc*, *Pd*, *Pe*,*) sowie die auf der Transversalen entstandenen Stücke *ab*, *ac*, *ad*, *ae* mißt. Wie die Verzeichnung der so aufgenommenen Figur auf dem Papiere zu geschehen hat, ist wohl aus dem Vorhergehenden und aus der Zeichnung ersichtlich.

§ 14. Die Anwendung der einzelnen Vermessungsmethoden in bestimmten Fällen.

Obwohl schon bei Besprechung der einzelnen Vermessungsmethoden teilweise auf ihre Anwendung hingewiesen wurde, so erscheint es doch zur Klärung des Verständnisses geboten, nochmals im Zusammenhange diesem Gegenstande näher zu treten und denselben an der Hand von bestimmten Fällen erweiternd zu behandeln. Die einschlägigen Aufgaben können hiebei in zwei Gruppen gegliedert werden, nämlich I. in solche, die unter alleiniger Anwendung einer bestimmten Vermessungsmethode gelöst werden können, und II. in solche, bei welchen die gleichzeitige Anwendung mehrerer Methoden vorteilhafter zum Ziele führt. Darüber, welche Methode in jedem einzelnen Falle anzuwenden ist, läßt sich keine Regel aufstellen, und es ist hiefür ausschließlich das Verständnis und der Scharfsinn des Vermessenden maßgebend.

I. Die alleinige Anwendung nur einer Aufnahmsmethode.

1. Die alleinige Anwendung der Koordinatenmethode. Dieselbe kommt in Betracht: *a)* Bei der Aufnahme von Wiesen, Feldern, Weiden und holzfreien Waldteilen (Schlägen), die ein schmales Polygon bilden, so daß die Aufnahmsachse in dessen Längsrichtung durch zwei Eckpunkte gelegt werden kann und die einzelnen Ordinaten nicht zu lang ausfallen. *b)* Bei der Aufnahme von Grenzteilen, deren Winkelpunkte auf eine einzige Aufnahmsachse bezogen werden können, die entweder

*) Für die Zeichnung sind von *Pa*, *Pb*, *Pc*, *Pd*, *Pe* nur *Pa* und *Pe* notwendig; *Pb*, *Pc* und *Pd* sind nur Kontrollängen.

ganz außerhalb der Grenzlinie angenommen wird, oder durch einen oder zwei Punkte derselben geht. c) Bei Teilen von Wegen und Bächen, die sich ebenfalls mittels einer einzigen Achse aufnehmen lassen, ferner bei Schlaglinien (Grenzen der Holzschläge) im Walde, welche mehrfache Brechungen aufweisen, aber doch auf nur eine Aufnahmsachse bezogen werden können. Diesen letzteren Fall mag folgende Aufgabe näher erklären: An einer Berglehne wurde anschließend an eine 6jährige Kulturfläche im Jahre 1895 ein Schlag geführt, Fig. 248, der oben am Rücken durch den mit der Bezeichnung $\frac{5}{A}$, $\frac{6}{A}$ usw. versehenen Wirtschaftsstreifen*) (A), unten durch die versteinte Eigentumsgrenze 15 bis 19 und auf der Westseite durch die gebrochene Schlaglinie $\frac{6}{A}$ bis 3 begrenzt wird. Man soll die letztgenannte Schlaglinie mittels der Koordinatenmethode zwecks Einzeichnung in die Karte aufnehmen. Zu diesem Behufe steckt man eine Aufnahmsachse durch den Grenzstein *17* und einen oben angenommenen Punkt x aus und bezieht auf diese Achse die Eckpunkte der Schlaglinie $\frac{6}{A}$, *1*, *2*, *3*, durch Koordinaten genau nach demselben Vorgange, wie dies Seite 244 u. f. auseinandergesetzt wurde. Als Anfangspunkt der Koordinaten wählt man am besten den Grenzstein *17* und macht von der Aufnahme eine deutliche Skizze.

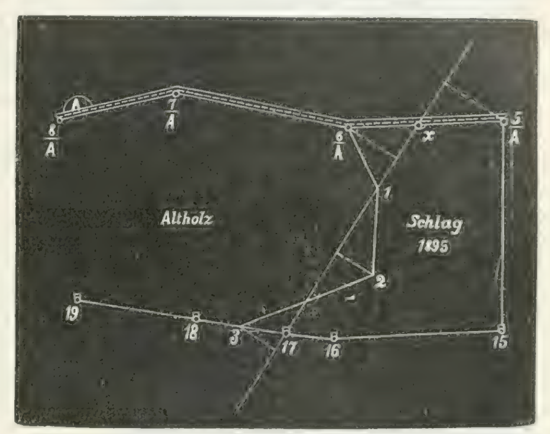


Fig. 248.

2. Die alleinige Anwendung der eigentlichen Dreiecks- und der Standlinienmethode für unsere Zwecke beschränkt sich auf solche im Innern zugängliche Grundstücke, welche Polygone mit wenigen, aber verhältnismäßig langen Seiten bilden und gleichzeitig möglichst genau vermessen werden sollen. Die Figuren 237 bis 240 geben Beispiele für solche Fälle. Übrigens werden öfters mit Vorteil auch Teile von Grenzzügen von einer einzigen Standlinie auch nach der Standlinienmethode aufgenommen werden können, wobei dann die Standlinie entsprechend weit außerhalb des Grenzzuges anzunehmen sein wird.

3. Die alleinige Anwendung der Umfangsmethode ist geboten, wenn Grundstücke, die im Innern keine Übersicht gewähren, wie kleinere Wälder, oder im Innern nicht betreten werden dürfen, wie bebaute Felder und Gärten, aufgenommen werden sollen. Bei lediglicher Anwendung von Längenmeßgeräten können hiebei nur kleine Grundstücke mit wenigen Winkelpunkten in Betracht kommen, da sonst die Anhäufung der unvermeidlichen Vermessungsfehler am Schlusse der Messung eine zu große wäre.

4. Die alleinige Anwendung der Polarmethode ist unter Zuhilfenahme von Winkelinstrumenten in mannigfachen Fällen am Platze.

*) Das ist eine sogenannte Hauptschneise, welche in unserem Falle durch die Sicherheitssteine $\frac{5}{A}$, $\frac{6}{A}$ usw. dauernd festgelegt erscheint.

So bei der Aufnahme von Waldwiesen, Weiden, Holzschlägen u. dgl. von nicht gar großer Ausdehnung, die von einem Punkte im Innern die freie Sicht zu sämtlichen Winkelpunkten gestatten, wie in Fig. 249; ferner bei der Aufnahme von Teilen von Grenzzügen, innerhalb welcher Wald oder bebaute Felder oder Gärten sich befinden, und endlich bei der Vermessung von Teilen mannigfach gekrümmter Bach- und Wegstrecken u. dgl. Steht jedoch kein Instrument zur Messung beliebiger Winkel zur Verfügung, so hat die Polarmethode nur eine beschränkte Anwendung.

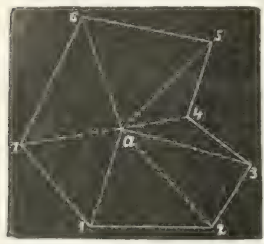


Fig. 249.

II. Die gleichzeitige und sich gegenseitig ergänzende Anwendung mehrerer Aufnahmsmethoden.

1. Die Dreiecksmethode in Verbindung mit der Koordinatenmethode.

a) Unter Anwendung nur eines Dreieckes bei kleinen Grundstücken mit vielen Winkelpunkten oder solchen ausgedehnteren Grund-

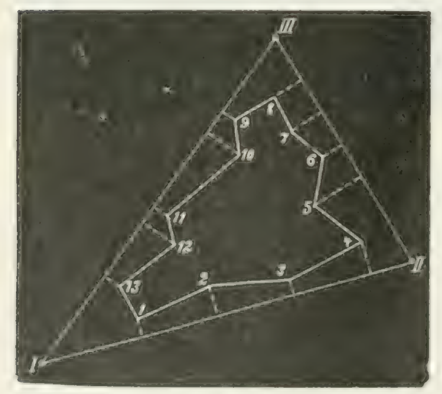


Fig. 250.

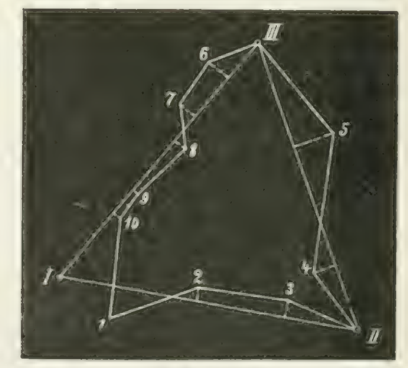


Fig. 251.

stücken (etwa bis zu 200 bis 300 *m* Länge), welche sich an die Gestalt eines Dreieckes anschmiegen lassen. In solchen Fällen legt man entweder außerhalb des zu vermessenden Grundstückes ein Dreieck, Fig. 250, und bezieht nun auf die einzelnen Dreieckseiten als Aufnahmsachsen die vorhandenen Polygonpunkte, oder man legt das Dreieck so, daß ein, zwei oder selbst alle drei Dreieckspunkte mit Punkten des Grundstückes zusammenfallen (Fig. 251) und bezieht alle übrigen Punkte des Grundstückes auf die so gebildeten Aufnahmslinien.

b) Unter Anwendung mehrerer Dreiecke oder eines Dreiecksnetzes, wenn Übersicht bietende Grundstücke vorliegen, deren Begrenzung sich nicht an ein einziges Dreieck anschmiegen läßt und die außerdem auch schon eine größere Ausdehnung einnehmen (etwa 200 bis 300 *m* und mehr). Das Dreiecksnetz legt man möglichst anschließend über die Aufnahmsfiguren und vermißt es entweder nach Art des Vorganges in

Fig. 238 oder nach Art von Fig. 239, wie dies Fig. 252 zeigt, oder endlich auch nach Art der Standlinienmethode wie in Fig. 240.

In allen unter *a)* und *b)* genannten Fällen bildet das Dreieck oder das Dreiecksnetz gewissermaßen einen Rahmen oder ein Gerippe, in welches das betreffende Grundstück förmlich eingezwängt ist und auf dessen Grundlage sich die ganze Vermessung aufbaut. Man nennt daher diejenigen Punkte, welche dem Dreiecksnetze angehören, Hauptpunkte und beziffert sie gewöhnlich mit römischen Ziffern oder großen Lateinbuchstaben. Im Gegensatze hiezu bezeichnet man jene Punkte, welche mittels Koordinaten eingemessen werden, als Detailpunkte und benennt und beschreibt sie gewöhnlich mit arabischen Ziffern oder seltener mit kleinen Lateinbuchstaben. Übereinstimmend mit dieser Unterscheidung wird die Aufnahme des Netzes als Hauptvermessung, die Aufnahme der Detailpunkte oder kurz des Details als Detailvermessung bezeichnet.

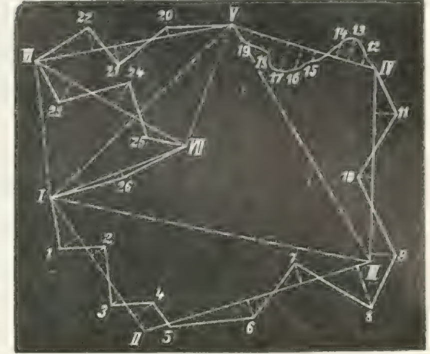


Fig. 252.

Es ist einleuchtend, daß das Netz, auf welchem die ganze Vermessung aufgebaut wird, besonders genau vermessen werden muß und daß man bei der Einmessung des Details ein größeres Fehlerprozent zulassen kann. Es werden deshalb die Netzlinien für unsere Zwecke mit einem verläßlichen Meßbande, mit der Meßlatte oder mit einer richtigen Kette zwei- bis dreimal gemessen, während die Detailpunkte gewöhnlich nur mit dem Leinenmeßbande durch einmalige Messung gefunden und durch entsprechende Kontrollmaße, die zum Teile ohnehin durch das Netz gegeben sind, auf ihre Richtigkeit untersucht werden.

2. Die Dreiecksmethode in Verbindung mit der Einbinde- und Polarmethode.

a) Die Vereinigung der Dreiecks- und Einbindemethode erhellt aus Fig. 253. Das Dreieck bildet hier das Netz und das einzubindende Grundstück das Detail.

b) Die Polarmethode kann im Anschlusse an jede Aufnahmsachse eines Dreiecksnetzes stattfinden, und zwar sowohl dann, wenn es sich nur um Teile von Detailpolygonzügen oder auch um ganze geschlossene Detailpolygone handelt.

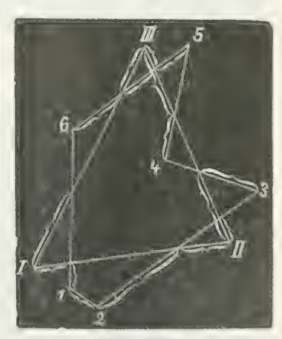


Fig. 253.

3. Die Umfangsmethode in Verbindung mit der Koordinaten-, Einbinde- und Polarmethode.

a) Eine einfache Verbindung der Umfangs- mit der Koordinatenmethode ist aus den Figuren 242, 243 zu ersehen und dortselbst (Seite 250) erläutert. Auch Fig. 250 und 251 zeigt eine ähnliche Verbindung. Hat man ein Winkelinstrument zur Verfügung oder lassen sich (bei kleinen Flächen) mit hinreichender Genauigkeit Sperrmaße anwenden, so legt man möglichst angeschmiegt an die Aufnahmsfigur (ein kleiner Wald,

Teich u. dgl.), Fig. 254, ein Polygon mit wenigen Ecken und nach Tunlichkeit langen Seiten und bezieht auf dieses Polygon als Hauptvermessung die Punkte des Grundstückes als Detail. Die Anwendung der Umfangsmethode und der Koordinatenmethode bei nicht geschlossenen Polygonzügen ist aus Fig. 255 zu ersehen, in welcher ein Holzausfuhrweg in den mittels Sperrmaßen aufgenommenen Polygonzug *I* bis *IV* mit Koordinaten eingemessen wird.

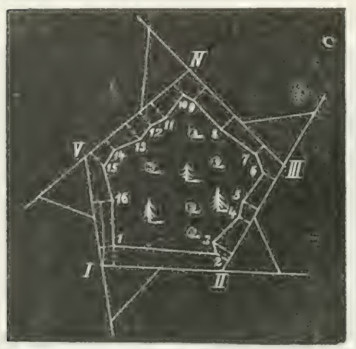


Fig. 254.

b) Die Einbindemethode kann man genau in derselben Weise mit der Umfangsmethode verbinden, wie dies bezüglich der Dreiecksmethode gesagt wurde, denn je drei nach der Umfangsmethode aufgenommene Punkte bilden in ihrer Verbindung ja ebenfalls ein Dreieck. Speziell bei Aufnahmen im Walde kommt dieser Fall öfters vor, weshalb zwei Beispiele im besonderen noch angeführt werden sollen.

aa) In der Richtung (A) (A) (Fig. 256) verläuft ein durch die Steine $\frac{3}{A}$, $\frac{4}{A}$, $\frac{5}{A}$ usw. markierter Rücken, von dem aus nach abwärts eine bewaldete Berglehne bis zur Waldgrenze abdacht, die durch die Grenzsteine von *15* bis *20* bezeichnet ist. Im Jahre 1895 wurde die schraffierte Fläche $a\frac{5}{A}19\,b$ abgeholzt, die nun zu vermessen und in die Karte einzutragen ist.

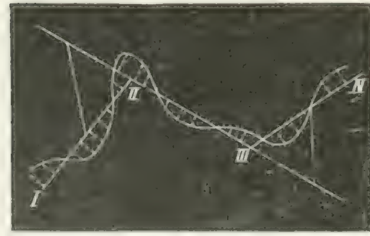


Fig. 255.

Zu diesem Zwecke mißt man von $\frac{5}{A}$ bis *a* z. B. 54·25 *m*, ferner vom Grenzstein *19* bis *b* 50·15 *m* ab. Da die übrigen Punkte schon in der Karte vorhanden sind, so braucht man die gemessenen Längen in dem zugehörigen Verjüngungsmaßstabe nur in die Karte einzutragen und die so erhaltenen Endpunkte miteinander zu verbinden, um die neue Schlaglinie *ab* auf dem Papiere zu erhalten.

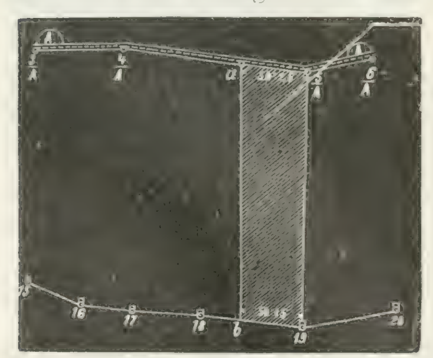


Fig. 256.

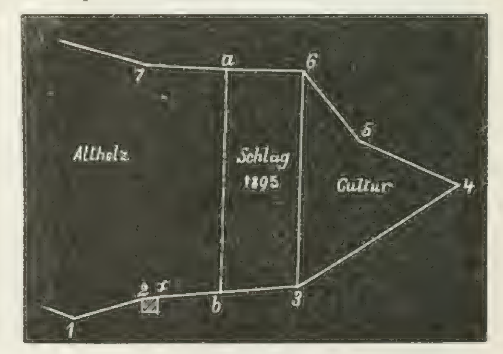


Fig. 257.

bb) Ähnlich kann man kleine Schläge auf diese einfache Weise in eine Karte bringen, wenn man nicht an Grenzsteine, sondern nur an Schlagecken, an deutlich unterscheidbare Punkte von bereits in der Karte

verzeichneten Wegen u. dgl. anbinden kann. So wird die Schlaglinie *a b* (Fig. 257) in die Karte gebracht, wenn man die Strecke 6 bis *a* und von der Ecke der Jagdhütte die Strecke *x* bis *b* mißt, diese Entfernungen dann zu Hause in der Richtung *6* — *7*, beziehungsweise *x* — *3* in die Karte in verjüngtem Maßstabe überträgt und *a* mit *b* sodann auf der Karte verbindet.

c) Die Polarmethode wird mit der Umfangsmethode in derselben Weise wie mit der Dreiecksmethode verbunden.

Bei den unter Punkt 3 genannten Fällen ist die Messung des Hilfspolygons als Hauptvermessung anzusehen, die Messung des aufzunehmenden Linienzuges mittels auf das Hilfspolygon bezogener Koordinaten dagegen als Detailvermessung. Da das Hilfspolygon genau aufgenommen werden muß, die Sperrmaße der Winkel aber nur in den einfachsten Fällen zur Winkelmessung herangezogen werden dürfen, wird man sich, falls ein Winkelmeßinstrument nicht zur Verfügung steht, auf Hilfspolygone mit nur rechten Winkeln beschränken.

4. Die gleichzeitige Anwendung von drei und vier Aufnahms-Methoden.

Eine solche Vereinigung kommt gewöhnlich bei Grundstückkomplexen, d. i. einer Vereinigung mehrerer Grundstücke zu einem zusammengehörigen Ganzen vor. In der Regel kommt in solchen Fällen die Dreiecksmethode und teilweise auch die Umfangsmethode für die Hauptvermessung in Anwendung, die Koordinaten-, Einbinde- und Polarmethode aber für die Detailvermessung. Im folgenden wird bei Besprechung des praktischen Vorganges bei Aufnahmen nach mehreren Methoden diese Vereinigung an einem bestimmten Beispiele erklärlich werden.

III. Praktischer Vorgang bei der Aufnahme eines Grundstückes unter Anwendung mehrerer Methoden.

Aufgabe: Es ist eine Kahlfläche im Walde, die infolge von Windschäden eine ganz unregelmäßige Begrenzung hat, ohne Anwendung von Instrumenten zur Messung beliebiger Winkel aufzunehmen. Mitten durch die Fläche geht ein Holzausfuhrweg, im oberen Teile ist ein kleiner Wiesfleck mit einem Pflanzkamp*) (Fig. 258).

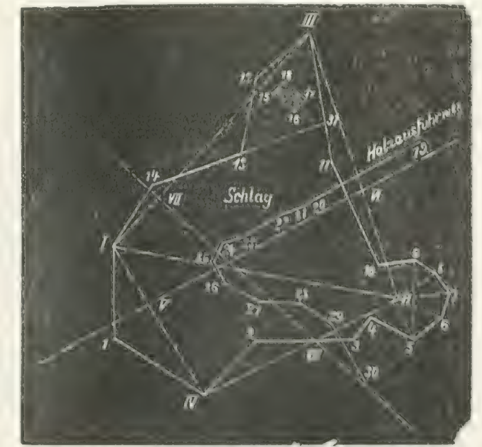


Fig. 258.

Vorgang: 1. Begehung der Fläche und eventuell Verfassung einer rohen Skizze, um sich über die Anordnung der Netzpunkte klar zu werden. In unserem Falle wurde ein Hauptdreieck *I II III* und ein zweites Dreieck *I III V* als Gerippe über die Vermessungsfläche gespannt. Da die meisten der Wegpunkte *19* bis *30* von den Dreiecksseiten zu weit entfernt sind, um auf dieselben eingemessen werden zu können, so erscheint es vorteilhaft, noch zwei Nebenachsen *V VI* und *VII VIII* anzunehmen und dieselben

*) Pflanzschule.

durch sehr genaues Einbinden in die zwei Dreiecke zu bestimmen. Sodann Auspflockung der gewählten Netzpunkte *I*, *II*, *III*, *IV* mittels starker Pflöcke und Bezifferung derselben mit römischen Ziffern mittels Försterkreide oder Zimmermannsbleistift. Auspflockung der sämtlichen Detailpunkte mit kleinen Pflöcken und Beschreibung derselben mit arabischen Ziffern von *1* bis *31*.

2. Ersichtlichmachung der Hauptpunkte *I* bis *IV* durch Absteckstäbe mit angebundenen Fähnchen, Bestimmung der Schnittpunkte *V*, *VI*, *VII*, *VIII* der Hilfs- oder Nebenachsen mit den bezüglichen Netzseiten; Auspflockung der sonach erhaltenen Schnittpunkte *V*, *VI*, *VII*, *VIII* ebenfalls mit starken Pflöcken und Beschreiben dieser Pflöcke.

3. Genaueste zwei- bis dreimalige Messung der Achsen mit der Latte oder einem ganz verläßlichen Meßbande und Einschreiben dieser Messungsresultate in die Skizze. Einbinden der beiden Hilfsachsen durch genaue Messung der Strecken *I V*, *II VI*, *I VII*, *II VIII*. Anfertigung einer den erhaltenen Messungsresultaten entsprechenden verläßlichen Skizze der sämtlichen Aufnahmsachsen.

4. Einmessung der Detailpunkte auf die nächstgelegenen Achsen mittels Koordinaten. Die Punkte *6* bis *8* können nach Einmessung von *5* und *9* mittels Koordinaten von *11* aus im Wege der Transversalmethode aufgenommen werden, während man den Detailpunkt *31* durch Einbinden, d. i. durch Messung der Länge *11* bis *31* am besten findet.

5. Weiterzeichnen der Skizze im Manuale gleichzeitig mit der Einmessung des Details im Anschlusse an das bereits gezeichnete Netz und Einschreiben der Messungsdaten in die Skizze nach der bei Besprechung der einzelnen Methoden dargestellten Weise. Die Verbindungslinien der einzelnen Punkte, also die Begrenzungslinien der Kahlfläche, des Pflanzkampes, die Ausscheidungslinien *13* bis *31* zwischen Wiese und Kahlfläche, die Weglinien sind in der Skizze ebenfalls mit der Messung fortschreitend zu zeichnen.

Wären mehrere Kulturarten, wie bei Grundstückkomplexen, vorhanden, so schreibt man dies ebenfalls in die Skizze und notiert in dieser endlich noch die vorhandenen lokalen Ortsbezeichnungen, die Bezeichnung von Häusern nach dem betreffenden Besitzer u. dgl. m.

Zusatz. Bestimmung der Nord-Südrichtung oder der Mittagslinie.

Sollen kleinere Aufnahmen in eine Karte übertragen werden, so genügt es häufig, die Nord-Südrichtung als Orientierungslinie bloß nach dem Augenmaße auf der Skizze vorzumerken. Um diese aber genau zu erhalten, wendet man unter Anwendung der einfachsten Hilfsmittel folgendes Verfahren an:

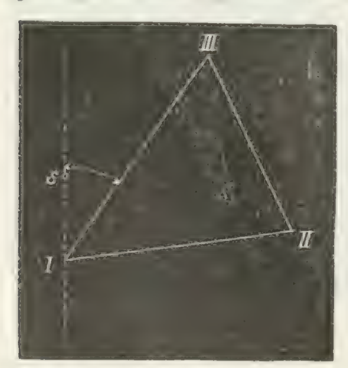


Fig. 259.

Man stellt auf einem Punkte des Vermessungsnetzes, etwa in *I* (Fig. 259) einen langen Absteckstab genau vertikal (mittels des Senkels) auf und bestimmt den Schatten dieses Stabes zur Zeit, wenn die Sonne am höchsten steht, d. i. genau um 12^h mittags. Diese Schattenlinie *Is* gibt die Mittagslinie an, die man nun durch Messung des Winkels *s I III* (mittels Sperrmaßen) in die Karte übertragen kann.

III. Kapitel.

Von einigen Instrumenten zur genaueren Winkelaufnahme.

§ 15. Einleitung.

Es gibt Instrumente, bei denen die Winkel gleich am Felde in ihrer wirklichen Größe zu Papier gebracht werden, ohne daß man ihr Gradmaß zu kennen braucht: das sind die Meßtische, zu denen auch das sogenannte Detaillierbrettchen gehört. Ferner gibt es Instrumente, mittels welcher man die Winkel in der Natur im Gradmaße tatsächlich mißt und die erhaltenen Messungsresultate erst zu Hause verwertet; von diesen sind es nur die Boussoleninstrumente, mit denen Forstschutzorgane mitunter zu arbeiten haben (vgl. § 9).

§ 16. Der Meßtisch.

Der gewöhnliche Vorgang bei Anfertigung der Handskizze eines Grundstückes ist folgender: Man hält mit der linken Hand das Notizbuch möglichst wagrecht und zieht mit der rechten Hand die aufzunehmenden Linien nach Möglichkeit parallel mit den Linien des Feldes und schätzungsweise mittels des Schrittmaßes auch in demselben Verhältnisse zueinander wie in der Natur. Denkt man sich nun die Zeichenfläche des Notizbuches zu einem Zeichenblatte vergrößert und auf ein Reißbrett aufgespannt, welches auf der unteren Seite mit drei Füßen versehen ist, so daß es an jedem beliebigen Punkte in bequemer Zeichenhöhe aufgestellt werden kann, so hat man die einfachste Form eines Meßtisches.

Zur genauen Wiedergabe einer Feldfigur, bezw. ihrer horizontalen Projektion (siehe § 2, Seite 211) ist es aber erforderlich, daß man das Zeichenbrett horizontal stellen und beliebig drehen könne, ohne dabei die Füße jedesmal umstellen zu müssen, ferner daß man ein Lineal habe, welches genau in die Richtung der Feldlinie gebracht werden kann. Zur Erfüllung der ersten Bedingung ist das Zeichenbrett mit den Füßen nicht fest, sondern mittels eines Gestelles verbunden, das fast von jedem Mechaniker anders angefertigt wird, aber immer nur den Zweck hat, den Meßtisch drehen und horizontal oberhalb eines Punktes aufstellen zu können. Der zweiten Bedingung wird dadurch genügt, daß man das Lineal mit einer Visiervorrichtung ausstattet.

Es gibt, wie bereits erwähnt, eine ganze Reihe von Meßtischkonstruktionen, deren Aufzählung und Beschreibung hier jedoch zu weit führen würde. Es sollen daher im nachstehenden bloß zwei der gebräuchlichsten kleineren Meßtischformen behandelt werden.

I. Der Patentmeßtisch von Kraft.

1. Das Stativ.

Es besteht aus dem Stativkopfe und den drei Stativfüßen (Fig. 260). Der Stativkopf ist eine kreisrunde hölzerne Scheibe k, der sogenannte Teller, die zur Verhinderung des Werfens häufig aus mehreren mit den Fasern senkrecht aufeinander stehenden Teilen zusammengesetzt ist. In der Mitte befindet sich eine vierseitige in der Regel mit Messing gefütterte Öffnung D, durch welche der Zapfen des Meßtisches gesteckt und von unten mit einer Flügelschraube, der sogenannten Herzschraube, befestigt wird. In einiger Entfernung vom Rande gehen von unten nach oben drei Messingschrauben e durch, welche am unteren Ende mit einem Flügel oder einer geriffelten Scheibe versehen, am oberen Ende glatt geschliffen sind und gleich weit voneinander abstehen, also ein gleichseitiges Dreieck bilden. Diese Schrauben, die Stellschrauben, dienen zum Auflegen des Meßtisches, welcher sonach auf bloß drei Punkten ruht, durch deren Heben und Senken das Horizontalstellen bewirkt wird. Die drei Füße sind am Stativteller zwischen den Stellschrauben ebenfalls in gleichen Abständen so an-

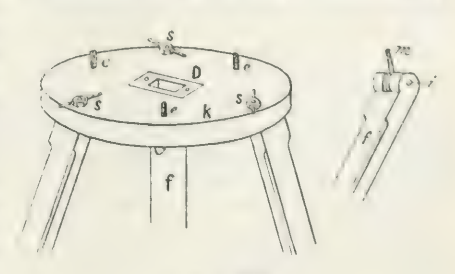


Fig. 260.

gebracht, daß eine um einen Messingbolzen *i* am oberen Fußende wie in einem Scharnier bewegliche Schraubenspindel *m* von unten durch den Teller gesteckt und oben durch eine Schraubenmutter *s* festgestellt werden kann. Die Füße *f* sind etwa 1·2 *m* lang und am unteren Ende mit einem eisernen Schuh zum Eindrücken in den Boden versehen.

Ein gutes Stativ darf nicht zu schwer sein, muß aber doch eine große Standfestigkeit besitzen und soll sich rasch und bequem aufstellen lassen.

2. Das Tischblatt.

a) Beschreibung. Das Tischblatt *P* (Fig. 261) ist ein Zeichenbrett, aus weichem Holze (am besten Linde), das wie der Stativteller zur Verhinderung des Werfens aus mehreren Brettchen parkettenartig zusammengeleimt und mit zwei Hirnleisten oder einem ganzen Rahmen aus hartem Holze versehen ist. An seiner unteren Fläche trägt es zwei Einschubleisten *l* und *l'*, welche zweimal geschlitzt sind, und zwar einmal von unten nach oben, also senkrecht zum Reißbrett *d* und *d'*, das anderemal von links nach rechts, also parallel zum Reißbrett *c* und *c'*. Zwischen diesen Leisten befindet sich das Schiebungskreuz *K*, dessen Längsarme die Schlitze *f* und *f'* aufweisen und durch die Schlitze *c* und *c'* der Einschubleisten durchgehen. Das Schiebungskreuz ist mit dem Brett nicht verbunden, sondern läßt sich zwischen den Leisten nach allen Richtungen hin- und herschieben. Dort, wo sich die Schlitze *f* und *f'* mit den Schlitzen *l* und *l'* kreuzen, sind die Schrauben *s* und *s'* durchgesteckt, deren Mutter in einer unter der Leiste im Brette angebrachten Rinne auf und ab bewegt werden kann. Sind diese Schrauben fest angezogen, dann ist das Schiebungskreuz mit dem Tischblatte fest verbunden. In der Mitte des Schiebungskreuzes ist eine kreisrunde messingene Scheibe *w*, die Wendescheibe, fest angebracht, deren Rand mit Zähnen versehen ist, in welche eine seitlich am Schiebekreuz befindliche Schraube ohne Ende *m* eingreift. Diese Schraube, die Wendeschraube, kann mittels eines Hebels *h* ausgeschaltet werden, so daß sie die Zähne der Wendescheibe nicht berührt, diese also frei gedreht werden kann. Wird der Hebel jedoch zugeklappt, dann kann die Drehung der Scheibe nur mittels der Wendeschraube bewirkt werden. Auf der Wendescheibe befindet sich im Mittelpunkte mittels eines Kugelgelenkes ein Zapfen eingelassen, der einen viereckigen Querschnitt, entsprechend der Öffnung *D* im Stativteller, besitzt und nach unten in eine Schraubenspindel *R* endet, zu welcher eine Schraubenmutter mit zwei Flügeln, die Herzschraube, gehört. Dieser Zapfen wird durch die Telleröffnung durchgesteckt und von unten mit der Herzschraube festgezogen, wodurch die Wendescheibe gegen die drei Stellschrauben des Stativs gepreßt wird. Dadurch ist dann das Tischblatt mit dem Stativ verbunden.

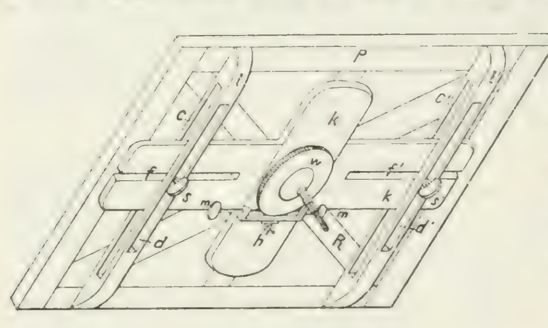


Fig. 261.

b) Gebrauch. Nachdem der Meßtisch fest am Stativ angebracht ist, wird zuerst die grobe Horizontalstellung vorgenommen, d. h. der Meßtisch wird so aufgestellt, daß das Stativ feststeht und das Tischblatt dem Augenmaße nach horizontal liegt. Hiebei ist darauf zu achten, daß die Fußschrauben fest angezogen sind, damit die Füße nicht wackeln, daß die drei Stellschrauben beiläufig gleich hoch über den Teller herausragen und daß die Wendescheibe auf allen drei Stellschrauben aufliegt.

Hierauf wird die feine Horizontalstellung vorgenommen. Das Horizontalstellen eines Instrumentes beruht auf dem Lehrsatze, daß eine Ebene durch zwei sich schneidende Gerade oder durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte (durch welche ja immer zwei sich Schneidende gezogen werden können) bestimmt ist. Es wird also das Horizontalstellen nach § 7 I 2 C, beziehungsweise nach dem „Zusatz" hiezu vorgenommen. Der Vorgang ist sonach folgender: Man stellt eine geprüfte und berichtigte Libelle bei leicht geöffneter Herzschraube zuerst über zwei Stellschrauben und bringt sie durch Heben und Senken dieser Schrauben, also durch gleichzeitiges entgegengesetztes Drehen beider Schrauben, zum Einspielen. Dann dreht man die Libelle um 90° und stellt sie so, daß das eine Ende über die Mitte der beiden verwendeten Stellschrauben, das andere Ende über die dritte bisher noch unberührte Stellschraube zu liegen kommt und bringt die Libelle durch Heben oder Senken dieser dritten Schraube allein auch in dieser Richtung zum Einspielen. Diesen Vorgang wiederholt man so oft, bis die Libelle in beiden Lagen genau einspielt, worauf die Herzschraube wieder fest-

gezogen wird. Dem Anfänger widerfährt es hiebei oft, daß sich die dritte Stellschraube nicht genügend herausschrauben läßt. In dem Falle muß die Herzschraube noch mehr geöffnet werden. Auch kommt es oft vor, daß nach fertiger Horizontierung die Herzschraube nicht fest genug angezogen werden kann, damit der Tisch fest an die Stellschrauben gepreßt ist. Man überzeugt sich hievon, indem man versucht, ob der Tisch nicht in der Richtung von oben nach unten wackelt. In diesem Falle müssen alle drei Stellschrauben gleichmäßig gehoben und neuerdings horizontal gestellt werden.

Bevor man eine Libelle zur Horizontierung eines Meßtisches verwendet, muß sie immer erst auf ihre Richtigkeit geprüft werden, falls man dies nicht kurz vorher schon getan hätte. Dies geschieht nach § 7 I 2 C, indem man sie über zwei Stellschrauben legt, zum Einspielen bringt und dann über denselben zwei Schrauben um 180° verdreht aufsetzt. Sollte die Blase nicht einspielen, dann wird nach bekannter Weise der halbe Ausschlag mit den Stellschrauben, der andere halbe Ausschlag mit der Libellenrektifizierschraube beseitigt.

c) Prüfung und Berichtigung. Ein guter Meßtisch muß folgenden Anforderungen entsprechen: 1. die obere Fläche soll eine Ebene sein, 2. soll sie parallel zur Wendescheibe sein.

Die erste Eigenschaft prüft man, indem man ein Lineal, dessen Kante eine vollkommen gerade Linie bildet, hochkantig mit dieser Kante auf das Tischblatt in vielen Richtungen auflegt und untersucht, ob nirgends ein Zwischenraum zwischen Brett und Lineal vorhanden ist. Ist dies der Fall, dann müssen die Unebenheiten von einem guten Tischler beseitigt werden. Dies selbst mittels Abbimsen zu besorgen, erfordert Übung und ist nicht zu empfehlen.

Die zweite Anforderung wird untersucht, indem man eine Libelle auf den bereits vollkommen horizontal gestellten Meßtisch an eine beliebige Stelle setzt und den Meßtisch langsam im Kreise dreht. Zeigt hiebei die Blase an irgendeinem Punkte einen Ausschlag, dann muß der Tisch zum Mechaniker kommen.

Auch müssen alle Schrauben gut funktionieren und sowohl Schiebekreuz als auch Wendescheibe sich leicht bewegen lassen. Metallteile werden bei schwerer Beweglichkeit mit reinem Knochenöl wenig befeuchtet, Holzteile mit trockener Kernseife eingerieben.

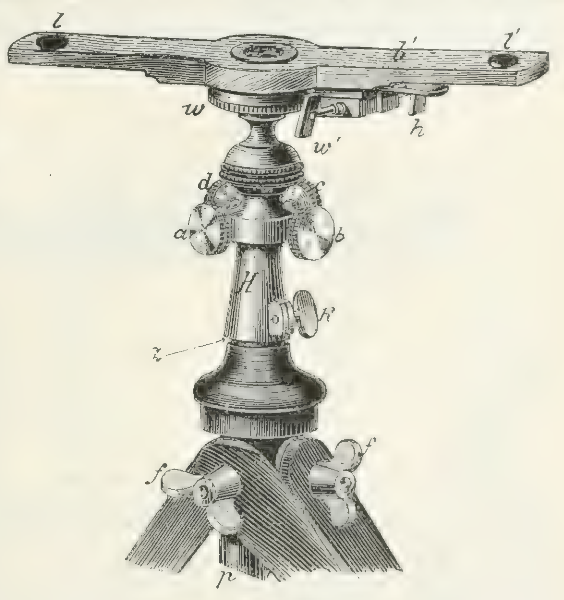


Fig. 262.

II. Neuerer Meßtisch.

Dieser Meßtisch führt keinen besonderen Namen; er wird häufig verwendet, da er sich gut für kleinere Arbeiten eignet.

1. Das Stativ.

Es besteht ebenfalls aus dem Stativkopf und den drei Füßen. Der Stativkopf ist hier ein nach oben verjüngter konischer Zapfen *Z*, Fig. 262, der den Meßtisch trägt und nach unten in ein dreikantiges Prisma *p* ausläuft. An jeder Seite desselben sitzt einer der drei Füße, der mit der Flügelschraube *f* in jeder beliebigen Lage festgestellt werden kann.*)

2. Das Tischblatt.

a) Beschreibung. Das Tischblatt, welches, wie alle anderen aus weichem Holz, mit harten Hirnleisten gefertigt ist, trägt auf seiner unteren Seite keine Leisten, sondern zwei metallene, innen mit einem Gewinde versehene und in das Brett eingelassene

*) Die Stative der geodätischen Instrumente überhaupt können Tellerstative oder Zapfenstative sein. Das unter *I* beschriebene ist ein Tellerstativ, unter *II* ein Zapfenstativ.

Büchsen, in welche zwei Flügelschrauben S (Fig. 263) passen. Die Verbindung mit dem Zapfenstative geschieht durch ein Zwischengelege. Dieses besteht aus einer Metallhülse H, Fig. 262, mit der Klemmschraube K zum Festklemmen auf dem Zapfen des Stativs. Am (oberen) Ende befindet sich die kleine Wendescheibe w, auf welcher die hölzerne Brille b' befestigt ist, welche das Schiebekreuz vertritt. Wird das Tischblatt so auf die Brille gelegt, daß die obenbezeichneten Schraubenbüchsen über die Brillenlöcher l und l' (Fig. 262 und 263) zu liegen kommen, dann kann mittels zweier Flügelschrauben S in Fig. 263, die je eine Holzscheibe h von etwas größerem Durchmesser als der der Brillenlöcher tragen, das Tischblatt fest mit der Brille verbunden werden. Fig. 263 zeigt das Brett mit der Brille im Durchschnitte. Sind die beiden Flügelschrauben S gelüftet, dann kann das Brett auf der Brille so weit nach allen Richtungen verschoben werden, als die Brillenöffnung l l' Spielraum gewährt. Die Wendescheibe w trägt, wie beim Kraft'schen Meßtisch am Rande eine Zahnung, in welche eine Schraube ohne Ende, die Wendeschraube w', eingreift. Die Wendeschraube kann auch hier mittels eines Hebels h aus- und eingeschaltet werden, so daß sich die Wendescheibe entweder frei mit der Hand oder bloß mittels der Wendeschraube drehen läßt. Die Horizontalstellvorrichtung ist bei diesem Meßtische nicht am Stativ, sondern am Zwischengelege angebracht. In die Hülse H reicht von oben herab ein vierkantiges Metallprisma, das mit der Wendescheibe rechtwinklig verbunden ist und sich in einem Kugelgelenk drehen läßt. Auf jede Seite desselben wirkt je eine der Schrauben a, b, c, d, von denen sich je zwei gegenüberstehen, so daß also der Zapfen und mit ihm das Tischblatt nach allen

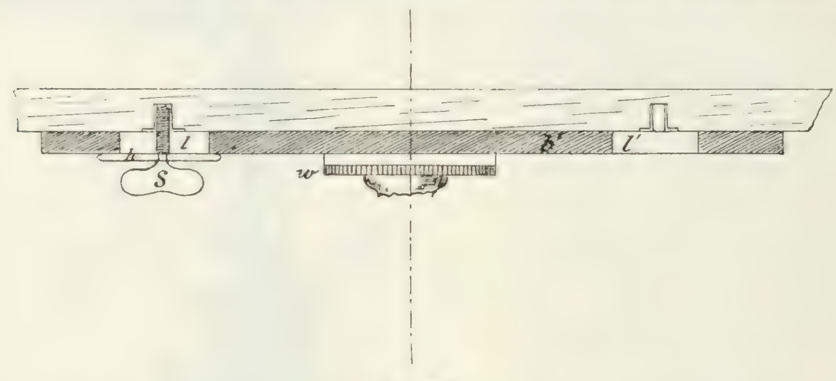


Fig. 263.

Seiten bewegt werden kann. (Eine ähnliche Einrichtung besitzt das Nivellierdiopter, siehe dieses.)

b) Gebrauch. Der Tisch wird, wie der in *I* besprochene, zuerst am Stativ befestigt und dem Augenmaße nach horizontal gestellt. Zur feinen Horizontalstellung wird die rektifizierte Libelle über zwei gegenüberliegende Schrauben z. B. a und c gestellt, durch Nachlassen der einen und gleichzeitiges Anziehen der anderen Schraube zum Einspielen gebracht, sodann über das andere Schraubenpaar b und d gesetzt und abermals zum Einspielen gebracht. Hiebei ist besonders darauf zu merken, daß beide Schrauben stets anliegen, d. h. daß zwischen dem prismatischen Zapfen und den Schrauben kein Zwischenraum besteht. Man erkennt dies sowohl daran, daß der Tisch, an einer Kante erfaßt, in der Richtung von oben nach unten nicht wackelt, als auch daran, daß man in der einen Hand den Gegendruck der in der anderen Hand befindlichen Schraube immer fühlt.

c) Prüfung und Berichtigung. Hier gilt das bei dem Kraft'schen Meßtisch Gesagte.

III. Die Nebengeräte.

Zum Arbeiten mit dem Meßtische sind noch erforderlich: 1. eine Libelle, 2. ein Lineal mit einer Visiervorrichtung, 3. eine Lotgabel, 4. ein Ordinatenwinkel, 5. eine Boussole, 6. ein Instrument zum Längenmessen, 7. Zeichenrequisiten und Sonstiges.

1. Die Libelle.

Man verwendet hiezu eine Libelle, wie sie im § 7 beschrieben wurde. Damit das Zeichenblatt durch das Hin- und Herschieben der Libelle nicht beschmutzt werde, überklebt man die Auflagefläche derselben mit Zeichenpapier.

2. Das Visierlineal.

Besteht die Visiervorrichtung bloß in einfachen Dioptern, dann heißt das Instrument *A.* Diopterlineal. Ist jedoch am Lineal ein Fernrohr zum Anvisieren der Punkte angebracht, dann nennt man dies *B.* Perspektivlineal oder Kippregel.

A. Das Diopterlineal.

a) Beschreibung. Das Diopterlineal, Fig. 264, besteht aus einem metallenen, zirka 3 bis 5 *cm* breiten und je nach der Größe des Tisches 50 bis 70 *cm* langen Lineal *A B*, dessen eine Kante abgeschrägt ist, damit man längs derselben bequem und genau Bleistiftlinien ziehen könne, weshalb diese Kante auch die Ziehkante heißt. An den beiden schmalen Kanten des Lineals sind zwei Metall-Lamellen *C* und *D* entweder fest oder mit Scharnieren *c c'* angebracht, welche zum Visieren eingerichtet sind. Die eine Lamelle trägt einen schmalen Spalt *f g*, die sogenannte Schauritze oder das Okulardiopter, die andere Lamelle ein Fenster, in welchem ein feines Roßhaar *d e*, der Objektivfaden oder das Objektivdiopter, gespannt ist. Diese Vorrichtung dient zum Anvisieren eines entfernten durch eine Pikierstange markierten Punktes, indem man das Auge dicht vor das Okulardiopter hält und den Objektivfaden mit der Signalstange zum Decken bringt. Da es häufig vorkommt, daß man auch nach rückwärts visieren muß, sind beide Lamellen sehr häufig sowohl mit Objektiv- als auch mit Okulardioptern ausgestattet, wie dies in der Figur bei *E* und *F* ersichtlich ist, damit man nicht bei jeder Rückvisur das Lineal umzusetzen braucht. Die beiden Diopter ragen auf der Seite der Ziehkante über das Lineal so weit heraus, daß die durch die Schauritzen und Objektivfäden bestimmte Ebene durch die Ziehkante geht.

Diese Visiervorrichtung ist ihrer Natur nach nur in ganz ebenem Terrain verwendbar. Damit man aber auch höher gelegene Punkte anvisieren könne, bringt man auf einer der umlegbaren Lamellen *C* das sogenannte Bergdiopter an, das sind zwei kleinere Diopter, Fig. 264 *B*, welche dieselbe Einrichtung besitzen, wie die großen Diopter. Je nachdem der anzuvisierende Punkt höher oder tiefer liegt, wird die das Bergdiopter tragende Lamelle *C* weniger oder mehr geneigt.

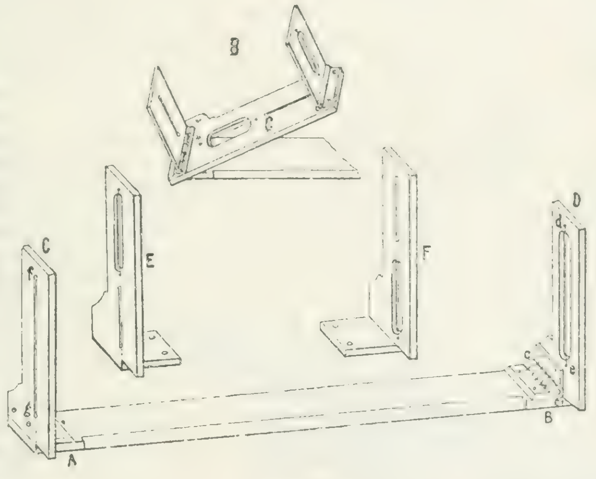


Fig. 264.

b) Prüfung und Berichtigung. Bevor man mit dem Diopterlineal zu arbeiten beginnt, muß man untersuchen:

aa) ob die Ziehkante eine gerade Linie ist,

bb) ob die Visierebene senkrecht auf der unteren Fläche des Lineals steht,

cc) ob die Ziehkante in der Visierebene liegt.

aa) Man zieht längs der Ziehkante eine möglichst lange Linie mit einem scharf gespitzten harten Bleistift, legt dann an die Endpunkte der Linie das Lineal von der anderen Seite an, so daß also die Linealenden vertauscht werden, zieht abermals eine feine Linie und untersucht, ob die beiden Linien zusammenfallen. Trifft dies zu, dann kann man annehmen, daß die Kante eine Gerade sei.

Für den höchst unwahrscheinlichen Fall, daß die Unrichtigkeiten an der Ziehkante symmetrisch sind, wäre die besprochene Prüfung allerdings unzureichend. Man legt deshalb auch das Lineal mit nicht vertauschten Enden jedoch auf die andere Breitseite an die Endpunkte der Linie an, zieht eine Linie und sieht nach, ob sich die beiden Linien decken. Bei der letzterwähnten Lage des Lineals muß man die Linie jedoch sehr vorsichtig ziehen und den Bleistift genau senkrecht halten, da die Ziehkante nicht am Papier anliegt. Eine eventuelle Korrektur des Lineals muß der Mechaniker vornehmen.

bb) Die Visierebene wird dann auf der unteren Linealebene senkrecht stehen, wenn bei horizontalem Meßtisch die Schauritzen sowohl als auch die Roßhaare vertikal stehen.

Man verschafft sich also vorerst eine gut anzuvisierende vertikale Linie, indem man auf einem weißen Hintergrund (Haus) eine schwarze Schnur ziemlich hoch aufhängt und unten einen Stein daran bindet, der die Schnur vertikal spannt. Sodann stellt man den Meßtisch in einer Entfernung von beiläufig 30 *m* von der Schnur auf, horizontiert ihn sehr genau und stellt das Diopterlineal, dessen Lamellen ganz aufgeklappt sein müssen, in die Richtung gegen die Schnur darauf. Hierauf visiert man über einen einzigen Punkt der Okularritze, etwa über ihr unteres Ende, nach der Schnur und bringt durch Drehen des Meßtisches mittels der Wendeschraube den Objektivfaden ganz nahe der Schnur. Ist derselbe mit der Schnur parallel, dann steht er vertikal (oder ist höchstens innerhalb der Visierebene, also nach vorn oder rückwärts geneigt, was keinen nachteiligen Einfluß ausübt). Bildet der Faden jedoch mit der Schnur einen Winkel, dann kann man diesen Fehler auf zweierlei Weise beseitigen. Die Roßhaare sind in Dioptern gewöhnlich so befestigt, daß sie mittels eines kleinen hölzernen Keilchens in ein oberhalb und unterhalb des Objektivfensters befindliches Loch geklemmt sind. Man kann also durch Herausklopfen dieser Keilchen und Wiedereinklemmen des Fadens in einer anderen Stellung (mittels eines gespitzten Zündholzes) geringe Fehler der Fadenstellung beseitigen. Ist diese Korrektur aber nicht ausreichend oder sind die Fäden unbeweglich angebracht, dann können die Schräubchen, mit denen das Lamellenscharnier am Lineale befestigt ist, gelüftet und nach einseitigem Unterlegen von Papier- oder Holzblättchen wieder festgeschraubt werden, wodurch ebenfalls der Faden eine andere Lage bekommt.

Ist der Objektivfaden auf diese Weise vertikal gestellt, dann wird mittels der Wendeschraube des Meßtisches der Faden genau in die Mitte der Schnur eingestellt und das Auge von dem untersten Punkte der Schauritze, über welchen man bisher visiert hatte, langsam nach aufwärts bewegt und dabei beobachtet, ob der Faden immer in der Mitte der Schnur bleibt. Ist dies der Fall, dann steht auch die Okularritze vertikal; wenn nicht, dann wird sie auf dieselbe Weise berichtigt, wie die Objektivlamelle. Sind die Lamellen fest mit dem Lineale verbunden, dann muß eine eventuelle Berichtigung der Mechaniker vornehmen.

cc) Um dies zu prüfen, stellt man das nach *bb)* berichtigte Diopter quer über eine Ecke des Meßtisches, so daß die Lamellen beiderseits über den Tisch herausragen, und stellt die Visur durch Drehen des Tisches scharf auf die gespannte Schnur ein. Hierauf steckt man am Anfange und Ende des Lineales zwei möglichst feine Nähnadeln (Anschlagnadeln, siehe diese, Seite 271) genau an die Ziehkante vertikal in den Tisch. Sodann dreht man das Diopter so um, daß die Lamellen nach abwärts hängen, schiebt die Ziehkante sachte an die zwei Nadeln an und visiert abermals nach der Schnur (unter dem Tisch durch). Trifft die Visur wieder genau die Schnurmitte, dann ist die verlangte Bedingung erfüllt, wenn nicht, dann gibt man das Instrument am besten zum Mechaniker. In der Regel sind bei kleineren Diopterlinealen die Lamellen ohnehin nicht seitlich verschiebbar.

Die Berichtigungen *bb)* und *cc)* sind vorerst nur mit einem Diopterpaar vorzunehmen und es muß noch untersucht werden, ob die durch das zweite Diopterpaar bestimmte Visierebene mit der bereits geprüften zusammenfällt. Zu diesem Zwecke legt man das bereits rektifizierte Lineal an die beiden Nadeln, visiert die Schnur scharf an, setzt dann das Diopterlineal um 180° verdreht so um, daß das bisher verwendete Okular gegen die Schnur zu liegen kommt und legt die Ziehkante abermals scharf an die Nadeln an. Visiert man nun durch das andere bisher noch unberücksichtigt gelassene Okular, so muß die Schnur wieder genau in der Visur liegen. Ist dies nicht der Fall, dann ist das zweite Diopterpaar abwechslungsweise zusammen mit dem ersten unverwendbar und kann bloß für sich allein nach vorgenommener Prüfung *bb)* und *cc)* benützt werden.

Die Prüfung des Bergdiopters erfolgt in der Weise, daß man das Instrument mit der zuerst geprüften Visierebene scharf auf die Schnur einstellt, dann zuerst durch das Okular des Bergdiopters nach der Schnur sieht, und wenn die Visur wieder durch die Schnur geht, auch den Objektivfaden des Bergdiopters aufstellt und nachsieht, ob er in derselben Ebene liegt. Eine eventuelle Berichtigung kann nur vom Mechaniker vorgenommen werden.

c) Gebrauch. Die Anwendung des Diopterlineals ergibt sich aus dem Gesagten von selbst. Es dient dazu, um auf dem Meßtische Linien zu ziehen, welche mit den Linien der Natur parallel und vertikal darüber liegen. Hat man einen Punkt *b* am Meßtisch gegeben, der vertikal über dem entsprechenden Feldpunkt *B* liegt und soll man nach einem anderen Punkte *C* den Strahl (Rayon) ziehen, so legt man die Ziehkante des Diopterlineals scharf an den gegebenen Punkt *b* an (am besten, indem man mit der rechten Hand an diesen Punkt die Ecke der Libelle oder des Messingmaßstabes bringt und festhält) und schiebt das Lineal so lange längs des Punktes *b* hin und her, bis die Visur genau durch den im zweiten Punkte *C* vorher vertikal eingesteckten Absteckstab geht. Zieht man dann längs der Ziehkante eine feine Linie, den Rayon, so liegt sie vertikal über der Bodenlinie und parallel zu ihr.

Ebenso verfährt man, wenn noch ein weiterer Punkt *A* anzuvisieren ist. Der nach *A* gezogene Rayon schließt dann mit dem nach *C* gezogenen einen Winkel ein, der mit dem Feldwinkel *A B C* gleich ist.

Damit durch das Hin- und Herschieben des Lineals das Zeichenblatt nicht beschmutzt wird, überzieht man es auf der unteren Fläche, bis auf einen schmalen Streifen längs der Ziehkante, mit weißem glatten Papier.

B. Die Kippregel.

Sie dient demselben Zwecke wie das Diopterlineal und wird überall da angewendet, wo es sich um größere Distanzen und genauere Arbeiten handelt.

a) Beschreibung. Die Kippregel oder das Perspektivlineal besteht aus einem Messinglineal $L L_1$, Fig. 265, auf welchem der Träger (oder Ständer) T angebracht ist, an dessen oberem Ende sich das Fernrohr A um eine zur unteren Linealebene parallele Achse $o o_1$ drehen (kippen) läßt. Der Träger hat an seinem unteren Ende die Fußplatte F, welche mit der Schraube m einseitig gehoben oder gesenkt werden kann, wodurch der Ständer nach links oder rechts geneigt wird und damit auch die Achse $o o_1$, die sich dadurch in die notwendige Parallelstellung zur Linealebene bringen läßt. Weiters hat der Ständer noch eine rechteckige Öffnung, durch welche ein mit dem Lineal fest verbundener Würfel hervorragt, auf den von links und rechts die Schräubchen l und k wirken, mit deren Hilfe der ganze Ständer gegen die Ziehkante hin um die Schraube g gedreht werden kann. Werden die Schrauben g, h und i festgezogen, dann ist der Ständer mit dem Lineale fest verbunden.

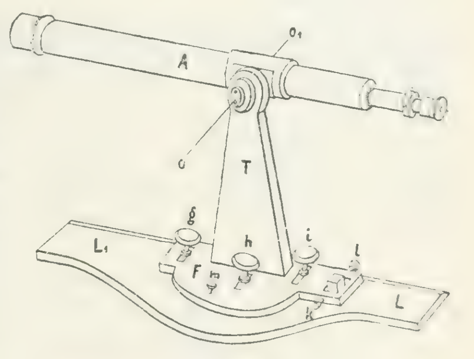


Fig. 265.

Die Art und Weise, wie der Träger mit dem Fernrohr einerseits und mit dem Lineale anderseits verbunden ist, kann sehr verschieden sein, und beinahe jeder Mechaniker hat seine eigene Konstruktion. Sehr häufig findet man auch die Schraube m nicht vor, so daß also die Fußplatte und damit die Achse $o o_1$ nicht gehoben werden kann. In diesem Falle ist dann das Fernrohr M, Fig. 266, um eine Stahlachse drehbar, die in dem Zylinder c mittels der Schraube w festgehalten wird. Die Horizontalstellung der Achse geschieht mit der Schraube t unter Zuhilfenahme der darauf angebrachten Libelle, welche die Armachsenlibelle heißt.

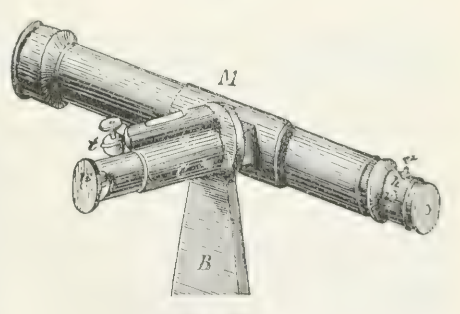


Fig. 266.

Im Innern des Fernrohres befindet sich nahe dem Okular das sogenannte Fadenkreuz (das sind zwei sich rechtwinklig kreuzende, auf ein Metallrähmchen gespannte Kokon- oder bessere Spinnfäden), welches dazu dient, einen Punkt zu bezeichnen, über welchen visiert wird. Das Rähmchen, auf welchem die Fäden gespannt sind, läßt sich in verschiedenerlei Weise bewegen, und zwar mittels der Schraube u in Fig. 266 und einer gegenüber liegenden in der Figur nicht sichtbaren Schraube von rechts nach links, ferner nach Lüftung des Schräubchens v mittels des Ringes h, mit dem das Rähmchen verbunden ist, nach vor- und rückwärts und endlich kann das Rähmchen wieder mit Hilfe des Ringes h ein wenig gedreht werden, so daß der Vertikalfaden vollkommen vertikal gestellt werden kann. Bei manchen Fernrohren fehlt die eine oder andere Bewegbarkeit.

b) Prüfung und Berichtigung. Bevor mit einem Fernrohr irgendwelche Arbeit, also auch Prüfung vorgenommen werden kann, muß das Fadenkreuz so gestellt werden, daß bei der scharfen Einstellung eines anvisierten Gegenstandes die Bildebene mit der Fadenkreuzebene zusammenfällt. Um dies näher zu erklären, soll im nachstehenden das allernötigste von den Fernrohren im allgemeinen kurz behandelt werden.

Unter einem Fernrohre versteht man ein Instrument, mit welchem man entfernte Gegenstände größer und deutlicher wahrnehmen kann, als mit freiem Auge. In seiner einfachsten Form besteht ein Fernrohr aus zwei bikonvexen*) Linsen A und B, Fig. 267. Die

*) Eine Fläche, die nach außen gekrümmt ist, heißt konvex, die nach innen gekrümmt ist, konkav. Eine Linse, die auf beiden Seiten nach außen gekrümmt, also in der Mitte am dicksten ist, heißt bikonvex. Ist sie beiderseits nach innen gekrümmt, also

größere B ist dem Gegenstande zugewendet, am Ende einer Röhre R befestigt und heißt Objektivlinse. Die kleinere A ist am Anfange der Okularröhre O eingefügt und heißt Okularlinse. Die Okularröhre O ist mit dem Rohr R nicht fest verbunden, sondern läßt sich entweder mit freier Hand oder mittels eines eigenen Zahnstangengetriebes innerhalb desselben hinein- und herausschieben.

Das Sehen mit einem solchen Instrumente geht nun folgendermaßen vor sich.

Die Objektivlinse erzeugt bei g das verkehrte Bild irgend eines beleuchteten Gegenstandes und dieses Bild wird mittels der Okularlinse, welche als Lupe wirkt, vergrößert betrachtet. Da einfache Lupen die Gegenstände in ihrer wirklichen Lage zeigen, erscheint in einem so konstruierten Fernrohr der betrachtete Gegenstand verkehrt. Man nennt solche Fernrohre astronomische. Durch gewisse Linsenkombinationen am Okular läßt sich das Bild g wieder aufrichten, so daß der betrachtete Gegenstand dann aufrecht erscheint. Solche Fernrohre heißen terrestrische. Die astronomischen Fernrohre geben hellere Bilder und werden daher zumeist bei geodätischen Instrumenten verwendet. Das Okular ist aber auch bei astronomischen Fernrohren nie eine einfache Linse, sondern immer ein Linsensystem, d. i. eine Kombination von mehreren Linsen verschiedener Form und aus verschiedenem Glas.

In der Okularröhre O, Fig. 267, befindet sich weiter bei f das Fadenkreuz auf dem Rähmchen r in einer gewissen Entfernung von der Linse A. Diese Entfernung kann auf zweierlei Weise vergrößert oder verringert werden. Entweder es ist das Rähmchen r, wie oben erwähnt, mit einem eigenen Ringe h (siehe auch Fig. 266) verbunden und kann mittels desselben nach vor- oder rückwärts geschoben werden, oder es kann die Okularlinse selbst durch Heraus- oder Hineinschrauben von dem Fadenkreuz entfernt oder demselben genähert werden. Die Veränderlichkeit dieser Entfernung ist deswegen notwendig, weil nicht alle Beobachter gleich scharfe Augen besitzen und jeder einzelne sich den seinem Auge entsprechenden Stand des Fadenkreuzes, beziehungsweise der Okularlinse erst suchen muß. Es geschieht dies in der Weise, daß man das Fernrohr gegen



Fig. 267.

das Firmament (eine lichte Wolke) richtet und durchsieht, wobei das Fadenkreuz deutlich und scharf gesehen werden muß.*) Ist dies nicht der Fall, dann muß entweder Fadenkreuz oder Linse verstellt werden.

In der Fig. 267 ist nun, unter der Voraussetzung, daß Af die richtige Distanz sei, wohl das Fadenkreuz deutlich sichtbar, nicht aber das dahinter befindliche Bild g. Um auch dieses zu sehen, muß in dem vorliegenden Falle die Okularröhre O soweit hineingeschoben werden, bis g und f zusammenfallen, da nur in der Distanz $A\,f$ die Lupe A für dieses Auge deutlich zeigt. Das Bild g erscheint aber nicht immer an derselben Stelle, sondern weiter von dem Objektiv (also näher dem Okular) bei nahen Gegenständen und näher dem Objektiv bei entfernteren Gegenständen, d. h. es bewegt sich also in demselben Sinne wie der Gegenstand selbst. Um also f und g in eine Ebene zu bringen, hat man bei weiter entfernten Gegenständen die Okularröhre hineinzuschieben, bei näheren aber herauszuziehen. Um zu erkennen, ob sich Bild und Fadenkreuz in einer Ebene befinden, bewegt man das Auge vor dem Okular auf und ab; bleibt hiebei das Fadenkreuz in bezug auf das Bild unbeweglich, dann ist die Bedingung erfüllt, ändert aber das Fadenkreuz seine Stellung, so daß es aussieht als würde das Bild auf- und niederspringen, dann liegen Bild und Fadenkreuz hintereinander und man sagt dann, man habe eine Parallaxe.**) Da jede Beobachtung bei Vorhandensein einer Parallaxe

---

in der Mitte am dünnsten, heißt sie bikonkav. Ist eine Linse auf einer Seite eben, auf der anderen konvex oder konkav, dann heißt sie plankonvex oder plankonkav. Kurzsichtige tragen konkave Brillen, Weitsichtige konvexe.

*) Hiebei muß man darauf achten, daß das Fadenkreuz stets auf den ersten Blick scharf sichtbar sei, denn bei längerem Hineinblicken sieht man auch in verschiedenen Stellungen deutlich, da jedes Auge mehr oder weniger akkommodationsfähig ist, d. h. seine Linse auf verschiedene Distanzen einstellen kann.

**) Man kann sich dies folgendermaßen versinnlichen: Man mache an einer Wand mit einer Bleistiftspitze einen Punkt und lasse die Spitze am Punkt liegen; dann wird das Auge in jeder Stellung Punkt und Spitze zusammenfallend sehen. Hält man aber die Bleistiftspitze etwa 2 *mm* vor den Punkt, dann wird das höher gelegene Auge den Punkt oberhalb, das tiefer gelegene die Spitze oberhalb sehen, beim Auf- und Abbewegen des Auges werden also Punkt und Spitze ihre gegenseitige Lage ändern.

unrichtig ist, muß sie stets vorher sorgfältig beseitigt werden. Glaubt man also, das Fadenkreuz richtig gestellt zu haben, dann visiert man eine Kirchturmspitze, einen Blitzableiter oder dergl. an, stellt das Okular scharf ein und nickt wiederholt mit dem Kopfe, um zu sehen, ob Bild und Fadenkreuz ruhig bleiben, also in einer Ebene sind. Manchmal wird sich die Parallaxe nicht ganz durch bloßes Verschieben der Okularröhre beseitigen lassen. Es ist dies ein Zeichen, daß man das Fadenkreuz doch nicht ganz richtig gestellt hatte, weshalb noch eine kleine Drehung an der Okularlinse notwendig ist. Damit sich dieselbe nicht mehr verschiebt, befestigt man sie am besten mit einem Tropfen Siegellack.

Erst nach vollkommener Beseitigung der Parallaxe ist das Fernrohr arbeitsfähig und es sind dann die Prüfungen der Kippregel vorzunehmen, und zwar ist zu untersuchen: *aa)* ob die Ziehkante eine gerade Linie ist, *bb)* ob die optische Achse des Fernrohres senkrecht auf seiner Drehungsachse steht, *cc)* ob die Drehungsachse parallel mit der unteren Linealebene, d. h. bei horizontiertem Meßtisch horizontal ist, und *dd)* ob die Ziehkante in der Visierebene liegt.

aa) Wie ein Lineal auf diese Eigenschaft geprüft wird, ist schon beim Diopterlineal gesagt worden.

bb) und *cc)* Für diese Untersuchungen kann man unterscheiden, ob das Fernrohr um 180° gedreht werden kann, so daß Objektiv und Okular vertauscht sind oder nicht. Im ersten Falle heißt das Fernrohr **durchschlagbar** und das Umdrehen selbst heißt **Durchschlagen**. Bei Kippregeln kann das Fernrohr in der Regel nur mit dem Okular durchgeschlagen werden, da bloß die dem Okular zugekehrte Fernrohrhälfte bei ganz hineingeschobener Okularröhre kürzer ist, als der Fernrohrständer.

Ist das Fernrohr **nicht durchschlagbar**, so verfährt man wie folgt: Man stellt den Meßtisch zirka 40 bis 50 *m* vor einer vertikalen möglichst hohen Mauer auf, schlägt am höchsten erreichbaren Punkte einen Nagel *N* ein und bindet eine lange Schnur an denselben. Sodann stellt man die Kippregel mit der Drehungsachse dem Augenmaße nach parallel zur Mauer auf den bloß dem Auge nach horizontierten Meßtisch und visiert den Nagel *N* an. Dann kippt man das Fernrohr in den Horizont, schlägt dort, wo die Visur die Mauer trifft, einen zweiten Nagel *N'* ein und bindet die Schnur an den Nagel vollkommen gespannt an, so daß sie eine Gerade *N N'* bildet, Fig. 268. Nun bewegt man das Fernrohr langsam nach *N* aufwärts und beobachtet, ob die Visur stets durch die Schnur geht, d. h. ob das Fadenkreuz immer an der Schnur bleibt. Ist dies der Fall, dann stehen optische Achse und Drehungsachse aufeinander senkrecht. Weicht aber die Visur gegen die Mitte der Schnur immer mehr ab und nähert sie sich gegen den Nagel *N* zu wieder der Schnur, dann stehen die beiden genannten Achsen aufeinander nicht senkrecht.*) Eine Korrektur kann man nur vornehmen, indem man das Fadenkreuz mit den dazu vorhandenen Schrauben nach links oder rechts verschiebt und den Vorgang wiederholt.

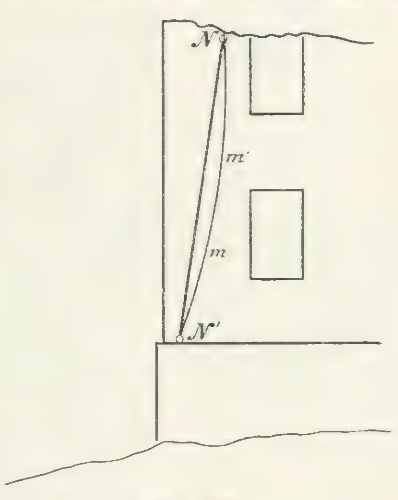


Fig. 268.

Hat man auf diese Weise die senkrechte Stellung der optischen und der Drehungsachse gesichert, dann bindet man die Schnur vom Nagel *N'* los und befestigt daran einen schweren Stein, wodurch die Schnur vertikal gespannt wird. Hierauf horizontiert man den Meßtisch **genau** und visiert scharf den Nagel *N* an (pointiert ihn). Kippt man hierauf das Fernrohr in den Horizont, so muß die Visur durch die Schnur gehen, wenn die Drehungsachse horizontal, also die Kippebene (d. i. die Ebene, welche die optische Achse beim Auf- und Abkippen beschreibt) vertikal ist. Weicht die Visur ab, dann ist entweder der Ständer mittels des Schräubchens *m* in Fig. 265 zu heben oder zu senken, oder aber es muß, wenn der Ständer fest ist, die Drehachse selbst mittels der Schraube *t* in Fig. 266 horizontal gestellt werden. Ist eine Armachsenlibelle vorhanden, so wird sie nach dieser Operation nicht mehr einspielen und daher mit Hilfe ihres Rektifizierschräub-

*) In dem Falle beschreibt die optische Achse, d. i. die Verbindungsgerade zwischen Fadenkreuzmittelpunkt und Objektivlinsenmittelpunkt beim Drehen keine Ebene, sondern eine Kegelfläche (versinnbildlichen, indem man in einen Bleistift eine Nadel einmal senkrecht, einmal schief einsteckt und die Bewegung der Nadel beim Drehen des Bleistiftes verfolgt), der Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene, also der Mauer, ist aber keine Gerade, sondern eine Kurve *N m' m N'*.

chens wieder zum Einspielen gebracht. Man weiß dann, daß jedesmal, wenn die Armachsenlibelle einspielt, die Kippebene vertikal steht, auch wenn der Meßtisch nicht genau horizontal ist.

Ist das Fernrohr durchschlagbar, so könnte man allerdings auch die obigen Prüfungsmethoden anwenden, allein in dem Falle stehen uns noch andere zu Gebote.

Man stellt auf ebenem Terrain den Meßtisch in einer Entfernung von zirka 50 m von einer Mauer genau horizontal auf und visiert einen auf der der Mauer entgegengesetzt liegenden Seite des Meßtisches befindlichen fixen Punkt P an Fig. 269 (erste Lage des Fernrohres). Der Punkt P soll so liegen, daß die von P durch die Kippregel gedachte Gerade annähernd senkrecht auf der Mauer steht. Sodann zieht man auf der Mauer eine horizontale dicke Linie so hoch über dem Boden, als sich das Fernrohr über dem Boden befindet, schlägt das Fernrohr durch und bezeichnet sich jenen Punkt p, wo die Visur die horizontale Linie trifft (zweite Lage des Fernrohres). Hierauf steckt man dort, wo eine durch den Drehpunkt des Fernrohres gedachte Vertikale die Ziehkante trifft, eine feine Nadel n ein. Dann setzt man die ganze Kippregel um 180° um und legt die Ziehkante von der anderen Seite an die Nadel so an, daß der Fernrohrdrehpunkt über n liegt, wodurch, da das Fernrohr durchgeschlagen ist, das Objektiv wieder gegen P zu steht. Der Punkt P wird nun wieder scharf pointiert, wobei die Ziehkante an der Nadel anliegen muß (dritte Lage des Fernrohres). Endlich wird das Fernrohr abermals durchgeschlagen und an der Mauer der Punkt p' bezeichnet, wo die Visur die horizontale Linie trifft (vierte Lage des Fernrohres). Fallen p und p' zusammen, dann steht die optische Achse auf der Drehungsachse senkrecht, wenn nicht, dann stellt die Entfernung $p\,p'$ den vierfachen Fehler dar, wie aus der Fig. 269 leicht zu ersehen ist.*)

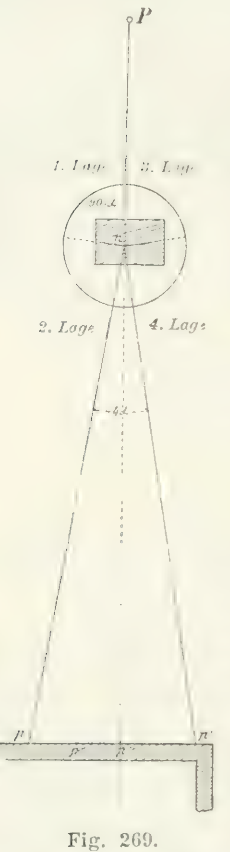


Fig. 269.

Man stellt daher das Fernrohr wieder in die erste Lage, pointiert P, schlägt durch, teilt die $p\,p'$ in vier Teile und verschiebt nun das Fadenkreuz so lange, bis die Visur durch p'' geht. Bringt man dann das Fernrohr in seine erste Lage, pointiert P und schlägt durch, so muß jetzt die Visur durch p''' gehen, sofern man genau gearbeitet hat, und es stehen optische und Drehungsachse aufeinander senkrecht.

Um die Drehungsachse noch horizontal zu stellen, stellt man sich mit dem Meßtisch vor eine hohe Mauer, pointiert einen hochgelegenen Fixpunkt, kippt das Fernrohr in den Horizont und bezeichnet wieder auf einer horizontalen Linie (Sockelkante) den Durchgang der Visur mit einem Punkte p. Dann steckt man wieder unterhalb des Fernrohrdrehpunktes eine Nadel scharf an die Ziehkante, setzt die Kippregel um, schlägt das Fernrohr durch und pointiert abermals denselben hochgelegenen Fixpunkt, wobei die Ziehkante scharf an der Nadel liegen muß. Kippt man nun das Fernrohr wieder herab und geht die Visur durch den früher bezeichneten Punkt p, dann ist die Drehungsachse horizontal. Geht aber die Visur durch einen anderen Punkt p' der Sockelkante, dann ist $p\,p'$ der doppelte Fehler. Man bringt hierauf das Fernrohr in seine erste Lage und verstellt die Achse mit der Schraube t so lange, bis die herabgekippte Visur den Halbierungspunkt zwischen p und p' trifft.

dd) Um zu prüfen, ob die Ziehkante in der Visierebene liegt, zieht man auf dem horizontalen Meßtische eine lange Linie, steckt an ihrem Anfange und Ende je eine feine Nähnadel vertikal ein und visiert mit freiem Auge in möglichst großer Entfernung einen Absteckstab in die Richtung der beiden Nadeln. Legt man dann die Kippregel mit der Ziehkante an die beiden Nadeln, so muß die Visur genau durch den Absteckstab gehen. Wenn nicht, ist der Fernrohrständer mit Hilfe der Fußplattenschrauben entsprechend zu verdrehen.

Endlich soll auch noch der Vertikalfaden tatsächlich vertikal sein, was man leicht durch Anvisieren eines aufgehängten Senkels konstatieren kann. Sollte sich das Rähmchen

---

*) Ist nämlich der fragliche Winkel nicht 90°, sondern etwa um α kleiner, also $90 - \alpha$, dann ist er offenbar in allen vier Fernrohrlagen zusammen viermal so groß, also $4 \times (90 - \alpha) = 360 - 4\,\alpha$. Der Winkel zwischen den Strahlen nach p und p' ist aber die Differenz zwischen dem Vollkreis und diesem vierfachen Winkel, also:

$$360 - (360 - 4\,\alpha) = 360 - 360 + 4\,\alpha = 4\,\alpha.$$

(α ist der erste Buchstabe des griechischen Alphabetes und heißt „Alpha".)

des Fadenkreuzes etwa nicht drehen lassen, so benützt man bei schiefem Faden immer nur den Kreuzungspunkt der beiden Fäden als Absehen.

c) Gebrauch. Er ist derselbe wie der des Diopterlineals. Beim Heben des Instrumentes darf es nie beim Fernrohr angefaßt werden, sondern am Ständer; es muß überhaupt, zumal nach erfolgter Rektifikation, sehr vorsichtig behandelt werden.

3. Die Lotgabel.

a) Beschreibung. Die Lotgabel ist ein aus hartem Holze angefertigter Winkel *a b c*, Fig. 270, welcher so beschaffen ist, daß die Verlängerung des Senkels *c g* nach oben genau durch die Mitte der zugeschärften Kante bei *a* geht, wenn der Schenkel *a b* auf der horizontalen Tischplatte *m* liegt.

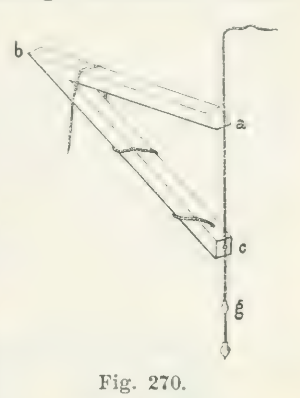
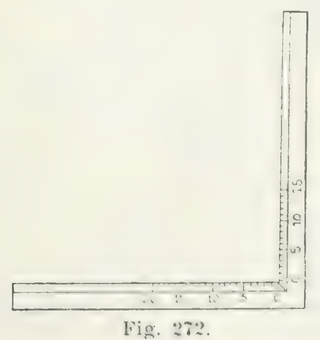


Fig. 270.

b) Prüfung und Berichtigung. Um die letztgenannte Eigenschaft zu prüfen, legt man die Lotgabel auf den horizontal gestellten Meßtisch *m*, Fig. 271, und bezeichnet sich genau den Bodenpunkt *g*, über welchem der Senkel spielt, sowie mittels eines Nadelstiches die Mitte der Endkante des oberen Schenkels *a*. Sodann legt man die Lotgabel von der anderen Seite des Tisches so an denselben Punkt, daß der obere Schenkel *a b* in die Verlängerung seiner ersten Lage, also nach *a b'* kommt, und sieht nach, ob der Senkel wieder über demselben Bodenpunkt spielt, in welchem Falle die Lotgabel richtig ist. In der Figur ist dies nicht der Fall, sondern es kommt in der zweiten Lage der Senkel über *g'* zu stehen. Der Schenkel *a b* ist also zu lang und muß um die halbe Entfernung *g g'* gekürzt werden, wonach dann der Senkel über dem richtigen vertikal unter *a* liegenden Bodenpunkt *g''* stehen wird. Wäre bei der zweiten Lage der Lotgabel der Senkelpunkt *g'* links von *g* gefallen, dann wäre dies ein Zeichen, daß der Arm *a b* zu kurz ist, in welchem Falle dann der untere Schenkel *b c* entsprechend gekürzt werden muß.

c) Gebrauch. Die Art der Anwendung der Lotgabel ergibt sich aus dem Gesagten. Hat man einen Bodenpunkt auf den Tisch zu projizieren, so legt man die Lotgabel beliebig auf den Tisch und verschiebt sie so lange, bis der Senkel über dem Bodenpunkte steht. Die Mitte der Kante *a*, die gewöhnlich markiert ist, bezeichnet dann den gesuchten Tischpunkt. Ist umgekehrt ein Tischpunkt auf den Boden zu senkeln, so legt man die Marke bei *a* an den Tischpunkt und bezeichnet sich den Bodenpunkt, über welchem der Senkel steht. Häufig kommt der Fall vor, daß ein gegebener Tischpunkt über einen gegebenen Bodenpunkt zu stellen ist. In dem Falle legt man die Marke bei *a* an den Tischpunkt und verschiebt die Meßtischplatte samt der Lotgabel (mittels des Schiebekreuzes) bis der Senkel über dem gegebenen Bodenpunkte spielt.

Fig. 271.


Fig. 272.

4. Der Ordinatenwinkel.

a) Beschreibung. Der Ordinatenwinkel besteht aus einem aus Hartholz angefertigten rechten Winkel, der an der Innenseite eine Zentimeterteilung trägt, Fig. 272.

b) Prüfung. Die Prüfung beschränkt sich hier auf die Untersuchung, ob die Teilung eine richtige und ob der Winkel ein rechter ist. Kleine Abweichungen sind belanglos, wie aus der Art der Anwendung dieses Instrumentes erhellt.

c) Gebrauch. Derselbe wird gelegentlich der Arbeiten mit dem Meßtische besprochen werden. Der Ordinatenwinkel ist nicht unbedingt erforderlich, erleichtert jedoch sehr das Aufstellen des Meßtisches.

5. Die Boussole.

a) Beschreibung. Eine Boussole, Fig. 273, besteht in der Regel aus einer kreisrunden metallenen, oben mit einer Glasscheibe geschlossenen Dose, aus deren Mittelpunkt ein Stahlstift senkrecht in die Höhe ragt, auf welchem eine Magnetnadel frei balancieren kann. Damit die Reibung zwischen der Nadel und dem Stifte eine möglichst geringe sei, ist in der Mitte der Nadel ein Achathütchen eingelassen. In derselben Ebene, in welcher die Nadel schwingt, befindet sich längs des Randes der Dose ein kreisförmiger Metallstreifen mit einer Einteilung in Grade oder bei größeren Boussolen in halbe Grade. Um eine Boussole für Meßtischarbeiten verwendbar zu machen, ist sie auf einer quadratischen Metallplatte so befestigt, daß zwei der Plattenkanten mit der Verbindungslinie von 0° und 180° (N und S), die anderen beiden mit der Verbindungslinie von 90° und 270° (O und W) parallel laufen. Endlich ist noch eine Vorrichtung angebracht, mittels deren die Nadel, im Falle sie nicht gebraucht wird, festgestellt („arretiert") werden kann; sie besteht aus einem Hebel, der, wenn er außerhalb der Dose mittels einer Schraube *a* niedergedrückt wird, im Innern des Gehäuses die Nadel vom Stift abhebt und gegen den Glasdeckel preßt. Es ist dies notwendig, um die starke Abnützung des Balancierstiftes, welche beim Transporte des Instrumentes unfehlbar eintreten müßte, zu verhindern.

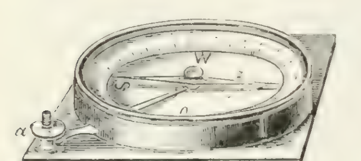


Fig. 273.

Die Nadel selbst ist entweder flach (Schwertnadel), wie in der Figur, oder hochkantig (Balkennadel) aufgehängt und ihre nach Norden zeigende Spitze ist, zur Unterscheidung von der anderen, gewöhnlich blau angelaufen.

b) Prüfung und Berichtigung. Damit mit der Boussole brauchbare Resultate erzielt werden können, muß die Nadel eine genügende Empfindlichkeit besitzen. Man prüft dies, indem man die in dem horizontal aufgestellten Gehäuse zur Ruhe gekommene Nadel durch Annäherung eines Eisenstückes zum Schwingen bringt und beobachtet, ob sie nach Entfernung des Eisens wieder an ihrer ursprünglichen Stelle stehen bleibt. Nimmt sie bei Wiederholung dieses Experimentes jedesmal eine andere Ruhestellung ein und reagiert sie nicht sofort auf das angenäherte Eisenstück, dann ist entweder die Balancierspitze verrostet, verbogen oder abgenützt oder es hat die Nadel ihre magnetische Kraft verloren. Beide Fehler beseitigt am besten der Mechaniker.

Auch soll die Nadel wagrecht balancieren, also auf keiner Seite über den geteilten Kreis hervorragen. In der Regel befindet sich an dem einen Nadelarm ein Messingring, durch dessen Verschieben die Nadel ins Gleichgewicht gebracht werden kann. Andernfalls hilft man sich durch Ankleben eines Stückchens Wachs an den zu leichten Arm.

c) Gebrauch. Er beruht auf der bekannten Tatsache, daß eine freischwingende Magnetnadel in ihrer Ruhelage stets mit einer Spitze nach Norden zeigt, also eine konstante Richtung angibt. Die Verbindungsgerade der beiden Spitzen heißt die Nord-Süd-Linie oder der magnetische Meridian.*) Liest man also in irgendeiner Stellung der Boussole die Anzahl Grade, welche die Nordspitze zeigt, ab und stellt an einem anderen Orte das Instrument so auf, daß die Nordspitze wieder auf die gleiche Ablesung zeigt, so ist klar, daß die Stellung der Boussole am zweiten Orte parallel ist ihrer Stellung am ersten Orte, daß daher auch die Lage der Fußplattenkanten in beiden Orten eine parallele ist. Das nähere über den Gebrauch der Boussole wird bei den Meßtischarbeiten besprochen werden.

6. Längenmeßinstrumente.

Als solche werden die bereits oben beschriebenen Instrumente verwendet, und zwar je nach der erforderlichen Genauigkeit entweder Latten oder das Stahlmeßband oder aber auch nur Leinenmeßbänder, eventuell Meßketten.

---

*) Er fällt nicht zusammen mit dem astronomischen Meridian, welcher der Schnitt einer durch den Beobachterstandpunkt und die Erdachse gelegten Ebene mit der Erdkugeloberfläche ist. Die Abweichung des magnetischen vom astronomischen Meridian heißt Deklination und ist vielen Schwankungen unterworfen; gegenwärtig ist sie eine westliche und wird jährlich kleiner.

Sehr häufig sind die Kippregeln zum optischen Distanzmessen eingerichtet, worüber im § 19 das nötigste gesagt ist.

7. Zeichenrequisiten und Sonstiges.

An Zeichenrequisiten benötigt man:

a) einen guten Zirkel, wenn möglich einen Haarzirkel (d. i. ein Zirkel, dessen eine Spitze eine Feinbewegung hat);

b) einen Transversalmaßstab aus Messing in dem verlangten Verhältnisse;

c) zwei Bleistifte, und zwar einen Nr. 3 zum Beschreiben, den anderen Nr. 4 oder 5 zum Zeichnen;

d) einen weichen guten Radiergummi;

e) einige feine Anschlag- oder Pikiernadeln.

Hiezu nimmt man möglichst feine, aber nicht zu kurze Nähnadeln, auf welche man kleine Köpfchen aus Holz befestigt oder einen Tropfen Siegellack anbringt, wodurch das Einstecken in das Zeichenblatt erleichtert wird. (Zum Zwecke der Anfertigung von Siegellackköpfen erwärmt man etwas Siegellack, klebt es über das Öhrende und hält es, die Nadelspitze aufwärts über eine Flamme, wodurch es Tropfenform annimmt. In diesem Zustande läßt man es erstarren; man muß sich jedoch hüten, die Nadel selbst allzusehr zu erwärmen, weil sie sonst weich wird);

f) eine Bleistiftfeile oder ein Bimssteinchen zum Nachspitzen der Bleistifte.

Alle diese Behelfe samt einer Reißfeder erhält man käuflich in Etuis zusammengestellt unter dem Namen Feldreißzeug.

An sonstigen Behelfen sind erforderlich: Ein starker großer Leinwandschirm mit einem Stockstativ, um auch bei Sonnenschein arbeiten zu können und bei einfallendem Regen die ersten Tropfen abzuhalten, ferner einen Wachstuch- oder Lederüberzug über den ganzen Meßtisch zum Schutze gegen Feuchtigkeit, endlich eine Anzahl Absteckstäbe, Signalfahnen, ein Reservesenkel u. dgl.

§ 17. Das Arbeiten mit dem Meßtische.

1. Das Aufstellen.

Um mit dem Meßtische arbeiten zu können, muß man ihn vor allem meßgerecht aufstellen. Ein Meßtisch heißt meßgerecht aufgestellt, wenn er *a)* horizontiert, *b)* zentriert, *c)* orientiert ist.

a) Der Meßtisch ist horizontiert, wenn die Libelle an jeder beliebigen Stelle der Tischplatte einspielt (siehe Seite 260);

b) er ist zentriert, wenn der betreffende Bodenpunkt, der jeweilige Standpunkt, vertikal unter dem gleichnamigen Tischpunkte liegt (siehe Seite 269);

c) er ist orientiert, wenn die Tischlinien, d. h. die am Blatte gezeichneten Linien, parallel mit den gleichnamigen Feldlinien laufen.

Bei der meßgerechten Aufstellung kann man mehrere Fälle unterscheiden.

1. Am Tischblatte ist noch nichts verzeichnet und man beginnt eben erst die Arbeit.

Man stellt den Tisch in bequemer Zeichenhöhe so über den gegebenen Feldpunkt, daß voraussichtlich keiner der aufzunehmenden Punkte über das Tischblatt hinausfällt und senkelt den gegebenen Bodenpunkt mittels der Lotgabel auf den Tisch. Eine Orientierung ist in diesem Falle nicht notwendig, da alle von dem Punkte aus gezogenen Strahlen ohnehin parallel mit den Feldlinien sind.

2. Am Zeichenblatte ist bereits eine Linie vorhanden, in deren einem Endpunkte man aufstellen soll.

Während im ersten Falle der Tisch beliebig gestellt werden konnte, handelt es sich hier darum, einen schon gegebenen Tischpunkt a über den Bodenpunkt A und den gegebenen Rayon ab über die Feldlinie AB zu bringen, Fig. 274.

Man stellt den Tisch dem Augenmaße nach horizontal so auf, daß beiläufig a über A zu liegen kommt und dreht ihn bei ausgelöster Mikrometerschraube so, daß ab beiläufig in die Richtung AB fällt. Nun nimmt man die Lotgabel und untersucht, ob a tatsächlich über A liegt, was in der Regel natürlich nicht der Fall sein wird. Fehlt

viel, dann muß der ganze Tisch umgestellt werden; ist die Abweichung aber nicht bedeutend, dann wird die Tischplatte mittels des Schiebekreuzes so weit verschoben, bis *a* über *A* liegt, wobei aber immer *a b* in der Richtung *A B* liegen muß. Nun schraubt man das Schiebungskreuz fest, stellt den Tisch genau horizontal, legt das Visierlineal scharf an die Linie *a b* und dreht den Tisch mit der Wendeschraube so lange, bis die Visur genau durch den in *B* aufgestellten Absteckstab geht. Zur Vorsicht prüft man nochmals mit der Lotgabel und wiederholt den Vorgang bei vorkommender Abweichung.

Zur rascheren Orientierung leistet in diesem Falle der Ordinatenwinkel sehr gute Dienste.

Nehmen wir an, der Tisch sei bereits in *A* vollkommen meßgerecht aufgestellt, Fig. 274, so liegt der Tischmittelpunkt *c* (Schnitt der beiden Diagonalen), um welchen sich bei normaler Lage des Schiebungskreuzes die Tischplatte dreht, über einem bestimmten Punkte des Bodens *C* und kann gar nicht über einem anderen Punkte liegen, wenn die Tischlinie *a b* über der Feldlinie *A B* liegen soll. Daraus folgt, daß man den Meßtisch überhaupt nur dann in *A* meßgerecht aufstellen kann, wenn auch *c* über *C* gestellt wird.

Sucht man sich also zuerst am Boden den Punkt *C* und stellt mittels eines Senkels den Tisch so darüber, daß *c* über *C* liegt, dann braucht man nur die Tischplatte so lange zu drehen, bis die Visur über *a b* durch *B* geht und es wird dann von selbst *a* über *A* fallen, d. h. der Tisch orientiert sein. Die Bestimmung von *C* am Boden ist wegen der Kongruenz der Dreiecke *a 1 c* und *A I C* sehr einfach. Man mißt mit Hilfe des Ordinatenwinkels die Katheten *a 1* und *1 c* und überträgt sie auf den Boden, indem man den Ordinatenwinkel mit dem Schenkel *2 1* so an die Feldlinie *A B* legt, daß die bei *a* am Tische abgelesene Ziffer nun bei *A* liegt; dadurch ergibt sich dann der Punkt *C* dort, wo man bei *c* am Tische abgelesen hatte (der Punkt *I* wird nicht benötigt). Den so gefundenen Punkt *C* markiert man sich mit einem zu diesem Zwecke bestimmten Eisennagel, dem Markierstift, und stellt dann darüber den Meßtisch mit seinem Mittelpunkte auf. Hiebei muß man beachten, daß keiner der drei Füße über den Punkt *A* zu liegen kommt, da man sonst mit der Lotgabel häufig nicht arbeiten kann. Hierauf dreht man den Tisch, bis *a b* in die Richtung *A B* fällt, wobei dann *a* über *A* stehen wird.

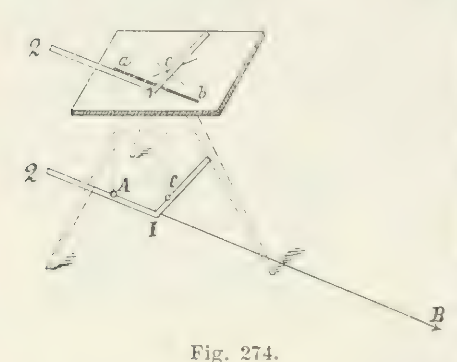


Fig. 274.

3. Am Zeichenbrette ist bereits eine Linie *a b* vorhanden, und man soll den Tisch in einem Zwischenpunkte von *A B* aufstellen.

Zu diesem Zwecke bestimmt man sich mittels Einmessens jenen Punkt *C* der Linie *A B*, über welchem man aufstellen soll, auch am Tische als Punkt *c* und stellt dann nach Absatz 2 *c* über *C*. Hierauf dreht man die horizontierte Tischplatte, bis die Visur durch das Signal bei *B* geht und untersucht, ob die Rückvisur auch durch *A* geht. Ist dies nicht der Fall, dann muß der Tisch mit dem Schiebekreuz etwas verschoben werden. Ein zweimaliges Wiederholen genügt in der Regel, um den Tisch meßgerecht zu stellen.

4. Der Meßtisch soll mit der Boussole orientiert werden.

Dies erfordert, daß schon bei der ersten Aufstellung des Meßtisches der magnetische Meridian am Tischblatte gezogen worden sei. Man wird also, nachdem der Meßtisch auf dem ersten Punkte meßgerecht aufgestellt worden ist, die Boussole auf den Tisch legen und so lange sachte drehen, bis die Nordspitze auf 0°, die Südspitze auf 180° zeigt; dann liegt natürlich die mit 0 bis 180 parallele Kante der Fußplatte auch im magnetischen Meridian und eine längs dieser Kante gezogene Linie stellt dann die Nord-Süd-Linie dar. Um eine möglichst lange Linie zu erhalten, legt man noch das Visierlineal an diese Kante und zieht an den Rändern des Meßtisches kurze (1 *cm*) Striche, die sogenannten Randmarken, die man mit *N* und *S* bezeichnet.

Um nun an irgendeinem anderen Feldpunkte den Meßtisch zu orientieren, legt man das Lineal wieder an die Randmarken, schiebt die Boussole sanft an das Lineal und dreht die Meßtischplatte so lange, bis die Nordspitze auf 0° zeigt. Dann hat der Meßtisch dieselbe Lage wie in seiner ersten Aufstellung und es laufen daher alle Meßtischlinien parallel den gleichnamigen Feldlinien.

II. Rayonnieren und Messen.

Unter Rayonnieren und Messen versteht man eine Operation, mit deren Hilfe man imstande ist, mehrere gegebene Feldpunkte von einem einzigen Meßtischstandpunkte aus aufzunehmen, d. h. so zu verzeichnen, daß sie am Tische dieselbe Lage zueinander haben, wie am Felde. Zu diesem Zwecke begibt man sich mit dem Meßtische auf einen Punkt, von welchem aus zu allen oder doch zu sehr vielen der aufzunehmenden Punkte gesehen und gemessen werden kann und stellt ihn dort genau horizontal auf. Sodann wählt man sich auf dem Zeichenblatte einen Punkt s so, daß voraussichtlich alle aufzunehmenden Punkte am Papier Platz finden, senkelt diesen Punkt mittels der Lotgabel auf den Boden und markiert den auf diese Weise gefundenen Standpunkt S mit einem Pflocke. Hierauf legt man das Diopterlineal oder die Kippregel an den Punkt s, in den man eine Anschlagnadel vertikal eingesteckt hat und visiert den im Punkt A aufgestellten Absteckstab genau an, worauf man längs der Ziehkante den Rayon zieht. Trägt man nun die von Gehilfen inzwischen gemessene Felddistanz SA in verjüngtem Maßstabe von s an am Rayon auf, so erhält man den Tischpunkt a, Fig. 275.

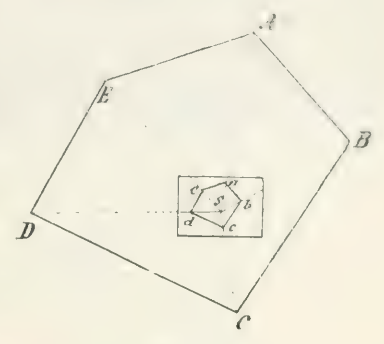
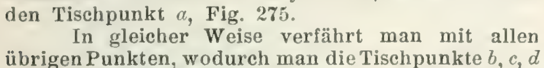


Fig. 275.


In gleicher Weise verfährt man mit allen übrigen Punkten, wodurch man die Tischpunkte b, c, d und e erhält. Verbindet man dann die gefundenen Punkte mitsammen, so sind die Tischdreiecke $a\,s\,b$, $b\,s\,c$, $c\,s\,d$ usw. der Reihe nach ähnlich den Felddreiecken $A\,S\,B$, $B\,S\,C$, $C\,S\,D$ usw., daher ist es auch die ganze Tischfigur $a\,b\,c\,d\,e$ mit der Feldfigur $A\,B\,C\,D\,E$.

Der Punkt S kann auch außerhalb der Feldfigur liegen, wie in Fig. 276, oder mit einem Eckpunkte zusammenfallen, wie in Fig. 277.*)

Sollten von einem Punkte aus nicht alle Eckpunkte zu sehen sein, dann wählt man noch einen zweiten Standpunkt S', den man in derselben Weise, also durch Rayon und

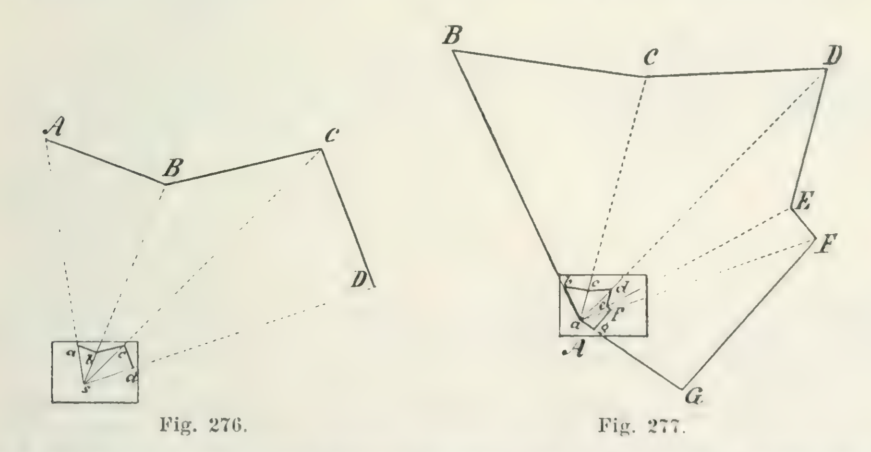


Fig. 276. Fig. 277.

Maß als s' am Tische bestimmt. Hierauf überträgt man den Tisch nach S', stellt ihn dort horizontal mit s' über S' und nach $S'\,S$ orientiert (siehe Seite 271, Punkt 2) auf und bestimmt dann die restlichen Punkte in der eben besprochenen Weise von S' aus.

Diese Methode kann nur auf freiem Terrain angewendet werden.

III. Rayonnieren und Schneiden.

Hierunter versteht man eine Meßtischoperation, mit welcher man eine Feldfigur von zwei Standpunkten aus aufnimmt. Hiezu wählt man sich in der Natur zwei Punkte

*) Eine geschlossene Figur, Fig. 275, nennt man ein Polygon, eine nicht geschlossene, Fig. 276, einen Polygonzug.

S und S_1, Fig. 278, so daß von jedem derselben alle aufzunehmenden Punkte gesehen werden können und stellt sich über einem derselben horizontal auf. Sodann mißt man die Linie $S S_1$, die Standlinie, sehr genau, lotet den Punkt S auf den Tisch nach s, zieht den Rayon nach S_1 und trägt die Entfernung $S S_1$ in verjüngtem Maßstabe auf, wodurch man s_1 erhält. Nun zieht man von s aus nach allen, vorher mit Signalen (in der Figur bloß in B) versehenen, Eckpunkten möglichst lange Rayons, die man, um sie später leichter finden zu können, entsprechend mit Bleistift bezeichnet. Sodann begibt man sich mit dem Meßtische nach dem Punkte S_1 und stellt ihn dort meßgerecht auf, d. h. s_1 vertikal über S_1, horizontal und nach S zurück orientiert. Weiters zieht man nun auch von s_1 aus zu allen Eckpunkten Rayons und erhält dort, wo sich zwei zugehörige Rayons schneiden, den aufzunehmenden Umfangspunkt; z. B. wo der Rayon s_1 nach A den Rayon s nach A schneidet, ist der Tischpunkt a usw. Man zieht von s_1 aus die Rayons nicht in ganzer Länge, sondern nur jenes Stück, welches zum Schnitt benötigt wird. Verbindet man dann die erhaltenen Schnittpunkte miteinander, so erhält man eine Figur, welche der Feldfigur ähnlich ist. Es ist nicht erforderlich,

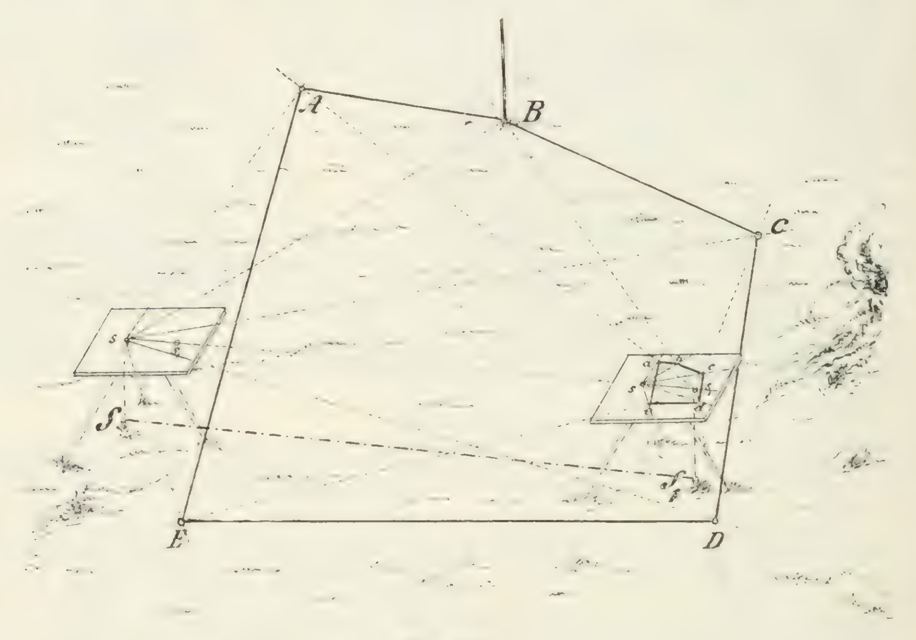


Fig. 278.

daß die Standlinie innerhalb der Figur liege, sondern es kann auch einer der beiden Punkte S und S_1 außerhalb angenommen werden, wie in Fig. 278; mitunter wird es, um gute Schnitte zu erhalten auch vorkommen, daß man beide Punkte außerhalb der Figur wählt.

Auch diese Methode kann nur da angewendet werden, wo freie Aussicht vorhanden ist, gewährt aber den Vorteil, daß nur eine einzige Linie gemessen zu werden braucht. Bei der Ausführung muß man sich der größten Sorgfalt befleißen und Schnitte unter 30° sowie über 150° vermeiden. Solche Schnitte heißen „schleifende" und lassen bei der Dicke der Bleistiftlinien den wirklichen Schnittpunkt nicht genau erkennen.

IV. Aufnahme aus dem Umfange.

Da die bisher besprochenen Aufnahmsmethoden nur bei Terrain mit freier Aussicht möglich sind, können sie bei Aufnahme von Waldparzellen, Weingärten oder mit Frucht bestandenen Feldern nicht angewendet werden und es muß da die Aufnahme aus dem Umfange platzgreifen.

Man stellt den Meßtisch so über einen beliebigen Umfangspunkt A, Fig. 279, daß der heraufgelotete Punkt a nahe am Blattrande zu liegen kommt und die ganze Figur am Zeichenblatte Platz findet. Um sich über letztgenannten Umstand klar zu werden,

muß man die Figur vorher begehen und davon eine Skizze entwerfen (was überhaupt vor jeder Aufnahme geschehen soll). Sodann horizontiert man den Tisch, zieht die Rayons nach B und M und trägt die inzwischen gemessenen Längen AB und AM auf, wodurch man die Punkte b und m erhält. Dann überstellt man den Tisch nach B, horizontiert, zentriert (b über B), orientiert nach BA, zieht den Rayon nach C, mißt BC

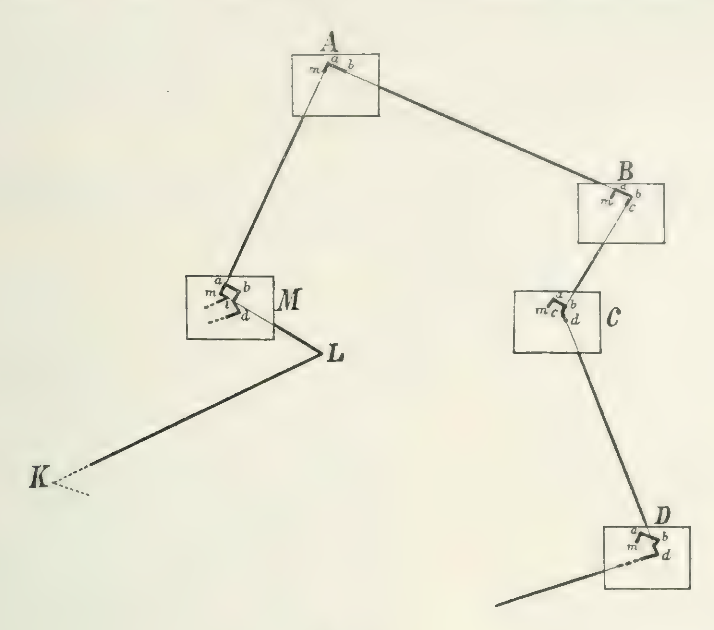


Fig. 279.

und trägt die Entfernung von b aus auf, wodurch man c erhält. Hierauf folgt das Übertragen des Tisches nach C, meßgerechtes Aufstellen daselbst bei Orientierung nach CB, Ziehen des Rayons nach D, Auftragen von CD nach dem neuen Punkte d usw. Dieser Vorgang wiederholt sich, bis man um die ganze Figur herumgekommen ist. Der letzte Rayon nach M muß natürlich durch den schon vom ersten Punkte aus bestimmten Punkt m gehen und die Länge $l\,m$ muß mit der in der Natur gemessenen Länge LM übereinstimmen, d. h. die Figur muß in M „schließen".

In der Regel wird dies nicht der Fall sein und man wird das Polygon künstlich zum Schluß bringen müssen. Wie dies bewerkstelligt wird, soll im Punkte *VI* gezeigt werden; damit aber der Fehler ein möglichst geringer werde, muß beim Arbeiten, insbesondere beim Aufstellen des Tisches, mit der größten Sorgfalt vorgegangen und außerdem noch folgendes beobachtet werden:



Fig. 280.

a) Kontrollvisuren und Kontrollmessungen sollen so oft als möglich vorgenommen werden, insbesondere empfiehlt es sich, sogenannte „Kontrollrayons" zu ziehen, d. h. irgend einen überall sichtbaren Fixpunkt (Kirchturm, Kamin etc.) so oft es geht anzuvisieren und den Rayon zu ziehen. Alle diese Rayons müssen sich bei richtiger Arbeit in einem Punkte schneiden.

b) Da nach langen Rayons sicherer orientiert werden kann als nach kurzen, sind alle Rayons noch mit Randmarken (kurzen Strichen am Tischrande) zu versehen. Beim Orientieren legt man dann das Lineal an den Rayon und seine Randmarke an.

c) Man soll ein Polygon nie ganz in einer Richtung aufnehmen, sondern bloß bis zur Hälfte, während die andere Hälfte vom Ausgangspunkte angefangen nach der anderen Richtung aufgenommen werden soll. Man vermeidet dadurch, daß ein etwaiger Fehler durch die ganze Figur fortgeschleppt wird.

d) Bei kurzen Umfangslinien empfiehlt es sich, nicht auf jedem Punkte aufzustellen sondern zwei oder mehrere zu überspringen und die ausgelassenen Punkte mit Abszissen und Ordinaten zu bestimmen, also z. B. in der Fig. 280 vom Punkt 5 aus sogleich den Punkt 9 anzuvisieren, 6, 7 und 8 aber auf die Linie 5 bis 9 einzumessen.

V. Aufnahme mit Springständen.

Diese Aufnahmsmethode hat ihren Namen daher, daß man den Meßtisch nur auf den Punkten 1, 3, 5, 7 usw. aufstellt und die Punkte 2, 4, 6 usw. überspringt. Die Orientierung kann hier nicht nach dem Rückrayon vorgenommen werden, der ja nicht gezogen ist, sondern muß mit Hilfe der Boussole erfolgen.

Der Vorgang ist hiebei folgender:

Man stellt im Punkte *I* auf, Fig. 281, horizontiert und zieht den Rayon nach *II*, mißt die Linie *I II* und trägt die Entfernung von *1* aus auf, wodurch man den Tischpunkt *2* erhält. Nun zieht man in der Mitte des Tischblattes mittels der Boussole die Nord-Süd-Linie samt Randmarken. Hierauf begibt man sich nach dem Punkte *III*, stellt dort den Tischpunkt *2* über den Bodenpunkt *III* und orientiert nach der Nord-Süd-Linie, wodurch die Tischlinie *1 2* mit der Bodenlinie *I II* parallel gestellt wird. Legt man nun das Visierlineal an *2* an, visiert nach *II* und zieht den Rayon zurück (also von *II* weg), so schließt dieser Rayon mit der Linie *2 1* offenbar denselben Winkel ein, wie die Linie *III II* mit der Linie *II I*. Man trägt jetzt die inzwischen gemessene Länge *II III* auf diesen Rayon auf und erhält dadurch den Punkt *3* am Tische. Nun steht aber der Tischpunkt *3* nicht genau vertikal über dem Bodenpunkt *III*, da ja *2* über denselben gestellt wurde. Um ganz genau zu sein, müßte man jetzt, ehe man weiter arbeitet, den Punkt *3* mittels des Schiebekreuzes genau über *III* bringen. Dies ist aber mit Rücksicht darauf, daß Arbeiten mit der Boussole ohnehin nicht sehr genau sind, nur dann notwendig, wenn die Länge *II III* sehr groß, die Abweichung des Punktes *3* von seinem vertikalen Stande über *III* also sehr beträchtlich ist. In den meisten Fällen ist aber diese Abweichung nur 1 bis 2 *cm* und es kann der dadurch entstehende Zentrierungsfehler vernachlässigt werden. Nun legt man das Visierlineal an den Punkt *3*, visiert nach *IV*, zieht den Rayon und trägt darauf die Länge *III* bis *IV* auf, wodurch man den Tischpunkt *4* erhält. In der gleichen Weise wird fortgefahren. Es folgt also: Überstellen des Tisches nach *V*, Zentrieren *4* über *V*, Orientieren nach *N S*, Ziehen des Rayons von *4* nach *IV* gegen sich zu, Auftragen der Länge *IV* bis *V*, wodurch man *5* erhält usw.

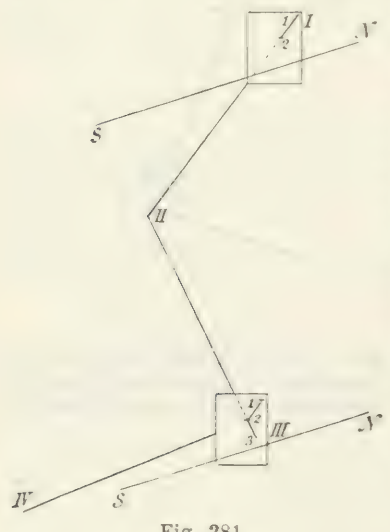


Fig. 281.

Diese Aufnahmsmethode hat den Vorteil, daß die Arbeit bedeutend rascher vorwärts schreitet, wobei aber allerdings nicht jene Genauigkeit erreicht wird, wie bei der Aufnahme ohne Springstände. Zum Zwecke der Kontrolle empfiehlt es sich, von Zeit zu Zeit die Springstandmethode zu verlassen, sich am nächsten Punkte aufzustellen und nach dem Rückrayon (Absatz *IV*) zu orientieren. Legt man dann die Boussole an den Meridian, so muß die Nadel wieder auf 0 bis 180° einspielen, wo nicht, ist entweder ein Fehler unterlaufen oder es findet eine Störung der Magnetnadel statt (Gewitter, Nähe einer Eisenbrücke etc.).

VI. Beseitigung eines Schlußfehlers.

Es ist bereits im Punkte *IV* gesagt worden, daß ein aus dem Umfange aufgenommenes Polygon selten genau schließen wird, sondern daß irgend ein von zwei Seiten her bestimmter Punkt am Tischblatte doppelt erscheinen wird. Die Fig. 282 zeigt z. B. den Punkt *V* des Feldes einmal als Tischpunkt *5*, wie er beim Arbeiten über *2*, *3*

und *4* erhalten wurde, das anderemal als Tischpunkt *5'*, wie ihn die Aufnahme über *8*, *7* und *6* ergab.

Eine solche Schlußdifferenz kann ihre Ursache haben entweder *a)* in einem bei der Aufnahme begangenen groben Fehler oder *b)* in unvermeidlichen kleinen Fehlern; manchmal auch in beiden.

a) Ein grober Fehler muß unter allen Umständen aufgesucht und beseitigt werden; er entsteht zumeist durch Außerachtlassen der nötigen Vorsicht und der Kontrollmessungen und kann sich entweder bloß auf eine falsche Länge oder auf einen falschen Winkel oder auf beides erstrecken.

aa) Ein Längenmeßfehler entsteht zumeist durch Verzählen der aufgelegten Meßbandlängen oder halben Längen, wird also oftmals 10 oder 20 *m* betragen. Ein Längen-

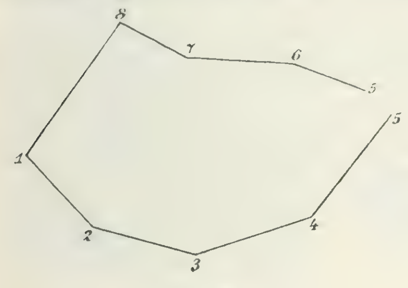


Fig. 282.

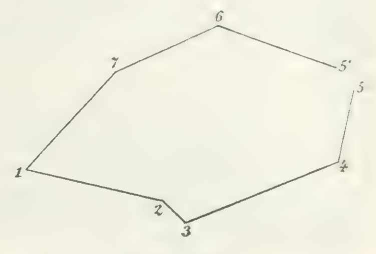


Fig. 283.

fehler kann häufig dadurch erkannt werden, daß man die zwei Punkte, zwischen denen sich der Schlußfehler befindet, durch eine Linie verbindet und nachsieht, ob im Polygon irgendwo eine damit parallele Umfangslinie vorkommt. In Fig. 282 ist z. B. mit der Linie *5*—*5'*, die Umfangslinie *1*—*2* nahezu parallel; es ist also mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß die Linie *1*—*2* zu lang gemessen worden sei. Man wird daher vorerst diese Linie nachmessen. Findet man hiebei in der Tat den vermuteten Fehler, dann verschiebt sich *2* gegen *1* hin, um den gefundenen Fehler und infolgedessen rücken dann auch die Punkte *3* und *4* um dasselbe Stück parallel zurück und es wird dann 5 bereits ganz nahe an *5'* fallen, die Schlußdifferenz also nahezu verschwinden. Findet man aber den Fehler nicht in *1*—2, dann ist es am besten, die ganze Aufnahme zu wiederholen.

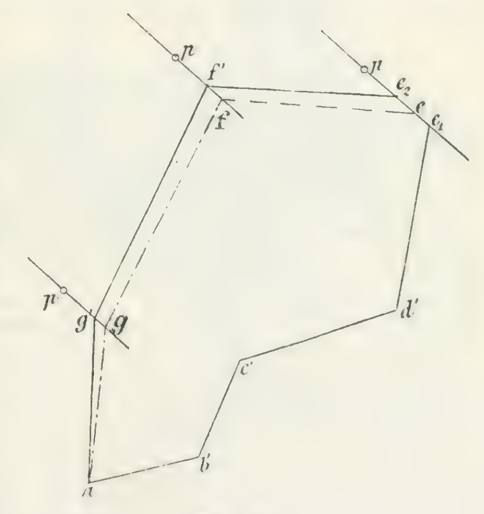


Fig. 284 *a*.

bb) Ein Winkelfehler kann entstehen durch Anvisieren eines falschen Signals oder durch mangelhaftes oder falsches Orientieren des Meßtisches. Er kann oft dadurch erkannt werden, daß die zwei Schlußpunkte von irgend einem Polygonpunkte gleiche Entfernung haben. In Fig. 283 ist z. B. *5* und *5'* vom Punkte *2* fast gleichweit entfernt. Es läßt sich also annehmen, daß der Winkel *1*—*2*—*3* falsch sei. Findet man beim abermaligen Aufstellen in *2*, daß tatsächlich der Rayon *2*—*3* unrichtig gezogen worden sei, dann verbessert man ihn und verschwenkt dementsprechend den ganzen folgenden Polygonzug *3*—*4*—*5*. Dieses Verschwenken geschieht entweder konstruktiv oder indem man den Zug *2*—*3*—*4*—*5* auf Pauspapier zeichnet, die Pause um Punkt *2* als Zentrum so lange dreht, bis die Linie *2*—*3* in ihre neue Lage fällt, und dann die Punkte *3*, *4* und *5* mit der Pikiernadel durchsticht.

b) Ist ein grober Fehler nicht zu entdecken, dann ist die Ursache der Schlußdifferenz in kleinen unvermeidlichen Fehlern zu suchen, die ihre Ursache in der Mangelhaftigkeit der Arbeitswerkzeuge, wozu auch die Augen und Hände des Arbeiters gehören, haben. In diesem Falle kann der Schlußfehler kein bedeutender sein; eine bestimmte Zulässigkeitsgrenze kann nicht angegeben werden, da die Fehlergröße von zu vielen Umständen abhängig ist, als: Verhältnis des Maßstabes, Anzahl der Aufstellungen, Länge der Visuren, zeichnerische Fähigkeit des Aufnehmenden usw. Im allgemeinen soll der

Schlußfehler wohl nie über $\frac{1}{1000}$ des Umfanges bei günstigen, über $\frac{1}{500}$ bei minder günstigen Aufnahmsverhältnissen hinausgehen. Ein solcher aus unvermeidlichen Fehlern entstandener Schlußfehler wird in folgender Weise auf die ganze Figur verteilt:

Es sei z. B. das Polygon $a—g'$, Fig. 284 *a*, welches einen (in der Zeichnung übertriebenen) Schlußfehler $e_1 e_2$ zeigt, zum Schließen zu bringen. Man verbindet e_1 mit e_2, halbiert die Entfernung und nimmt den Punkt e als den richtigen an. Demnach müssen alle anderen Polygonpunkte in derselben Richtung, und zwar die unteren nach oben und die oberen nach unten proportional verschoben werden. Zu diesem Zwecke zieht man sich irgendwo eine gerade Linie und trägt darauf der Reihe nach die Strecken $a\,g'$, $g'f'$ und $f'e_2$ auf, Fig. 284 *b*; in den Punkten a, g', f' und e_2 errichtet man sodann nach beiden Seiten Senkrechte und trägt darauf eine beliebige aber gleiche Distanz, etwa 1 *cm* nach abwärts auf, wodurch man die Punkte p erhält. Ferner zieht man durch die Polygonpunkte g' und f' Parallele zu $e_2 e_1$ nach innen und außen und verlängert auch $e_2 e_1$ nach außen. Hierauf wird von allen Polygonpunkten die gleiche Entfernung wie in Fig. 284 *b* nach außen hin aufgetragen, wodurch auch am Polygon die Punkte p erhalten werden. Jetzt nimmt man die Entfernung $e\,p$ am Polygon in den Zirkel und trägt sie in Fig. 284 *b* vom p des Punktes e_2 nach oben auf, wodurch man den Punkt e erhält, welchen man mit a verbindet. Dadurch werden auf den Senkrechten die Punkte f und g bestimmt und die Strecken $f\,f'$ und $g\,g'$ stellen die Verschiebungsgrößen dar. Um also den richtigen Punkt f am Polygon zu erhalten, greift man in Fig. 284 *b* die Strecke $p\,f$ ab und trägt sie am Polygon vom p des Punktes f' nach innen auf. Ebenso ergibt die Strecke $p\,g$ der Fig. 284 *b*, vom p des Punktes g' des Polygons nach innen aufgetragen, den richtigen Punkt g. Durch Verbindung der Punkte a, g, f und e erhält man die obere

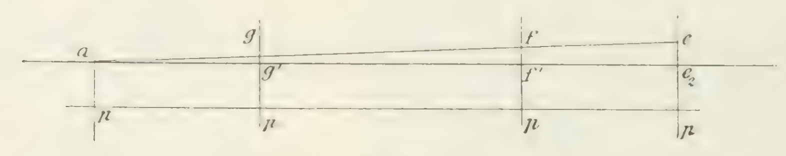


Fig. 284 *b*.

Hälfte des korrigierten Polygons. Dasselbe Verfahren wendet man bei der anderen Hälfte an. Die Einschaltung der fixen Distanz $p\,f' = p\,g'$ usw. ist deshalb notwendig, weil das Abgreifen und Auftragen so kleiner Strecken, wie z. B. $g\,g'$ zu ungenau wäre.

Zusatz. Zur Aufnahme ausgedehnter Parzellenkomplexe ist es erforderlich, daß über das ganze Operationsgebiet ein Dreiecksnetz gelegt werde, damit die für die Detailvermessung notwendigen Fixpunkte gewonnen werden. Dieser Vorgang, welcher Triangulierung genannt wird, kann sowohl mit einem Theodoliten als auch mit einem großen Meßtische ausgeführt werden. Die beiden oben beschriebenen Meßtische sind jedoch zur Vornahme einer Triangulierung nicht geeignet und dienen bloß zur Aufnahme des zwischen den Fixpunkten liegenden Details.

Das Forstschutzorgan, das nur selten in die Lage kommen wird, größere Meßtischarbeiten durchzuführen und zumeist bloß Croquis anzufertigen oder kleinere Schlag- und Kulturflächen aufzunehmen hat, wird sich mit Vorteil eines noch weiter vereinfachten Meßtisches, des sogenannten Detaillierbrettchens, bedienen. Es ist dies ein Meßtischchen, dessen Tischblatt in der Regel bloß 30 *cm* breit und 40 *cm* lang ist, und dem das Schiebekreuz und häufig auch die Horizontalstellvorrichtung fehlen. Eine Wendescheibe ist wohl vorhanden, jedoch zumeist ohne Feinbewegung, also ohne Wendeschraube. Das Arbeiten mit dem Detaillierbrettchen geschieht ebenso wie mit dem Meßtische. Bei der Aufnahme aus dem Umfange bedient man sich fast ausnahmslos, der geringeren Genauigkeit entsprechend, der Springstandmethode, zu welchem Zwecke eine kleine Boussole an einer Seitenkante des Tischblattes angeschraubt wird. Dadurch erspart man das jedesmalige Anlegen an die Nord-Süd-Linie, da durch das Anschrauben eine feste Verbindung zwischen Tischblatt und Boussole hergestellt wird.

§ 18. Das Boussoleninstrument.

Unter einem Boussoleninstrument versteht man die Vereinigung einer Visiervorrichtung mit einer Boussole, welche auf einem Stativ befestigt werden kann. Mit Hilfe eines solchen Instrumentes ist man imstande, die Winkel, welche die Linien des Feldes mit dem magnetischen Meridian bilden, zu messen und daraus, sowie aus den gemessenen Längen die aufgenommene Figur auf dem Papiere zu konstruieren.

a) Beschreibung. Als Visiervorrichtung dient entweder ein Diopterpaar, wie wir es schon wiederholt kennen gelernt haben, oder ein Fernrohr.

Die Verbindung einer Boussole mit einem Diopter ist fast ganz außer Gebrauch gekommen und soll hier nur kurz beschrieben werden. Auf einem in der Mitte verbreiterten Lineal sind an beiden Enden die Diopter angebracht, welche ganz dieselbe Einrichtung besitzen, wie beim Diopterlineal (Seite 263). Auf dem breiten Teile des Lineals ist eine Boussole, wie sie beim Meßtisch bereits beschrieben wurde, so angebracht, daß die durch die Punkte 0 und 180 der Kreisteilung bestimmte Linie in der Visierebene liegt. Das Ganze ist mittels zweier Schrauben an eine Messingplatte befestigt, welche in der Mitte einen Stift trägt. Dieser Stift ist mittels eines Kugelgelenkes mit einer Hülse verbunden, mit der das ganze Instrument auf den Zapfen eines Zapfenstativs aufgeschoben werden kann.

Heutzutage findet man fast ausschließlich als Visiervorrichtung das Fernrohr angewendet, weil beim Arbeiten mit dem Boussoleninstrument die Längen meistens nicht direkt, sondern optisch gemessen werden (siehe § 19). Die Art und Weise, wie das Fernrohr mit der Boussole in Verbindung gebracht wird, ist äußerst mannigfaltig; fast jeder Mechaniker wendet eine andere Konstruktion an und bringt außerdem noch Vorrichtungen zu mancherlei anderen Zwecken an, als zum Nivellieren, zum Messen von Vertikal- und Horizontalwinkeln usw., in welchem Falle diese Instrumente dann Universalinstrumente genannt werden. In Fig. 285 ist ein Boussoleninstrument abgebildet, das in der vorbesprochenen Weise ausgestattet ist und im folgenden beschrieben werden soll. Die Hauptbestandteile, welche dieses Instrument als Boussoleninstrument charakterisieren, sind die Boussole und das mittels des Trägers B oberhalb derselben angebrachte Fernrohr. Die Boussole ist auch hier mit einer rechteckigen Messingplatte Z, der sogenannten „Zulegeplatte", fest verbunden, deren Längskanten abgeschrägt sind, um damit Linien ziehen zu können. Die Zulegeplatte ist nämlich nach Entfernung der Schrauben i und i' vom Instrumente abhebbar und kann zum Zeichnen verwendet werden, zu welchem Zwecke sie auf der Unterseite mit Papier überklebt ist, um das Schmutzen zu verhindern. Auf der Zulegeplatte befinden sich noch die beiden rechtwinklig zueinander gestellten Libellen l und l_1 (daher Kreuzlibellen genannt), welche zur Horizontalstellung des Instrumentes dienen. Die Horizontalstellung erfolgt hier durch die Schrauben e und e_1, welchen die Federn in den Gehäusen f_1 und f entgegenwirken, so zwar, daß beim Senken einer Schraube die gegenüberliegende Feder aus dem Gehäuse tritt, während beim Heben der Schraube die Feder in das Gehäuse zurückgepreßt wird.

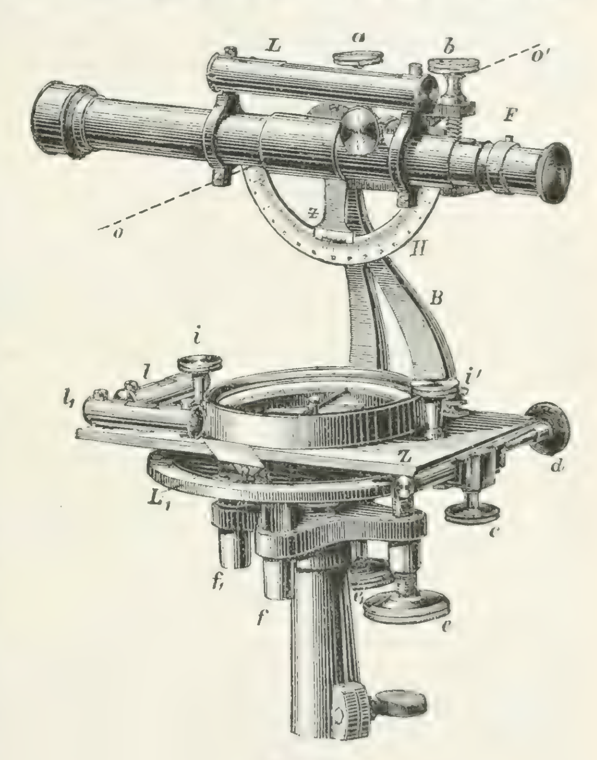


Fig. 285.

Unterhalb der Zulegeplatte befindet sich eine Metallplatte (gewöhnlich zur Verminderung des Gewichtes in Kreuzform), welche sich um eine vertikale Achse horizontal im Kreise drehen läßt und in welche die beiden Schrauben i und i' eingreifen. Diese Platte ragt an einer Seite so weit über die Zulegeplatte hinaus, daß darauf der Ständer B angebracht werden kann, welcher das Fernrohr trägt. Dasselbe ist ganz so eingerichtet, wie es bei der Kippregel beschrieben wurde und läßt sich um eine horizontale Achse $o\,o'$ auf- und abkippen und mit der Okularseite auch durchschlagen. Der Träger B ist so geschweift, daß das Fernrohr über die Mitte der Boussole zu liegen kommt, so daß also die Nord-Süd-Linie der Boussole in die Visierebene, d. h. die Ebene, welche die optische

Achse beim Auf- und Niederkippen beschreibt und welche bei rektifiziertem und meßgerecht aufgestelltem Instrumente vertikal ist, fällt.

Zur genaueren Einstellung einer Visur ist sowohl für die feine horizontale Drehung der Boussole, als auch für die feine Vertikalbewegung des Fernrohres je eine Schraube vorhanden. Wenn man nämlich mittels der Schraube *c* die Boussole festgeklemmt hat läßt sie sich mit freier Hand nicht mehr drehen, wohl aber mittels der Schraube *d*; ebenso läßt sich die Kippbewegung des Fernrohres mit der Klemmschraube *a* hemmen, und es kann dann noch eine kleine Drehung mit Hilfe der Schraube *b* bewirkt werden. Die Schrauben *a* und *c* heißen Klemm- oder Bremsschrauben, *b* und *d* Mikrometerschrauben.

Die übrigen am Instrumente noch vorfindlichen Bestandteile dienen nicht mehr seinem Zwecke als Boussoleninstrument, sondern kennzeichnen es als Universalinstrument. Diese sind folgende: Der Teller des Instrumentes, auf dessen Unterseite die Stellschrauben *e* und e_1, sowie die dazu gehörigen Federn f_1 und *f* wirken und in dessen Innerem sich die oben erwähnte kreuzförmige Metallplatte samt Boussole und Fernrohr dreht, ist an seinem Rande mit einer bezifferten Gradteilung versehen und heißt Limbus L_1. Der dem Fernrohrträger gegenüberstehende Arm der kreuzförmigen Platte reicht bis knapp an die Limbusteilung und trägt dort eine Marke eingeritzt und behufs genauerer Ablesung einen Nonius (siehe § 20). Dieser Arm heißt die Alhidade. Der Zweck dieser Einrichtung ergibt sich von selbst. Liest man nämlich bei irgend einem Stande der Marke die Anzahl der Grade am Limbus ab, dreht dann bei gelüfteter Klemme *c* die Alhidade um einen beliebigen Winkel weiter und liest abermals am Limbus den Alhidadenstand ab, so hat man nur die beiden Ablesungen zu subtrahieren, um die Größe des Winkels zu erhalten, um welchen gedreht wurde. Damit ist man also imstande, die Horizontalwinkel direkt ohne Zuhilfenahme der Magnetnadel zu bestimmen.*)

Ein weiterer zum Boussoleninstrument nicht unbedingt nötiger Bestandteil ist die am Fernrohre angebrachte Libelle *L*, die sogenannte Aufsatzlibelle. Mit Hilfe dieser Libelle kann das Instrument gleichzeitig als Nivellierinstrument verwendet werden (siehe dieses). Endlich ist auch noch ein Gradbogen *H* unterhalb des Fernrohres angebracht, auf dem mittels eines mit dem Fernrohre fest verbundenen Zeigers *z* die Winkel, um welche die optische Achse von der Horizontalen abweicht, die Höhenwinkel, abgelesen werden können. Das ganze Instrument wird mittels der Hülse und Klemmschraube auf einem Zapfenstativ befestigt.

b) Prüfung und Berichtigung. Es würde hier zu weit führen, alle bei einem derartigen Instrumente erforderlichen Prüfungen und Berichtigungen zu behandeln. Der Hauptsache nach fallen diese Untersuchungen mit jenen zusammen, welche bei der Meßtischboussole und der Kippregel besprochen wurden. Selbstverständlich muß hier nicht die Ziehkante in der Visierebene liegen, sondern die Nord-Süd-Linie der Boussole.

c) Gebrauch. Es ist bereits eingangs erwähnt worden, daß das Bonssoleninstrument dazu dient, jene Daten am Felde zu ermitteln, die eine Konstruktion der aufgenommenen Figur zu Hause am Zeichentische ermöglichen. Demgemäß zerfällt die Anwendung derselben in die Feldarbeit und die Hausarbeit.

1. Feldarbeit. Das Boussoleninstrument oder kurz „die Boussole" setzt uns in den Stand, die Winkel, welche die Feldvisuren mit dem magnetischen Meridian einschließen, zu ermitteln und aus denselben diese Visuren am Papiere zu reproduzieren. In der Mehrzahl der Fälle interessieren uns jedoch diese reproduzierten Visuren selbst nicht so sehr, als vielmehr ihre durch Auftragen der gemessenen Längen gefundenen Endpunkte, wie dies auch beispielsweise bei der Meßtischaufnahme aus einem Standpunkte, Seite 273, der Fall war. In diesem Sinne kann man also auch sagen: Die Boussole dient dazu, die gegenseitige Lage der Feldpunkte zu ermitteln. Wie dann die gefundenen Punkte untereinander zu verbinden sind, lehrt der Augenschein in der Natur. Da man aber das Bild der Natur nicht im Gedächtnisse behalten kann, ist es unerläßlich, von den aufzunehmenden Figuren eine genaue Skizze anzufertigen. Eine Boussolenaufnahme, auch wenn sie noch so sorgfältig gearbeitet wurde, ist nahezu wertlos, wenn die Skizze dazu fehlt oder mangelhaft ist, insbesondere dann, wenn die Reproduktion am Papier und die Aufnahme am Felde nicht von derselben Person besorgt werden kann. Aus den oben angeführten Gründen ist es nicht erforderlich, zwischen der Aufnahme „aus der Mitte" und „aus dem Umfange" zu unterscheiden, denn es handelt sich in beiden Fällen bloß um Aufnahme von Punkten, die dann an Hand der Skizze zu Figuren verbunden werden. Der Vorgang bei einer Boussolenaufnahme wird aus dem nachfolgenden Beispiele klar werden.

Es sei zwischen dem auf der Karte bereits verzeichneten Grenzzuge *22—25* und der Straße, Fig. 286, der Polygonzug *1—10* und der Pflanzkamp *P* aufzunehmen. Man

*) Ein Instrument, mit welchem man die Horizontalwinkel in der eben besprochenen Weise allein, also ohne Boussole, abliest, heißt Theodolit. Arbeiten, welche eine größere Genauigkeit erfordern, müssen mit dem Theodoliten ausgeführt werden.

stellt das rektifizierte Instrument im Punkte *1* auf, lüftet die Magnetnadel und die Bremsschrauben *c* und *a* und stellt es vorerst horizontal. Dies geschieht auf folgende Weise: Man dreht die Boussole im Kreise, bis eine der Libellen oberhalb der Verbindungslinie zwischen der Stellschraube *e* und der zugehörigen Feder f_1 liegt, wodurch dann die andere Libelle bereits über die Linie $e_1 f$ zu liegen kommt (Fig. 285). Nun hebt oder senkt man die Schraube *e* so lange, bis die darüber stehende Libelle, in Fig. 285 l_1, einspielt und die Schraube e_1 so lange bis die Libelle *l* einspielt, womit die Horizontalstellung bewirkt ist (falls die Libellen, was vorher zu untersuchen ist, rektifiziert sind). Man könnte auch mit einer Libelle allein die Horizontalstellung vornehmen, indem man sie nach dem Einspielen über $e f_1$ um 90⁰ dreht und auch über $e_1 f$ zum Einspielen bringt und dies einigemale wiederholt. Hat man also das Instrument horizontal gestellt, dann richtet man das Fernrohr auf die Mitte des Grenzsteines *24* oder eine dort aufgestellte Signalstange, klemmt die Schraube *c* und bringt mit der Mikrometerschraube *d* den Vertikalfaden des Fadenkreuzes genau in die Mitte der Signalstange. d. h. man stellt die Visur genau ein. Nun wartet man bis die Magnetnadel vollkommen zur Ruhe gelangt ist und liest dann sowohl den Winkel bei der Nordspitze als auch bei der Südspitze ab. Diese doppelte Ablesung ist aus mehreren Gründen notwendig. Einerseits hindert sie die groben Ablesefehler, da man weiß, daß der Unterschied beider Ablesungen 180⁰ betragen muß, wovon man sich rasch überzeugen kann; anderseits kommt



Fig. 286.

es vor, daß die Differenz beider Ablesungen einige Minuten mehr oder weniger als 180⁰ beträgt, in welchem Falle man das arithmetische Mittel nimmt. Hätte man z. B. die Ablesungen Nord . . . 324⁰ 30′ und Süd . . . 134⁰ 30′ gefunden, so würde man sofort erkennen, daß die Differenz 190⁰ beträgt, was nicht sein kann. Es läge in dem Falle also entweder bei der Nord- oder bei der Südspitze ein Ablesefehler von 10⁰ vor und die Ablesung müßte wiederholt werden. Würde aber bei *N* z. B. 20⁰ 30′ und bei *S* 200⁰ 40′ abgelesen worden sein, so wäre das arithmetische Mittel, also 20⁰ 35′ und 200⁰ 35′ als richtig anzunehmen.*) Die erhaltenen Ablesungen werden in ein eigens hiezu vorbereitetes Notizbuch, das sogenannte Manuale, eingetragen, über welches weiter unten noch einiges gesagt werden soll. Hierauf wird die Länge von *1* nach *24* gemessen (horizontal) und ebenfalls notiert, womit die Visur nach *24* abgetan ist. Nun richtet man das Fernrohr nach *23*, stellt genau ein, liest die Winkel ab, mißt die Länge und trägt beides ein. Ebenso verfährt man bei der Visur nach dem Punkt *2*. Hierauf überträgt man das ganze Instrument nach Punkt *3* (Springstände) visiert und mißt nach *2* und *4* und trägt die erhaltenen Daten ein. Weiters überstellt man das Instrument nach Punkt *5*, visiert und mißt nach *4*, *6*, *7*, *8* und *9* und stellt schließlich noch in Punkt *10*, dem Endpunkte des aufzunehmenden Zuges, auf, von wo man zurück nach *9* mißt und visiert und, um einen Anschluß zu finden, auch noch nach der fixen Hausecke *11*.

*) Die Boussolen sind gewöhnlich in halbe Grade geteilt. Ein Drittel davon, also $\frac{1^0}{6} = 10'$ kann noch geschätzt werden.

Das Manuale richtet man sich am besten nach folgendem Muster ein:

Von	Nach	Nord °	Nord ′	Süd °	Süd ′	Horizontale Länge in m	Anmerkung	(Raum für die Skizze.)
1	24	260	—	80	—	28·0		
—	23	293	—	113	—	25·0		
—	2	321	—	141	—	28·1		
3	2	215	30	35	30	58·0		
—	4	304	—	124	—	85·2		
5	4	238	30	58	30	42·0		
—	6	190	—	10	—	125·9		
—	7	192	30	12	30	144·2		
—	8	179	30	359	30	137·5		
—	9	277	—	97	—	30·0		
10	9	240	—	60	—	50·0		
—	*H*	270	—	90	—	30·0		

Linke Blattseite. Rechte Blattseite.

In die erste Kolonne kommen alle Standpunkte, in die zweite alle Zielpunkte; der Zweck der übrigen Kolonnen ergibt sich aus dem obigen Muster. Dem Manuale ist eine besondere Sorgfalt zuzuwenden, weil es ja später der einzige Behelf zur zeichnerischen Darstellung der aufgenommenen Figuren ist; insbesondere sind alle Ziffern deutlich zu schreiben und die Skizzen gewissenhaft zu zeichnen und zu beschreiben.

2. Hausarbeit. Die Eigenschaft der Magnetnadel, mit einer Spitze immer nach derselben Richtung zu zeigen, ermöglicht es, am Zeichenbrette Linien zu ziehen, die mit den korrespondierenden Linien in der Natur parallel sind. Um also die aufgenommene Figur zu zeichnen oder, wie der technische Ausdruck lautet, „aufzutragen", schraubt man am Instrumente die Schrauben *i* und *i′* heraus, hebt die Zulegeplatte ab und setzt sie auf das horizontal liegende Zeichenblatt nahe am Rande. Sodann lüftet man die Arretierung der Nadel und dreht das Gehäuse so lange, bis die Nadelspitzen auf dieselben Ablesungen zeigen, auf die sie am Felde bei der Visur von *1* nach Grenzstein *24* gezeigt haben. Da am Instrumente die Verbindungslinie von 0° und 180° der Boussole in der Visierebene liegt und parallel mit der Ziehkante ist, muß jetzt am Zeichenbrette die Ziehkante dieselbe Lage haben, wie damals während des Visierens am Felde. Zieht man also längs der Ziehkante eine Bleistiftlinie, so läuft dieselbe mit der Feldlinie *1* nach *24* parallel. Auf diese Linie trägt man nun die gemessene Länge *1* nach *24* in einem verjüngten Maßstabe auf und erhält so die Punkte *1* und *24*. Nun schiebt man die Ziehkante wieder an den Punkt *1* an und dreht die Boussole so lange, bis die Nadelspitzen jene Stellung haben, die sie bei der Visur *1* nach *23* hatten. Zieht man nun den Rayon, so läuft er mit der Feldlinie *1* nach *23* parallel und es muß notwendig auch der Winkel, den die beiden Rayons einschließen, gleich dem Feldwinkel *23—1—24* sein. Durch Auftragen der Länge *1—23* auf den neuen Rayon vom Punkte *1* aus, erhält man den Punkt *23*. Der Rayon *1—23* gehört eigentlich nicht zur gestellten Aufgabe, da er nicht innerhalb des aufzunehmenden Zuges gelegen ist. Man tut aber gut, alle aufzunehmenden neuen Polygonzüge nicht bloß von einem einzigen gegebenen Punkte ausgehen zu lassen, sondern wenn immer möglich von zwei oder mehreren, damit es im Falle des Versagens dieser einzigen Visur nicht erforderlich wird, nochmals aufs Feld hinauszugehen und nachzumessen. Das Anknüpfen einer Aufnahme an einen schon in der Karte vorhandenen Polygonzug nennt man das „Anbinden". Man bindet also immer an mindestens zwei Punkte an, wodurch eine teilweise Kontrolle geschaffen wird. In dem angenommenen Beispiele muß die am Papier abgegriffene Distanz von *23* nach *24* der in der Natur gemessenen entsprechen; wenn nicht, dann ist in einer der beiden Visuren ein Fehler. Um nun die Figur weiter aufzutragen, dreht man die Boussole zunächst bis zum Einspielen auf die Ablesung *1* nach *2*, schiebt an 1 an und zieht den Rayon, trägt dann die Distanz *1—2* auf und erhält den Punkt 2. Hierauf legt man an *2* an, dreht bis zum Einspielen bei der Ablesung *3—2*, zieht den Rayon und trägt *2—3* auf, wodurch man den Punkt *3* erhält. In gleicher Weise fährt man fort, bis man sämtliche aufgenommene Punkte am Papier verzeichnet hat. Sodann werden nach Anhalt der Skizze die einzelnen Punkte verbunden, also zunächst diejenigen des Polygonzuges selbst, dann die außerhalb desselben liegenden. Um z. B. den Pflanzenkamp zu erhalten, verbindet man *6* mit *7* und *8*, zieht durch *8* eine Parallele mit *6—7* und durch *7* eine

Parallele mit c—s (wäre der Kamp kein Parallelogramm, dann hätte man auch die vierte Ecke mit dem Instrumente bestimmen müssen).

Beim Auftragen mit der Boussole muß man darauf achten, daß sich in der Nähe keine Eisenbestandteile vorfinden; man darf also z. B. nicht in der Nähe eines mit einem eisernen Gitter versehenen Fensters arbeiten, auch muß man sich hüten, den Zirkel in der Nähe der Boussole liegen zu lassen; ebensowenig darf in der Nähe ein Elektrizität führender Leitungsdraht vorhanden sein usw.

Das Auftragen mit Hilfe der Boussole ist sehr zeitraubend, weil man bei jedem Rayon warten muß, bis die Nadel vollkommen zur Ruhe gekommen ist. Man wendet daher mit Vorteil einen Transporteur an, der, um eine entsprechende Genauigkeit zu erzielen, hinreichend groß sein muß. Für kleinere Arbeiten genügt ein einfacher Metalltransporteur, wie er bei jedem Mechaniker um billiges Geld erhältlich ist. Besser ist ein sogenannter „Regeltransporteur", d. i. ein Transporteur, der mit einem um den Mittelpunkt drehbaren Arm versehen ist, dessen Ziehkante im Radius liegt.

Das Auftragen mit Hilfe des Transporteurs geschieht im Wesen genau so, wie mit der Boussole, d. h. Zeichnen des Winkels und Auftragen der Längen. Während aber bei der Boussole der eine Schenkel des Winkels, nämlich der magnetische Meridian, durch die freispielende Magnetnadel in jeder Lage gegeben war, ist es beim Arbeiten mit dem Transporteur notwendig, sich diesen Schenkel jedesmal zu zeichnen. Man wird sich also vor allem am Zeichenblatte eine beliebige Linie ziehen und als Meridian annehmen, wobei

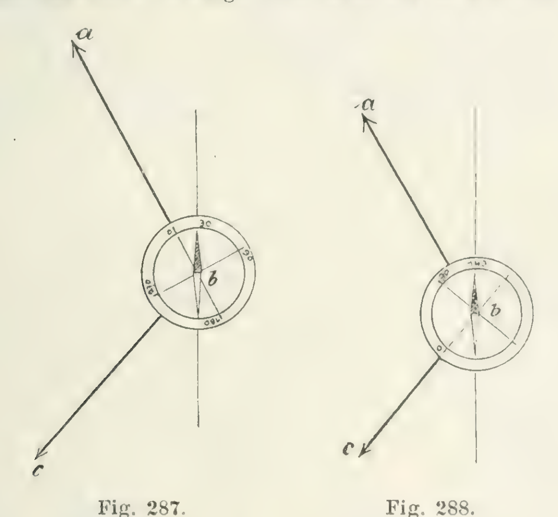


Fig. 287. Fig. 288.

natürlich darauf zu achten ist, daß bei der angenommenen Meridianrichtung der ganze aufzutragende Zug auf das Zeichenblatt fällt. Trägt man nun an diesen Meridian den im Manuale verzeichneten Winkel, den eine Feldlinie mit der Nord-Süd-Richtung einschließt, auf und zieht den Rayon, so hat dieser Rayon in bezug auf den Meridian am Papier offenbar dieselbe Lage, wie die Feldlinie zum wirklichen Meridian. Ebenso verhält es sich bei einer zweiten Linie. Daher müssen dann auch die beiden Linien am Papier gegenseitig dieselbe Lage zueinander einnehmen, wie die entsprechenden Linien der Natur, d. h. sie müssen denselben Winkel einschließen. Während also beim Auftragen mittels der Boussole die Papierlinien mit den Feldlinien parallel waren, ist dies hier nicht der Fall; sie würden aber die parallele Lage einnehmen, wenn man das Zeichenbrett so lange dreht bis der angenommene Meridian in den wirklichen fällt.*) Es seien z. B. die Feldlinien ba und bc, Fig. 287, vom Standpunkte b aus am Felde aufgenommen und die gefundenen Nadelablesungen an der Nordspitze mit 30° und 140° ins Manuale eingetragen worden. Den Stand der Nadel bei der Visur nach dem Punkte a zeigt Fig. 287, jenen bei der Visur nach b die Fig. 288. Man nennt den Winkel, den eine Linie mit dem Meridian einschließt, das Azimut. Demnach ist das Azimut der Linie ba im Punkte $b = 30^0$, jenes der Linie bc im Punkte $b = 140^0$. Um nun diese Linien zu zeichnen, nimmt man sich am Papier irgend eine Linie ns an und darin einen beliebigen Punkt b, legt dann den Transporteur so daran, daß der Mittelpunkt auf den Punkt b fällt, die ns aber durch die Azimutablesung geht, Fig. 289 und zieht den Rayon ba.

*) Eine Zeichnung, Karte, Skizze etc., deren gezeichneter Meridian in die tatsächliche Nord-Süd-Richtung gedreht ist, und zwar Nord gegen Nord, Süd gegen Süd, heißt „orientiert".

Dasselbe macht man mit dem zweiten Azimute, wodurch man den Rayon *b c* erhält, Fig. 290. Der Winkel *a b c* am Papier muß nun gleich sein dem Winkel *a b c* am Felde. Durch Auftragen der Längen *a b* und *b c* erhält man *b* und *c*. Hat man nun von *c* aus eine weitere Auftragung nach irgend einem Punkte *d* zu machen, so ist der gleiche Vorgang einzuhalten, d. h. man zieht sich durch *c* eine Parallele zu *n s*, wodurch man den Meridian im Punkte *c* erhält, von diesem aus wird wieder das nächste Azimut, d. i. das der Linie *c d* aufgetragen, wodurch man den Rayon *c d* erhält usf.

Aus dem beschriebenen Vorgange ergibt sich, daß man in jedem einzelnen Punkte vorerst den Meridian ziehen muß. Da aber das Ziehen von Parallelen umständlich und oft ungenau ist, verwendet man ein Papier, auf dem von Haus aus schon viele parallele Linien vorhanden sind, z. B. das sogenannte Millimeterpapier, auf welchem in Abständen von 2 zu 2 *mm* über das ganze Blatt parallele Linien gedruckt sind, und welches in jeder Zeichenrequisitenhandlung käuflich ist. Für genauere Auftragungen gibt es eigene Auftragapparate, mit denen sich auch bedeutend rascher arbeiten läßt als mit einem Transporteur, doch beruhen alle auf demselben eben entwickelten Prinzipe.

Noch muß eines Umstandes gedacht werden, der bei Auftragungen, welche nicht mit der Boussole des Aufnahmsinstrumentes vorgenommen werden, nicht außer acht ge-

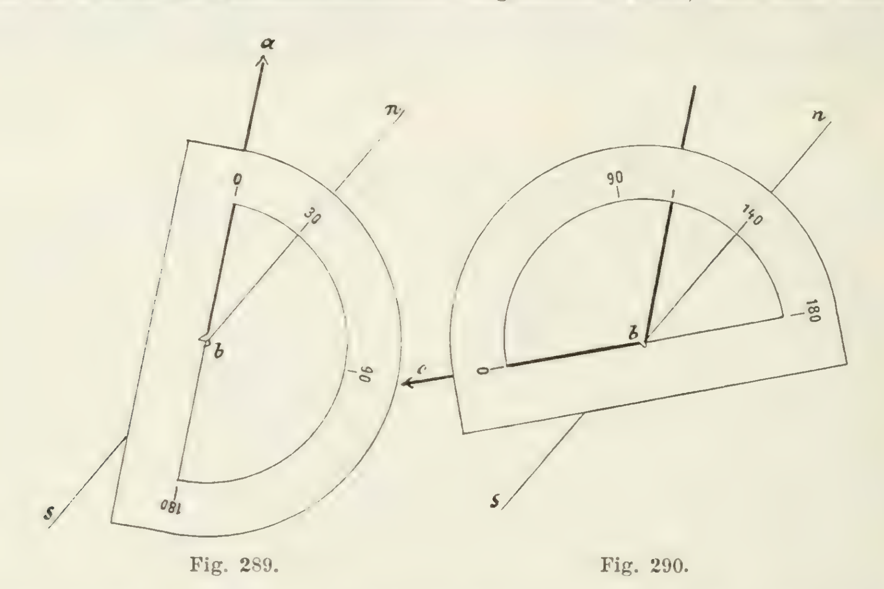


Fig. 289. Fig. 290.

lassen werden darf. Bei manchen Boussolen geht die Bezifferung der Teilung von Nord über Ost nach Süd und West, bei anderen wieder umgekehrt. Die ersteren heißen „im Sinne des Uhrzeigers" oder „rechtssinnig", die letzteren „dem Sinne des Uhrzeigers entgegen" oder „linkssinnig" geteilt. Die Art dieser Teilung ist im Manuale stets vorzumerken, weil beim Auftragen mit Auftragsapparaten, die gewöhnlich nach beiden Richtungen beziffert sind, in der Regel jene Bezifferung verwendet werden muß, die mit der Boussolenbezifferung gleiche Richtung hat. (Beim Transporteur könnte man allerdings auch die entgegengesetzte Bezifferung verwenden, müßte aber dann die Gerade des Transporteurs an *n s* anlegen und bei der entsprechenden Ablesung einen Punkt am Papier machen. Man könnte also nicht sofort mit dem Transporteur den Rayon ziehen, sondern müßte dies mit einem Lineal tun, wodurch die Arbeit verzögert wird.)

Anhang zum III. Kapitel.

§ 19. Das optische Distanzmessen.

Es ist im vorhergehenden des öfteren darauf hingewiesen worden, daß es möglich ist, Distanzen ohne Zuhilfenahme von Längenmeßinstrumenten, bloß durch optische Beobachtungen mittels eines Fernrohres zu bestimmen.

Obzwar nun die Entwicklung der Theorie des optischen Distanzmessens innerhalb des Rahmens dieses Buches undurchführbar ist, soll doch im nachstehenden das Prinzip desselben, sowie die Durchführung in der Praxis in Kürze behandelt werden.

Ein Gegenstand, z. B. ein Stab *a b* in Fig. 291 erscheint dem beobachtenden Auge um so kleiner, je weiter er davon entfernt ist, d. h der Winkel, welchen die zu seinem oberen und unteren Ende führenden Sehstrahlen einschließen, der **Sehwinkel**, wird mit der wachsenden Entfernung des Gegenstandes vom Auge immer kleiner, wie dies die drei verschiedenen Lagen des Stabes *a b* in der Figur zeigen.

Denkt man sich nun in einer bestimmten Entfernung *e* eine Glasplatte *g* vor das Auge gestellt und die Durchgangspunkte der Sehstrahlen durch dieselben markiert, so erhält man eine lineare Darstellung der Änderung des Sehwinkels, indem z. B. in der ersten Lage *a b* das Bild *1—2*, in der dritten *a″ b″* das Bild *5—6* auf der Glasplatte gedacht werden kann.

Die Größe des auf der Glasplatte gedachten Bildes hängt nun ab 1. von der Entfernung des Gegenstandes, denn bei gleich großen Gegenständen wird der entferntere das kleinere Bild erzeugen, 2. aber auch von der Größe des Gegenstandes, denn bei gleichen Entfernungen wird offenbar der größere Gegenstand das größere Bild liefern, da die Sehstrahlen stärker divergieren müssen oder aber, anders ausgedrückt: Es wird der größere Gegenstand, um zwischen denselben Sehstrahlen Platz zu finden, d. h. das gleiche Bild zu erzeugen, weiter entfernt sein müssen.

Nehmen wir nun vorerst an, es sei die Gegenstandsgröße konstant, so ist klar, daß dann die Bildgröße nur mehr von der Entfernung des Gegenstandes abhängt. Es wird daher zu jeder bestimmten Gegenstandsentfernung eine ganz bestimmte Bildgröße gehören. Aber auch umgekehrt wird jeder Bildgröße nur immer eine einzige bestimmte Gegenstandsentfernung entsprechen und man kann z. B. mit voller Sicherheit sagen, daß, so oft der

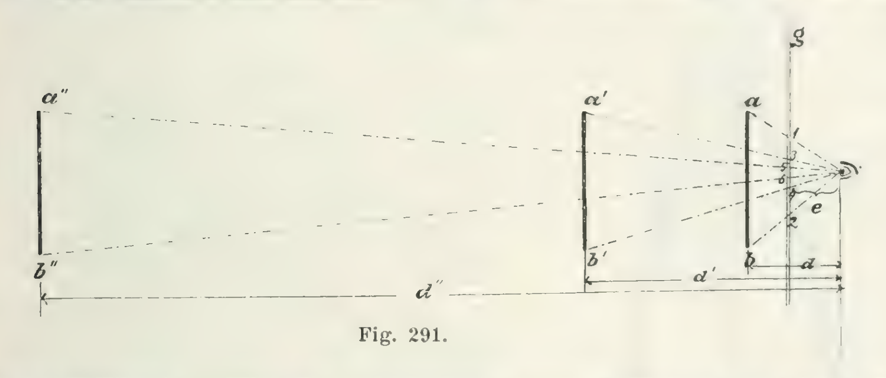


Fig. 291.

Stab *a b* das Bild *5—6* erzeugt, seine Entfernung jedesmal *d″* sein muß, er daher in *a″ b″* steht. Damit ist bereits eine optische Distanzmessung ermöglicht und es beruht in der Tat eine Anzahl von Distanzmessern, auf den besprochenen Tatsachen. Die Bildbeobachtung erfolgt natürlich nicht mit freiem Auge, sondern mittels eines Fernrohres, in welchem das von der Objektivlinse erzeugte Bild mittels der Okularlinse vergrößert betrachtet wird. Die Messung der Bildgröße erfolgt mit Hilfe zweier in der Ebene des Fadenkreuzes (Seite 266 befindlicher horizontaler Kokon- oder Spinnfäden, von denen der eine gegen den anderen hin bewegt werden kann und mit denen das Gegenstandsbild eingefaßt wird. Diese Art von Distanzmessern soll jedoch hier nicht näher besprochen werden.

Nehmen wir nunmehr an, der Gegenstand könne verschiedene Größen annehmen und der Sehwinkel, also das Bild, sei unveränderlich, so ist einleuchtend, daß die Größe, welche der Gegenstand besitzen muß, um das gegebene Bild zu erzeugen, von seiner Entfernung abhängt. Es wird also für jede bestimmte Entfernung eine ganz bestimmte Größe des Gegenstandes erforderlich sein und umgekehrt wird zu jeder Gegenstandsgröße nur eine einzige bestimmte Entfernung gehören. Ist man also imstande, bei gegebenem Bilde die jedesmalige Größe des Gegenstandes zu messen, so ist damit eine weitere Methode gefunden, Entfernungen optisch zu bestimmen. Hierauf beruht das „optische Distanzmessen nach **Reichenbach**“. Das Messen der Gegenstandsgröße erfolgt nicht unmittelbar am Gegenstande selbst, sondern in nachstehender Weise. Als Gegenstand wird eine Latte von 2 bis 3 *m* Länge und zirka 10 bis 15 *cm* Breite genommen, welche eine Zentimeterteilung besitzt, in der zur leichteren Orientierung die einzelnen Zentimeter abwechselnd weiß belassen und schwarz ausgefüllt und überdies alle Fünfer und Zehner durch längere Striche markiert sind, Fig. 292.

Von dieser Latte wird in einem Fernrohre in der Ebene des Fadenkreuzes ein Bild erzeugt. Auf dem Rähmchen, das die zwei Fäden des Fadenkreuzes trägt, ist oberhalb und unterhalb des durch die Mitte gehenden Horizontalfadens in gleicher Entfernung noch

je ein Kokon- oder Spinnfaden parallel mit dem Mittelfaden eingezogen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die jeweilige Gegenstandsgröße gleich am Gegenstande, beziehungsweise an seinem Bilde abzulesen. Die beiden Fäden, welche unveränderlich sind und daher eine konstante Bildgröße markieren, schneiden nämlich am Lattenbilde ein gewisses Stück ab, und da Lattenbild und Fadenkreuz in einer Ebene liegen müssen, können beide gleichzeitig mit der Okularlinse betrachtet werden (siehe Parallaxe Seite 266) und es kann abgezählt werden, wie viele Zentimeter zwischen den beiden Fäden liegen. Diese gezählten Zentimeter stellen dann für jede Lage der Latte jene Gegenstandsgröße (Lattengröße) dar, welche ein Bild von der gegebenen Größe, d. i. der Entfernung der Fäden voneinander, erzeugt. Die über und unter den Fäden liegenden Lattenenden sind belanglos. Je größere Latten man verwendet, desto weiter weg können sie gestellt werden, doch nicht über eine gewisse Grenze hinaus (je nach Beschaffenheit des Fernrohres 120 bis 180 m), da dann das Lattenbild so klein wird, daß man die einzelnen Zentimeter nicht mehr deutlich unterscheiden, also auch nicht mehr zählen kann.

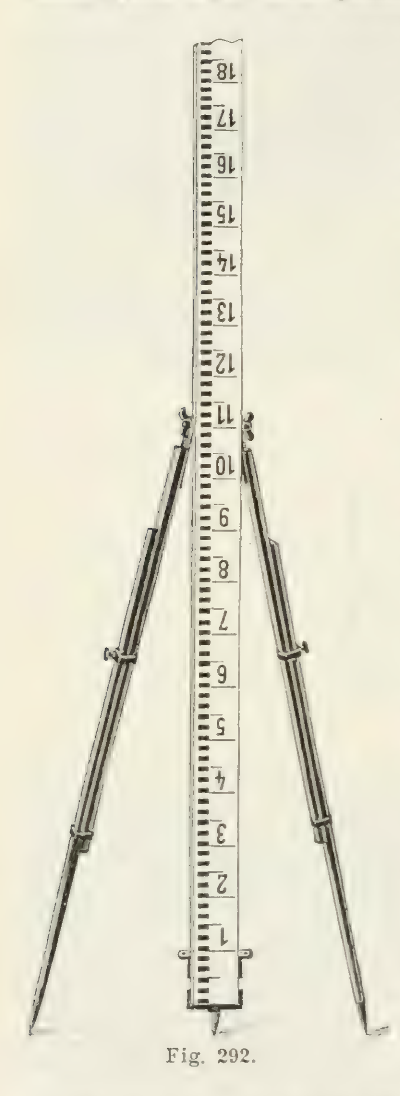


Fig. 292.

Um nun tatsächlich die Größe der verschiedenen Lattenentfernungen kennen zu lernen, hätte man für den Fall, als man nicht mit einem Fernrohre arbeiten müßte, sondern sich bloß mit der eingangs erwähnten Glasplatte behelfen könnte, nur nötig, von einer mit dem Meßbande ermittelten also bekannten Entfernung auf die unbekannten rückzuschließen.

In Wirklichkeit ist aber das Verfahren deshalb nicht so einfach, weil zur Beobachtung ein Fernrohr verwendet werden muß und daher die Brennweite der Objektivlinse eine Rolle spielt. Es muß jedoch wegen der erforderlichen optischen und mathematischen Kenntnisse, die weitere Entwicklung der Theorie verlassen und auf den rein praktischen Vorgang übergegangen werden.

Die Formel, nach welcher aus den Lattenablesungen L die Distanzen D ermittelt werden, lautet für horizontale Visuren $D = C\,L + c$.

Hiebei bedeutet C die sogenannte „große Konstante" oder „Multiplikationskonstante", c die sogenannte „kleine" oder „additionelle Konstante". Beide Werte sind gewöhnlich vom Mechaniker auf einem Zettel im Instrumentenkasten angegeben. C ist gewöhnlich 100 oder wenig größer oder kleiner, c ist praktisch genau genug gleich der anderthalbfachen Fernrohrlänge. Wäre also $C = 100$, $c = 0{\cdot}34\ m$ und die Lattenablesung $L = 76{\cdot}3\ cm$, dann ergäbe sich $D = 76{\cdot}3\ m + 0{\cdot}34\ m =$ rund $76{\cdot}6\ m$.

Für geneigte Visuren besteht die Formel: $D = C \,.\, L \,.\, \cos^2 \alpha + c \,.\, \cos \alpha$, wobei unter α der Winkel verstanden ist, um welchen die Visur von der Horizontalen nach oben oder unten abweicht.*) Die Berechnung der einzelnen Distanzen erfolgt jedoch nicht durch tatsächliches Multiplizieren und Addieren, sondern vermittels eines sogenannten Rechenschiebers in ganz mechanischer Weise.

Daraus ergibt sich, daß bei jeder Visur außer der Latte noch der Winkel gegen den Horizont, der Höhenwinkel, abgelesen werden muß. Man wird also dem Manuale folgende Einrichtung geben, um alle erforderlichen Daten eintragen zu können.

*) Cosinus eines Winkels heißt das Verhältnis der dem ∢ anliegenden Kathete zur Hypotenuse, also (Dreieck mit h, α, a, b) b, $\cos \alpha = \frac{a}{h}$. ($\alpha$ ist der erste Buchstabe des griechischen Alphabets und heißt „Alpha").

Datum ______ Seite ______

Boussole Nr. ______ Konstante ______

Von	Nach	Nord		Süd		Höhen <			Lattenablesung	Horizontale Distanz in m
		0	′	0	′	±	0	′		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Linke Blattseite.

(Raum für die Skizze.)

Rechte Blattseite.

Die Eintragungen in Kolonne 1 bis 10 werden am Felde gemacht, während die Distanz in Kolonne 11 zu Hause nach der obigen Formel berechnet, beziehungsweise am Rechenschieber „abgeschoben" wird.

Zum optischen Distanzmessen kann jedes Fernrohr eingerichtet werden und man findet auch meistens die Fernrohre der geodätischen Instrumente, insbesondere der Kippregel, der Boussoleninstrumente und häufig auch der Nivellierinstrumente, vor allem aber der Universalinstrumente mit zwei sogenannten „Distanzfäden" versehen.

Es soll nun im folgenden der praktische Vorgang beim Arbeiten mit dem Boussoleninstrumente verbunden mit optischem Distanzmessen beschrieben werden.

1. Bestimmen der kleinen Konstante. Man richtet das Fernrohr gegen einen entfernten Gegenstand, beseitigt sorgfältig die Parallaxe, mißt die Entfernung von der Objektivlinse bis zum Fadenkreuz in Zentimetern und hierauf die Entfernung von der Objektivlinse bis zur Instrumentmitte (vertikale Achse) ebenfalls in Zentimetern. Die Summe beider Maße ist das c der Formel. In der Regel ist dies annähernd gleich der anderthalbfachen Fernrohrlänge.

2. Bestimmen der großen Konstante. Nach der Distanzformel für ebenes Terrain ist $D = C.L + c$, daraus ist $D - c = CL$ und $C = \frac{D - c}{L}$. Das heißt: Die große Konstante ist gleich der um c verminderten Distanz, dividiert durch die Lattenablesung. Man steckt sich also auf einem ebenen Platze (1 bis 2⁰ Neigung schaden nichts) eine gerade Linie von genau 100 m aus und bezeichnet sich auch die Punkte bei 20, 40, 60 und 80 m und wenn Raum vorhanden ist, auch bei 120 m. Das Abstecken muß mit peinlichster Sorgfalt mittels eines Stahlbandes geschehen; zu dem Zwecke werden die Pflöcke ganz in den Boden getrieben, oben mit einem Messer geglättet und auf diese Fläche dann in den gemessenen Längen Bleistiftstriche gezogen. Würde man nun das Instrument im Nullpunkte dieser Linie aufstellen, dann müßte man von der jeweiligen Länge noch die kleine Konstante abziehen, da ja $(D-c)$ durch L zu dividieren ist. Damit aber der Zähler des Bruches eine runde Zahl wird, stellt man das Instrument nicht im Nullpunkt auf, sondern um c zurück. Man verlängert also die abgesteckte Linie nach rückwärts noch um c Zentimeter, schlägt dort einen Pflock und stellt darüber das Instrument zentriert und horizontiert. Sodann schickt man eine Latte nach dem Punkte *100*, wo sie so aufgestellt werden muß, daß ihre vordere geteilte Fläche genau am Bleistiftstrich des Pflockes steht und dem Instrumente zugekehrt ist. Außerdem muß sie genau vertikal stehen, wie überhaupt jede Latte, auf der man eine Fernrohrablesung machen will. Um dies zu erreichen, ist an der Rückseite der Latte ziemlich hoch oben in ihrer Mittellinie ein Senkel aufgehängt, dessen Spitze auf einen in Augenhöhe eingeschlagenen Nagel von der Länge des oberen Senkelnagels einspielt oder es ist an der Latte eine Dosenlibelle angebracht. Hierauf stellt man das Fernrohr (nach sorgfältig beseitigter Parallaxe) auf diese Latte so ein, daß der untere Faden auf einen Zehner der Teilung zu stehen kommt und liest ab, d. h. man zählt die Zentimeter bis zum oberen Faden, wobei man Teile eines Zentimeters anschätzt. Zum bequemeren Zählen sind die Latten häufig numeriert. Gesetzt, man hätte gezählt: 9 Zehner, dann noch 8 ganze Zentimeter und es würde der Faden noch über der Hälfte des neunten Zentimeters stehen, dann hieße die Ablesung etwa 98·7. Man hat also $D = 100 + c$, $L = 98{\cdot}7$. Nach der obigen Formel $C = \frac{D - c}{L}$

ist also $C = \frac{(100 + c) - c}{98·7} = \frac{100\,m}{98·7\,cm} = 10.000\,cm : 98·7\,cm =$ **101·3**. Hiemit begnügt man sich jedoch nicht, sondern beobachtet auch noch bei 80, 60, 40 und 20 *m* und berechnet auch hieraus die Konstante Infolge mangelhafter Einstellung und Beobachtung wird man nicht immer dasselbe Resultat erhalten und nimmt daher aus allen Resultaten das arithmetische Mittel. Resultate, die stark von den übrigen abweichen (0·3) sind nicht verwendbar. Zur Vorsicht macht man alle Beobachtungen noch einmal durch.

Die endgiltig ermittelte Konstante schreibt man sich ins Manuale und dazu das Datum des Beobachtungstages. Da sich durch die Erschütterungen, denen ein Instrument im Verlaufe einer Vermessungskampagne ausgesetzt ist, die Entfernung der beiden Fäden ändern kann, muß die Konstante von Zeit zu Zeit, mindestens alle Monate, kontrolliert werden.

3. Das Aufnehmen. Da das Aufnehmen mittels der Boussole unter Zuhilfenahme des optischen Distanzmessens bereits in dem Gesagten enthalten ist, erübrigt nur noch die Aufzählung der nacheinander folgenden Verrichtungen und Handgriffe. Gesetzt, die aufzunehmende Linie hieße $a\,b$, so erfolgt:

Aufstellen des Instrumentes in a, Zentrieren, Horizontieren, Lüften der Nadelarretierung, zwischenzeitiges Aufstellen der Latte in b durch den Gehilfen genau vertikal, Beseitigung der Parallaxe, Einstellen roh auf die Latte, Klemmen der Horizontalbewegung, feines Einstellen mit der Mikrometerschraube, Richten des Fernrohres, Klemmen der Vertikalbewegung, feines Einstellen eines Fadens auf einen Zehnerstrich mit der Mikrometerschraube, Ablesen der Latte und Eintragen ins Manuale, Ablesen des Höhen- oder Tiefenwinkels am Höhenkreis und Eintragen, Warten bis die Nadel ruhig ist, dann Ablesen der Nordspitze und Eintragen, Ablesen der Südspitze und Eintragen, Kontrollieren ob die Differenz 180°, flüchtiges Wiederholen aller Ablesungen, Anvisieren eventuell noch anderer Punkte, sodann Zeichnen der Skizze, Arretieren der Nadel, Abwinken der Latte und Übertragen des Instrumentes auf den nächsten Punkt.

§ 20. Der Nonius.

Bei fast allen Winkelinstrumenten sind zum genaueren Ablesen der Winkel sogenannte Nonien angebracht, weshalb deren Einrichtung im folgenden kurz behandelt werden soll.

Der Nonius (auch Vernier genannt) ist eine Vorrichtung, mit Hilfe deren man auf einer Teilung kleinere Teile ablesen kann, als sie selbst angibt. Sie besteht aus einer

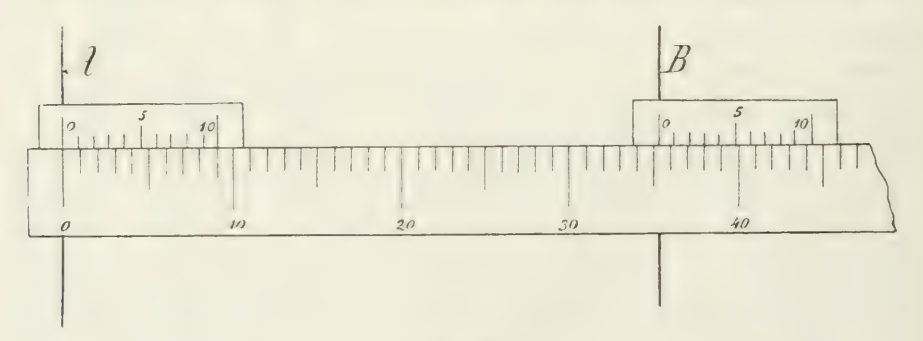


Fig. 293.

auf einem eigenen Metallplättchen angebrachten Teilung, welche längs der Grundteilung oder längs welcher die Grundteilung gleitet. Die Noniusteilung ist so beschaffen, daß eine gewisse Anzahl Teile der Grundteilung n entweder in $n + 1$ oder in $n - 1$ Teile geteilt erscheint. Also z. B. 9 Grundteile in 10 oder 11 Grundteile in 10 Noniusteile.

A. Es sind n Teile der Grundteilung gleich $n + 1$ Teilen des Nonius, Fig. 293.

Nennt man einen Teil der Grundteilung l, so ist die Länge von n solchen Teilen $n\,l$, und wenn diese Strecke in $n + 1$ Teile geteilt wird, dann ist ein solcher Teil der $(n + 1)^{te}$ Teil von $n\,l$, also $\frac{n\,l}{n + 1}$. Die Länge eines Noniusteiles ist also $\frac{n\,l}{n + 1}$. Um zu erfahren, um wieviel ein Teil des Nonius kleiner ist, als ein Teil der Grundteilung, hat man nur nötig, einen Noniusteil von einem Grundteile abzuziehen, also

die Differenz $l - \frac{n\,l}{n+1}$ zu bilden. Auf gleiche Nenner gebracht, gibt dies $\frac{l\,(n+1) - n\,l}{n+1} = \frac{n\,l + l - n\,l}{n+1} = \frac{l}{n+1}$. Man nennt diese Größe die „Angabe" des Nonius. Würde man den Nonius in der Figur soweit nach rechts verschieben, daß der erste Teil der Grundteilung mit dem ersten Teile des Nonius zusammenfiele, dann würden die zwei 0-Punkte um $\frac{l}{n+1}$ voneinander entfernt, würde man die zweiten Teilstriche zum Übereinanderfallen (Koïnzidieren) bringen, dann würde der 0-Punkt des Nonius noch um ein $\frac{l}{n+1}$ weiter gerückt, also vom 0-Punkte der Grundteilung um $\frac{2\,l}{n+1}$ entfernt sein. In dem angenommenen Beispiele in der Figur sind neun Teile in zehn geteilt, die Angabe des Nonius ist also, da hier $n = 9$ ist: $\frac{l}{9+1} = \frac{l}{10}$. Ist ein Grundteil $l = 1\,cm$, dann ist die Angabe $\frac{1}{10}\,cm = 1\,mm$, ist ein Grundteil $2\,cm$, dann ist die Angabe $\frac{2}{10}\,cm$ usw., allgemein also $\frac{1}{10}$ des jeweiligen Grundteiles.

Die Anwendung des Nonius ist nun folgende: Gesetzt, es wäre die Strecke $A\,B$ in Fig. 293 mit der Grundteilung zu messen. Zu diesem Zwecke wird man den Nullpunkt der Grundteilung an A anlegen und bei B ablesen. Dies kann man aber genau nur dann, wenn B mit einem Teilstriche zusammenfällt. Liegt aber B beispielsweise zwischen dem 35. und 36. Teilstriche, wie die Figur zeigt, dann muß das Stück zwischen 35 und B mit Hilfe des Nonius gemessen werden. Zu diesem Zwecke verschiebt man den Nonius bis sein 0-Punkt auf B zu stehen kommt und sucht jenen Teilstrich auf, welcher in dieser Stellung mit einem Teilstriche der Grundteilung koïnzidiert. Wäre dies der erste, dann betrüge das Stück von 35 bis $B = \frac{1}{10}$ eines Grundteiles, wäre es der zweite, dann wäre 35 bis $B = \frac{2}{10}$ eines Grundteiles. In der Figur koïnzidiert der dritte Teilstrich, daher ist 35 bis $B = \frac{3}{10}$ und die ganze Strecke $A\,B$ demnach 35·3 Grundteile. (Ist die Grundteilung z. B. von 3 zu 3 *mm* geteilt, dann ist $A\,B = 35{\cdot}3 \times 3\,mm = 105{\cdot}9\,mm$.)

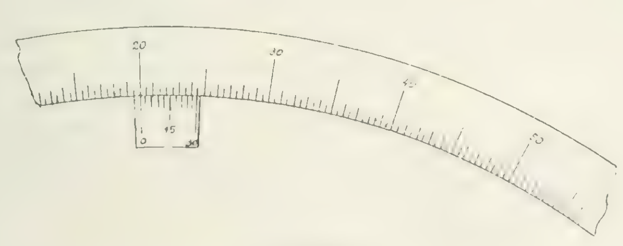


Fig. 294.

Die größte Anwendung findet der Nonius bei Gradeinteilungen an Winkelinstrumenten (in welchem Falle die Grundteilung Limbusteilung heißt). Fig. 294 zeigt eine Kreisteilung, welche halbe Grade angibt und einen Nonius, bei welchem wieder zehn Teile neun Limbusteilen entsprechen. Die Angabe ist selbstverständlich auch hier $\frac{1}{10}$ eines Limbusteiles und da ein solcher 30′ beträgt, kann man mit Hilfe des Nonius noch Zehntel davon, das sind 3 Minuten ablesen. In diesem Falle wird man den Nonius nicht mit 0 bis 10 beziffern, sondern, da die Angabe 3′ ist, die Ablesung also immer mit 3 multipliziert werden müßte, um einzelne Minuten zu erhalten, mit 0 bis 30. Würde also z. B. der fünfte Teilstrich des Nonius koïnzidieren, dann wäre die Strecke zwischen dem Nonius-Nullpunkt und dem vorhergehenden Limbusstrich $\frac{5}{10}$ eines Limbusteiles, d. i. $30' \times \frac{5}{10} = 15'$, weshalb gleich am Nonius statt 5 die Ziffer 15 eingraviert ist.

Um noch kleinere Teile ablesen zu können, muß man das n entsprechend vergrößern. Teilt man z. B. 29 Teile des Limbus in 30 Teile am Nonius, dann ist die Angabe $\frac{1}{30}$ eines Limbusteiles. Wäre z. B. der Limbus wieder in halbe Grade geteilt, dann könnte man mit Hilfe eines solchen Nonius $\frac{1}{30}$ eines halben Grades, d. i. 1 Minute ablesen. Wäre aber der Limbus bloß nach Graden geteilt, dann könnte man mit diesem Nonius $\frac{1}{30}$ eines Grades, d. i. 2 Minuten ablesen. In diesem Falle würde man, um das jedesmalige Multiplizieren mit 2 zu ersparen, den Nonius nicht mit 0 bis 30, sondern mit 0 bis 60 beziffern. Würde also z. B. der 20. Teilstrich koïnzidieren, dann hieße dies $\frac{20}{30} \times 1^0 = 40'$ mehr als der Limbusstrich vor dem Noniusnullstrich angibt, weshalb am Nonius statt 20 die Ziffer 40 einzugravieren wäre.

B. Es sind n Teile der Grundteilung gleich $n - 1$ Teilen des Nonius, Fig. 294 *a*. Nennt man einen Teil der Grundteilung wieder l, dann sind $n\,l$ Teile der Grund-

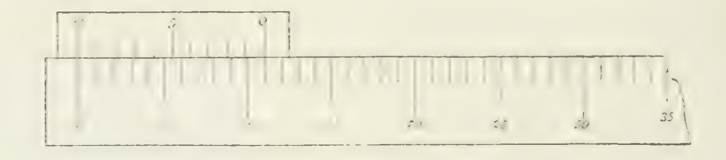


Fig. 294 *a*.

teilung in $n - 1$ Teile am Nonius geteilt. Ein Noniusteil ist daher $\frac{n\,l}{n-1}$ (ist also hier größer als ein Limbusteil). Der Unterschied zwischen einem Teile der Grundteilung und des Nonius gibt wieder die Differenz $\frac{n\,l}{n-1} - l = \frac{n\,l - l\,(n-1)}{n-1} = \frac{n\,l - n\,l + l}{n-1} = \frac{l}{n-1} =$ = der Angabe.

Verschiebt man den Nonius so weit nach rechts, daß der vorletzte Teilstrich koïnzidiert, so ist der Anfangspunkt offenbar um die obige Differenz $\frac{l}{n-1}$ vom *0*-Punkte der Grundteilung entfernt worden, koïnzidiert der zweitvorletzte Teilstrich, dann ist der *0*-Punkt der Grundteilung um $2 \times \frac{l}{n-1}$ vom Anfange des Nonius entfernt usw. Um also die Anzahl der Größen $\frac{l}{n-1}$, um welche der Nonius weitergerückt ist, zu kennen, muß man von rückwärts angefangen den koïnzidierenden Teilstrich zählen, weshalb dieser Nonius verkehrt beziffert wird (siehe Fig. 294 *a*).

In der Figur sind 11 Limbusteile in 10 Noniusteile geteilt, n ist also 11, daher die Angabe $\frac{l}{n-1} = \frac{l}{11-1} = \frac{l}{10}$, also wie beim ersten Nonius $\frac{1}{10}$ eines Grundteiles. Diese Art Nonius ist nicht so häufig in Gebrauch wie die zuerst beschriebene. Im übrigen ist die Anwendung die gleiche.

IV. Kapitel.

Von den Karten und Plänen und der Verzeichnung der aufgenommenen Grundstücke überhaupt.

§ 21. Begriff und Zweck der Karten und Pläne. Arten derselben.

Es ist Zweck der meisten Vermessungen, von den aufgenommenen Grundstücken eine geometrische Zeichnung anzufertigen. Diese stellt die horizontale Projektion des Vermessungsobjektes in einem verjüngten Maßstabe dar und ist daher der bezüglichen Figur in der Natur vollkommen ähnlich, d. h. es stehen die Seiten zu jenen in der Natur in einem bestimmten Verhältnisse und die Winkel sind jenen in der Natur gleich. Wir haben schon oben, Seite 211, eine solche geometrische Zeichnung einen Plan oder eine Karte genannt, und zwar sprechen wir insbesondere von einem Plane oder Situationsplane dann, wenn das verzeichnete Grundstück nur klein und die Verjüngung eine verhältnismäßig geringe ist und von einer Karte dann, wenn das verzeichnete Grundstück oder der Grundstückkomplex eine größere Ausdehnung hat und die Verjüngung eine große ist.

Der größte Wert einer Karte ist darin zu suchen, daß man aus derselben die horizontalen Projektionen sämtlicher Längen unter Zuhilfenahme des bezüglichen Verjüngungsmaßstabes entnehmen, Flächenteilungen und andere geometrische Operationen in derselben durchführen und in die Natur übertragen und die Flächen der vermessenen Grundstücke auf Grundlage der Ablesungen aus der Karte ermitteln kann. Man muß auch aus einer Karte direkt die Beschaffenheit der einzelnen Flächenteile ersehen, d. h. also beurteilen können, ob dieselben Wiese, Feld, Wald, Gebäude, Straßen, Flüsse usw. bezeichnen. Den genannten Anforderungen entsprechen aber nicht alle Karten in gleicher Weise, sondern in einer Karte wird diesem, in einer anderen jenem Umstande ein besonderes Gewicht beigemessen. Wir unterscheiden hienach verschiedene Arten von Karten, von denen für uns namentlich in Betracht kommen:

I. Katastralkarten,

II. Forstkarten,

III. Orientierungskarten, und zwar insbesondere jene, welche vom militär-geographischen Institute in Wien entworfen sind.

I. Die Katastralkarten

dienen als Grundlage für die Feststellung der Grundsteuer und werden daher von Staats wegen hergestellt. Der gewöhnliche Maßstab hiefür ist 1 : 2880 (oder alt 1″ = 40⁰).*) In manchen Städten oder überhaupt dort, wo Grund und Boden sehr teuer ist, hat man auch Katastralkarten im Maßstabe von 1 : 1440 (alt 1″ = 20⁰), während anderseits für Gegenden mit sehr wenig wertvollem Grund und wenig Verschiedenheiten in der Kulturgattung, d. i. besonders in manchen Hochgebirgsgegenden, Katastralkarten im Maßstabe 1 : 5760 (alt 1″ = 80⁰) in Anwendung stehen. In jeder Katastralkarte sind die einzelnen Verschiedenheiten in der Kulturgattung und alle Teile überhaupt, welche als eine für sich begrenzte Figur zu betrachten sind, als sogenannte Parzellen ausgeschieden, von denen zwei Gruppen

*) D. h. die Länge eines Zolles auf dem Papier entspricht 40 Klaftern in der Natur.

zu unterscheiden sind, nämlich die Grundparzellen und die Bauparzellen. Erstere unterscheidet man wieder als Gartenland, Weinland, Ackerland, Wiesenland, Weideland, Waldland, steuerfreie Grundstücke*) und Parifikationsland oder Parifikate.**) Jede Grundparzelle hat eine rot geschriebene, jede Bauparzelle eine schwarz geschriebene Nummer. Durch Teilung einer Parzelle wird die Parzellennummer nicht total geändert, sondern nach der Anzahl der entstandenen Teile durch Brüche der ursprünglichen Nummer bezeichnet. Wird z. B. die Parzelle Nr. 57 in drei Teile geteilt, dann heißen dieselben $\frac{57}{1}, \frac{57}{2}, \frac{57}{3}$. Um die einzelnen Kulturgattungen als solche auf der Karte unterscheiden zu können, besteht für jede derselben eine eigene Bezeichnung oder auch bei kolorierten Katastralkarten eine eigene Farbe.***) Die Flächengrößen, die Kulturgattung, die Bodengüteklasse (Bonitätsklasse), sowie der Reinertrag und der Eigentümer jeder Parzelle sind aus dem sogenannten Parzellenprotokolle zu ersehen, welches in jeder Gemeindekanzlei aufliegt.

Die Katastralkarten bestehen für jede sogenannte Katastralgemeinde für sich als ein Ganzes. Die Numerierung fängt hienach in jeder Katastralgemeinde mit 1 an, und zwar getrennt nach Grund- und Bauparzellen. Findet, wie dies gewöhnlich der Fall ist, die Verzeichnung einer ganzen Katastralgemeinde nicht auf einem einzigen Blatte Platz, so sind mehrere Katastralblätter für die betreffenden Gemeindegründe vorhanden. Jedes solche Katastralblatt nennt man eine Katastralsektion. Dieselbe enthält einen Komplex, der durch ein Rechteck von 25" Länge und 20" Breite, das sind 1000° Länge und 800° Breite im Naturmaße begrenzt ist und sonach ein Flächenausmaß von 1000° × 800° = 500 Joch besitzt.

Die stete Erhaltung der Katastralkarten nach dem jeweiligen Stande, d. i. die sogenannte Evidenzführung des Katasters, erfolgt durch die staatlichen Evidenzhaltungsgeometer. Für private Zwecke können lithographische Kopien der Originalkatastralkarten ausgefolgt werden.

II. Die Forstkarten

dienen nur den Zwecken der Forstwirtschaft und sind daher in erster Linie nur für den Waldbesitzer von Wichtigkeit. Im ausführenden Wirtschaftsbetriebe wenden wir zwei Arten von Forstkarten an, nämlich:

1. Wirtschaftskarten, das sind Karten in einem größeren Maßstabe (1 : 2500, 1 : 5000, 1 : 2880, 1 : 5760), welche die Begrenzung des Waldes, die Einteilung durch künstliche und natürliche Linien, die Abgrenzung

*) Steuerfrei sind: Unbenützbare Teiche, Seen, Sümpfe ohne Rohrwuchs, Flüsse, Bäche und öffentliche Kanäle, Schotter- und Sandbänke, Krummholzwald, kahle Felsen und Steingerölle, Sand-, Gletscher-, Eis- und Schneefelder, Ortsräume, öffentliche Wege, Chausseen, Staatseisenbahnen und öffentliche Wasserleitungen, Kirchen, Kapellen, Bethäuser samt ihren Hofräumen, endlich alle Hof- und Staatsgebäude und öffentlichen Lehranstalten; als steuerbare Grundstücke gelten alle, welche irgend einen Ertrag abwerfen.

**) Parifikate sind steuerbare Flächen, welche durch eine andere Bestimmung der Bodenkultur entzogen worden sind, z. B. als Holzlagerplätze, Mühlgräben, als Schotter- und Lehmgruben, als Terrain für Privateisenbahnen u. dgl. benützt werden. Die Grundsteuer für solche Objekte wird durch Vergleichung (Parifikation) mit ebensolchen, aber der Bodenkultur überwiesenen Grundstücken ermittelt.

***) Näheres hierüber wird im vierten Bande dieses Werkes beim „Situationszeichnen" gelehrt werden.

der einzelnen Waldbestände*) (ob Jung- oder Altholz, Laub- oder Nadelholz u. dgl.), die Wasserläufe und die inliegenden und anstoßenden landwirtschaftlichen Gründe enthalten und die, wie schon der Name sagt, als Grundlage für die Wirtschaft dienen, also die Einzeichnung der laufenden Holzschläge, die Veränderungen an den Waldgrenzen, Wegen usw. in sich aufnehmen. Sie werden vorteilhaft auf sogenanntem Poststoff auf Leinwand angefertigt.

2. Bestandeskarten, das sind Übersichtskarten in einem kleinen Maßstabe (1 : 15000, 1 : 20000 oder selbst 1 : 25000), welche eine Übersicht über den ganzen Forst geben, also nebst der Begrenzung, Waldeinteilung usw. insbesondere die einzelnen Waldbestände nach Alter und Holzart durch Farbentöne genau ersichtlich machen und auch im fremden Besitze das zur Orientierung nötige Detail enthalten. Wir kommen bei Besprechung der wesentlichsten Begriffe der Forsteinrichtung im III. Bande auf diesen Gegenstand eingehender zurück.

III. Als wichtige Orientierungskarten

kommen für den Forstschutzmann die sogenannten Spezialkarten des militär-geographischen Institutes im Maßstabe 1 : 75000 in Betracht, welche von dem genannten Institute als photographische Kopien der Originalkarten an Parteien abgegeben werden. Die besondere Nützlichkeit dieser Karten ist darin zu suchen, daß auf ihnen in Form von Schraffierungen das Terrain an jedem Orte, sei es nun Rücken, Kessel, Mulde, Tal, Sattel usw., nebst allen Wegen, Wasserläufen, Gebäuden ersichtlich gemacht ist. Bei der Höhenmeßkunde wird auf die bildliche Darstellung der Terrainverhältnisse zurückgekommen werden.

§ 22. Aufgaben, welche bezüglich der Verzeichnung von Aufnahmen an die technischen Hilfsorgane gestellt werden können.

Die Herstellung der eigentlichen Forstkarten ist Aufgabe des Forstverwaltungspersonales, während an die technischen Hilfsorgane nur folgende Aufgaben herantreten können:

I. Verfassung eines kleinen Situationsplanes unter der Aufsicht eines Forstverwaltungsbeamten zum Zwecke der Teilung eines Grundstückes in mehrere einzelne Teile, z. B. bei Wiesenverpachtungen, Gräsereilosen u. dgl.

II. Aufnahme von Holzschlägen, kleineren Weganlagen u. dgl. und Verzeichnung in der Wirtschaftskarte.

III. Kopieren vorhandener Karten und Pläne und Herstellung einer Zeichnung genau nach dem Originale.

IV. Verkleinerung oder Vergrößerung einer Karte.

I. Verfassung eines kleineren Situationsplanes.

1. Erfordernis an Requisiten.

a) Ein nicht zu schwaches, der Größe des Planes entsprechendes Zeichenblatt, aufgespannt auf einem Reißbrett.**) Soll der Plan nur in

*) Das sind die sogenannten Bestandesausscheidungen.

**) Das Aufspannen des Papieres darf wohl als aus der Bürgerschule her bekannt vorausgesetzt werden.

Tusch ausgefertigt und lange Zeit erhalten werden, so nimmt man an Stelle eines aufgespannten einfachen Zeichenblattes ein solches von sogenanntem Poststoff auf Leinwand, der sich bei längerem Liegenbleiben nicht so zusammenzieht wie ein einfaches Zeichenpapier, der also mit anderen Worten nur einen geringen Papiereingang besitzt.

b) Ein längeres Lineal, womöglich aus Messing, ferner 2 bis 3 Stück richtige Zeichendreiecke, am besten Kautschukdreiecke.

c) Zwei Bleistifte, und zwar ein kegelförmig gespitzter Hardtmuthstift Nr. 3 zum Schreiben und ein keilförmig gespitzter Hardtmuthstift Nr. 4 oder 5 zum Zeichnen.

d) Ein sogenannter Stockzirkel mit sehr feinen Spitzen, womöglich ein Haarzirkel zur feinen Einstellung der Spitzen mit Hilfe eines Schräubchens.

e) Eine gute Reißfeder, eventuell auch ein Nullenzirkel zum Zeichnen sehr kleiner Kreise für die Grenzsteine.

f) Ein dem gewählten Verjüngungsverhältnisse entsprechender Transversalmaßstab aus Messing oder Kartonpapier. Im Notfalle stellt man sich einen solchen Maßstab selbst her.

2. Das Auftragen der Vermessungsfläche auf dem Papiere.

Das Verzeichnen einer Aufnahme in einem verjüngten Maßstabe auf dem Papiere nennt man das Auftragen derselben. Vor Beginn dieser Arbeit muß man vor allem über das zu wählende Verjüngungsverhältnis schlüssig werden,*) ferner darüber, welche Lage dem Aufnahmsobjekte auf dem Papiere zu geben ist, damit dasselbe auf der Zeichenfläche vollkommen Platz finde, denn bei Aufnahmen, wie sie uns vorliegen, kann mit Rücksicht auf die Art und Weise des Vorganges, wie dieselben aufgetragen werden müssen, die Übertragung der Aufnahmen auf mehrere Zeichenblätter nicht in Betracht kommen. Die Arbeiten beim Auftragen sind folgende:

a) Die Verzeichnung des Netzes auf dem Papiere in derselben Reihenfolge, wie die Vermessung in der Natur geschehen ist durch Konstruktion der Netzdreiecke aus den gemessenen Seiten auf Grundlage des Aufnahmsmanuales. Von der richtigen Lage der ersten Dreiecksseite, der Ausgangslinie für die Auftragung, hängt es ab, ob die ganze Figur auf der Zeichenfläche Platz finden wird. Sind Nebenachsen vorhanden, so werden dieselben ebenfalls nach den Angaben des Manuales eingetragen. Bei Vorhandensein von Kontrollängen in der Skizze ist die Richtigkeit der Auftragung auf Grundlage derselben zu prüfen.

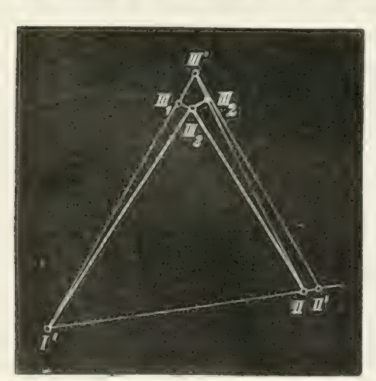


Fig. 295.

Bei größeren Dreiecken und bei der Konstruktion der Netzdreiecke aus den drei Seiten überhaupt ist es zu ungenau, den Scheitel des betreffenden Dreieckes bloß durch den Schnitt von zwei Zirkelbögen zu bestimmen. Um eine größere Genauigkeit zu erzielen, empfiehlt es sich, auf einem zweiten Papiere, Fig. 295, roh ein Dreieck aus den gegebenen Seiten zu konstruieren,

*) Insoferne dasselbe nicht von vorneherein festgesetzt sein sollte.

die Eckpunkte I', II', III' desselben sodann in der richtigen Lage auf das eigentliche Zeichenblatt mit einer Nadel durchzustechen (durchzupikieren), zu verbinden und nun erst das genaue Dreieck wie folgt zu finden: Auftragen der genauen Länge $I' II$, Verbinden von II mit III', Auftragen der genauen Länge $I\ III$ und $II\ III$ auf den Seiten $I'\ III'$ und $II\ III'$ und sehr genaues Errichten der Senkrechten $III_1\ III_3$ und $III_2\ III_3$. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten gibt in III_3 den richtigen Scheitel. Diese Konstruktion beruht darauf, daß die kurzen Senkrechten $III_1\ III_3$ und $III_2\ III_3$ als Kreisbogen betrachtet werden können, die man mit den richtigen Seitenlängen von den Punkten I' und II aus hätte ziehen sollen. Es ist dies deshalb erlaubt, weil diese Senkrechten im Vergleiche zu den Dreieckseiten so klein sind, daß ohnedies der Kreisbogen von der geraden Linie in der Zeichnung nicht hätte unterschieden werden können.

Dieser eben dargestellte Vorgang bei der Konstruktion der Netzdreiecke aus den drei Seiten wird bei alleiniger Anwendung des gewöhnlichen Stockzirkels auch deshalb notwendig, weil größere Längen, für welche eine Zirkelöffnung von über 60° erforderlich wäre, nicht auf einmal abgegriffen werden dürfen, da sonst die Spitzen des Zirkels zu schief stehen, wodurch Fehler entstehen.*) Jeder überhaupt mit dem Zirkel gestochene Punkt wird mit Bleistift eingeringelt und mit seiner aus dem Manuale ersichtlichen Nummer beschrieben. Die Verbindung der einzelnen Punkte findet im Sinne der Manualskizze durch feine, mit einem 4er Bleistifte gezogene Linien statt.

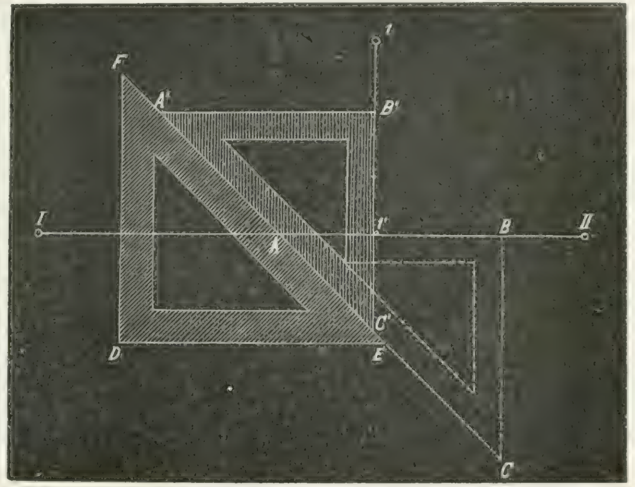


Fig. 296.

b) Eintragen der Detailpunkte bei Koordinatenmessungen durch Auftragen der Abszissen und Beschreiben der Fußpunkte derselben mit Bleistift genau in derselben Reihenfolge, wie es bei der Aufnahme geschah, auf Grund des Manuales. Die Ordinaten werden unter Anwendung von Kautschukdreiecken senkrecht auf die entsprechenden Abszissenachsen gezogen und mit dem Zirkel nach den Angaben des Manuales abgelängt.

Beim Ziehen der einzelnen Ordinaten verfährt man in der Weise, daß man, Fig. 296, die eine Kathete AB eines Kautschukdreieckes an

*) Für das Auftragen größerer Längen auf dem Papiere ist es vorteilhaft, wenn ein sogenannter Stangenzirkel zur Verfügung steht. Derselbe besteht aus einer prismatischen Stange von Holz oder Metall, auf welcher zwei durch Schrauben feststellbare Hülsen verschiebbar sind, deren jede eine Zirkelspitze senkrecht zur Stange trägt. Nach dem Anschrauben beider Hülsen ist die eine derselben noch durch eine sogenannte Mikrometerschraube in genauester Weise frei beweglich, so daß, wenn die eine Zirkelspitze auf den Anfangspunkt einer Strecke gesetzt wird, die zweite Spitze auf das Ende dieser Strecke durch Drehen an der Mikrometerschraube sehr genau eingestellt werden kann.

die betreffende Aufnahmsachse *I II*, auf welche die Ordinaten gezogen werden sollen, anlegt, das Dreieck *A B C* alsdann entlang der Hypotenuse eines zweiten anzulegenden Dreieckes *D E F* so weit verschiebt, bis die Kathete *B C* den Fußpunkt *1'* der zu errichtenden oder den Punkt *1* der zu fällenden Ordinate berührt, und nun mit dem Bleistifte *1 1'* zieht. Ist zu *I II* durch *1* eine Parallele auf dem Papiere zu ziehen, so werden die Dreiecke wie vor, jedoch etwas weiter nach rechts gelegt, dann wird das Dreieck *A B C* so weit verschoben, bis die Kante *A B* durch *1* geht und nun nach der Kante *A' B'* in *1* eine Linie gezogen.

Jeder durch Koordinaten bestimmte Detailpunkt erhält ebenfalls eine Ringelung und wird mit Bleistift beschrieben. Die einzelnen Detailpunkte werden nach Angabe der Manualskizze miteinander verbunden.

Sind bei der Einzeichnung des Details sehr kleine Längen aufzutragen, welche sich kaum genau in den Zirkel fassen lassen, so geht man in der Weise vor, daß man beispielsweise bei der Auftragung von 1·5 *m* in der Richtung der Auftragslinie 100 *m* zurück aufträgt, sodann 101·5 *m* in den Zirkel nimmt und nun diese Strecke von dem Endpunkte der zurück aufgetragenen 100 *m* nach vorwärts aufträgt.

(Derselbe Vorgang wie bei Fig. 284 *a* und *b*.)

c) Feines Ausziehen sämtlicher Linien, welche in der Karte stehen bleiben müssen, also nicht auch der Aufnahmsachsen und sonstigen Konstruktionshilfslinien, mit gutem Tusch; Weglöschen aller übrigen Linien mit weichem Radiergummi, am besten Naturgummi (schwarz). Einzeichnen der betreffenden Kulturart (ob Wald, Wiese, Weide, Gemüse- oder Obstgarten) in einer allgemein üblichen Bezeichnungsweise, ferner Bezeichnung der sonstigen Objekte, wie Brücken, Wegweiser, Kapellen u. dgl. ebenfalls mit den für Situationszeichnungen geltenden Bezeichnungsarten.

d) Beschreiben des Planes mit Tusch; also Beschreiben der Grenzsteine, der einzelnen Parzellennummern und eventuell der Lokalnamen der Wasserläufe, besonders wichtiger Punkte und Örtlichkeiten, Einschreiben der Anrainer usw. nach den eventuell für den speziellen Fall gegebenen Vorschriften. Als anzuwendende Schrift eignet sich hier am besten durchaus die Rondschrift.

e) Verzeichnen des angewendeten Maßstabes auf dem Zeichenblatte oder Angabe des angewendeten Verjüngungsverhältnisses, also entweder 1 : 1000, 1 : 2880 u. dgl.

f) Reinigen der Zeichnung durch Überreiben mit trockenen Brotkrumen oder Abfällen von Handschuhleder.

Der in dieser Weise angefertigte Plan wird als ein in Tusch ausgefertigter oder kurz auch als ein schwarzer Plan bezeichnet. Sollen in einem solchen Plane noch die einzelnen Kulturgattungen und sonstigen Vermessungsobjekte, wie Häuser, Brücken u. dgl. durch verschiedene Farben deutlich ersichtlich gemacht werden, so muß man den Plan kolorieren und man spricht dann von einem kolorierten Plane. Über die Herstellung von kolorierten Plänen wird ebenfalls im IV. Bande bei Besprechung des Kapitels über den Zeichenunterricht das Nötige gesagt werden.

II. Verzeichnung von kleineren Aufnahmen, wie Holzschlägen, kleineren Weganlagen u. dgl. und Übertragung derselben in die Wirtschaftskarte.

1. Die Verzeichnung von einfachen, ungebrochenen Schlaglinien, die im Wege der Einbindemethode eingemessen wurden, erfolgt

durch direktes Eintragen der abgemessenen Längen in die Wirtschaftskarte und Ziehen der durch die eingetragenen Punkte gegebenen Linien. die nun je nach den geltenden Vorschriften entweder als Bleistiftlinien zu belassen oder mit roter Tinte oder Tusch auszuziehen sind.

2. Schlaglinien mit mehreren Bruchpunkten und einfache Wege werden auf Grundlage der vorausgegangenen Aufnahme vorerst in der besprochenen Weise in gleichem Maßstabe wie die Wirtschaftskarte auf einem Zeichenpapier aufgetragen und in der Ausführung mit Bleistift belassen. Sodann legt man ein gutes Pauspapier über die Auftragung und sticht mit einer Pikiernadel*) sämtliche Auftragspunkte durch, so daß die letzteren dann auch auf dem Pauspapiere erscheinen; man nennt diese Arbeit das Durchpikieren der Auftragung. Die durchpikierten Punkte werden nun mit Bleistift geringelt, ferner ohne Anwendung eines Lineales so verbunden, wie es die Auftragung ausweist und wenigstens sprungweise im Sinne der Auftragung mit Bleistift numeriert. Hierauf legt man die Kopie auf die Wirtschaftskarte, bringt jene Punkte der kopierten Auftragung, welche bereits in der Karte vorhanden sind, mit dieser in Übereinstimmung und pikiert nun die Punkte der eigentlichen Schlaglinie auf die Wirtschaftskarte mit der Pikiernadel durch.

Es ist also zum Zwecke des Einlegens einer solchen Auftragung in die Wirtschaftskarte immer notwendig, daß in die Aufnahme auch zwei oder besser drei in der Karte schon vorhandene Punkte einbezogen werden, wenngleich diese nicht zum eigentlichen Aufnahmsobjekte gehören, weil man nur auf Grund dieser Punkte die Einlegung in die Karte bewirken kann. War in Fig. 248, Seite 253, die Schlaglinie $\frac{6}{A}$ bis *3* aufzunehmen, so müssen auf die angenommene Aufnahmsachse wenigstens auch die Kartenpunkte $\frac{6}{A}$ und Grenzstein *17*, womöglich auch $\frac{5}{A}$ nebst den Schlaglinienpunkten *1, 2, 3* eingemessen werden, damit man die Auftragung beim Einlegen mit den Punkten $\frac{6}{A}$, *17* und $\frac{5}{A}$ auf die entsprechenden Kartenpunkte legen und sodann die eigentlichen Schlaglinienpunkte *1, 2, 3* durchpikieren kann. Die auf die Wirtschaftskarte pikierte Schlaglinie wird nun wie bei 1. ausgezogen.

III. Kopieren vorhandener Karten und Pläne und Herstellung einer vollständigen Kopie genau nach dem Originale.

Die Anfertigung einer richtigen Kopie von einer vorliegenden Wirtschaftskarte, Katastralkarte u. dgl. geschieht auf zweierlei Art, und zwar:

1. Durch das Durchpikieren der Originalkarte auf einen entsprechend großen Bogen Zeichenpapier. Man geht hiebei in der Weise vor, daß man den letzteren unter die Originalkarte legt und nun die Ecken und Krümmungspunkte der einzelnen Begrenzungen mit Hilfe

*) Eine Pikiernadel besteht aus einer sehr feinen Nadel, welche einen beinernen oder hölzernen Griff hat. Häufig ist der Griff der Reißfeder zum Herausschrauben eingerichtet und enthält eine solche Pikiernadel. Man kann sich aber auch eine Pikiernadel selbst herstellen, indem man aus Siegelwachs in der in Fig. 297 dargestellten Weise einen Griff um eine Nähnadel ankittet. Die Pikiernadel muß stets senkrecht zur Zeichenfläche gehalten werden. (Siehe Anschlagnadel Seite 271.)



Fig. 297.

einer Pikiernadel durchsticht. Die so erhaltenen Punkte werden sodann zur Orientierung ohne Anwendung eines Lineales mit Bleistift verbunden, dann aber die Verbindungslinien mit Tusch ausgezogen und die Karte nun genau in derselben Weise ausgefertigt, wie das Original es angibt.

2. Durch die vorherige Herstellung einer Kopie auf Pauspapier und Übertragung erst dieser Kopie auf Zeichenpapier. Zu diesem Zwecke legt man das Pauspapier auf die Originalkarte, befestigt es durch Schwersteine (Beschwerer)*) oder durch aufgelegte Messinglineale und markiert jeden Punkt des Originals entweder mittels eines sehr fein zugespitzten harten Bleistiftes (wodurch man die Originalkarte ganz und gar unbeschädigt läßt) oder pikiert diese Punkte mit einer feinen Pikiernadel auf das Pauspapier und ringelt jeden Punkt ein. Wenn viele Punkte zusammenkommen, tut man gut, die eingeringelten Punkte auch noch mit freier Hand zu verbinden, um auf der eigentlichen Kopie Verbindungen nicht zusammengehöriger Punkte zu vermeiden. Hierauf legt man die Pause auf das reine Zeichenpapier, beschwert sie mit Schwersteinen und pikiert nun die Punkte mit der Pikiernadel durch. Die so erhaltenen Stiche werden sodann auf dem Zeichenpapiere aufgesucht, eingeringelt und nun an der Hand des Originals verbunden. Die deutliche Ausfertigung der Kopie, wie das Ausziehen mit Tusch, das Beschreiben usw. erfolgt genau im Sinne des Originals.

IV. Verkleinerung oder Vergrößerung eines Planes oder einer Karte.

Oft sind Karten oder Pläne nicht in demselben Maßstabe zu kopieren, sondern in einem verkleinerten Verhältnisse. Man muß also von der Originalkarte eine verkleinerte Karte herstellen und verwendet dazu als einfachsten Behelf den sogenannten Reduktionszirkel (Fig. 298). Derselbe unterscheidet sich von einem gewöhnlichen Zirkel dadurch, daß die Schenkel desselben noch über das Zirkelgewinde c hinaus verlängert sind und an diesen Verlängerungen abermals zwei Zirkelspitzen tragen. Der Reduktionszirkel ist also ein Doppelzirkel; öffnet oder schließt man den Hauptzirkel, so öffnen und schließen sich auch die beiden anderen Schenkel des Zirkels. Stellt man weiters die Schenkellängen des Hauptzirkels in ein gewisses Verhältnis zu jenen des zweiten Zirkels, z. B. in das Verhältnis von 3 : 1, was durch Verschieben des Gewindes c leicht erfolgen kann, so muß, da die Dreiecke ABc und abc ähnlich sind, auch die abgemessene Länge AB im Verhältnisse 3 : 1 zu der Entfernung des zweiten Zirkelspitzenpaares ab stehen.

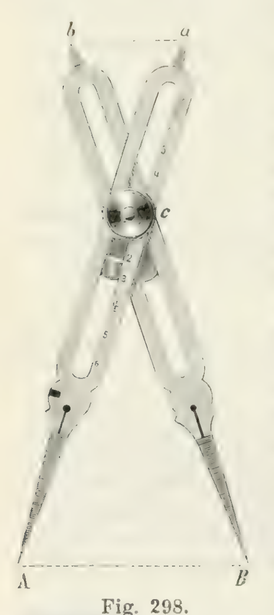


Fig. 298.

Um den Zirkel auf die am häufigsten vorkommenden Verkleinerungsverhältnisse, wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... $\frac{1}{10}$ rasch einstellen zu können, ist auf einer Verlängerung des Zirkelgewindes ein Zeiger (Index) i eingeritzt, den man einfach mit den auf den Schenkel Aa angebrachten Marken in Übereinstimmung zu bringen braucht, um die gewünschten

*) Gewöhnlich prismatisch oder zylindrisch geformte Blei- oder Messingstücke, im Notfalle auch Eisengewichte u. dgl.

Verkleinerungsverhältnisse zu erhalten. Ist hingegen das Verkleinerungsverhältnis durch keine ganze Zahl gegeben, also nicht etwa $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. dgl., sondern ist beispielsweise die Verkleinerung einer Karte aus dem Maßstabe von 1 : 2880 in den Maßstab 1 : 15000 vorzunehmen, was dem Verkleinerungsverhältnisse $\frac{2880}{15000} = \frac{1}{5\cdot208}$ entspricht, so ermittelt man die richtige Stellung des Zirkels versuchsweise auf folgende Art: Man berechnet vorerst, wie lang beispielsweise 200 *m* in der Natur je im Maßstabe 1 : 2880 und 1 : 15000 auf dem Papiere sind. In dem ersten Maßstabe sind 200 *m* auf dem Papiere lang $\frac{1}{2880} \cdot 200\,m = 6\cdot94\,cm$; im zweiten Maßstabe sind 200 *m* auf dem Papiere lang $\frac{1}{15000} \cdot 200\,m = 1\cdot33\,cm$. Die Stellung des Zirkels ist in diesem Falle dann als richtig anzusehen, wenn bei der Öffnung des Hauptzirkels auf 6·94 *cm* die Spitzen des zweiten Zirkels 1·33 *cm* voneinander entfernt sind. Man greift also 6·94 *cm* auf einem genauen Metermaßstabe mit dem Hauptzirkel ab, wendet den Zirkel um und mißt dann die entsprechende Entfernung mit dem zweiten Zirkelspitzenpaar. Beträgt die letztere Entfernung nicht genau 1·33 *cm*, so muß man das Zirkelgewinde solange verschieben, bis bei einer Öffnung des Hauptzirkels auf 6·94 *cm* der zweite Zirkel genau 1·33 *cm* angibt.

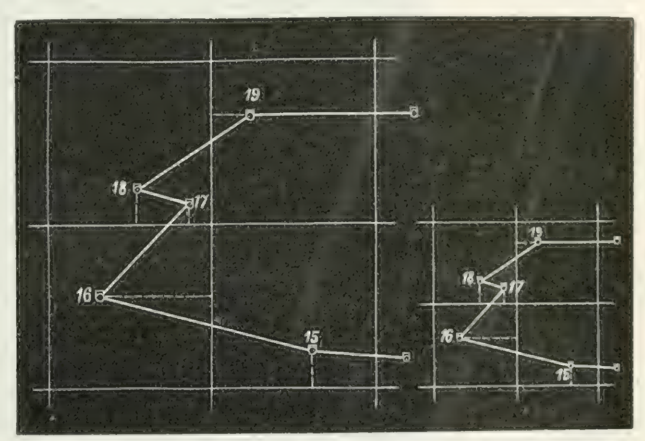


Fig. 299.

Soll nun von einer Karte mit dem Reduktionszirkel eine verkleinerte Kopie hergestellt werden, so hält man zweckmäßig folgenden Vorgang ein: Man verzeichnet auf der Originalkarte mit einem sehr gut gespitzten harten Bleistifte ein sehr genaues Quadratnetz (Fig. 299) (also auf einer Katastralkarte beispielsweise durch Verbindung der einzelnen gegenüberliegenden Zollmarken) und trägt ein zweites Quadratnetz in dem gewünschten Verkleinerungsverhältnisse auf dem für die Kopie zu verwendenden Papiere auf. Auf die einzelnen Seiten des großen Quadratnetzes bezieht man nun die einzelnen Punkte der Zeichnung mittels Abszissen und Ordinaten und wählt hiezu für jeden einzelnen Punkt immer jene Quadratseite als Abszissenachse, welche dem betreffenden Punkte am nächsten liegt. Zu diesem Zwecke zieht man also sämtliche Ordinaten auf dem Originale unter Zuhilfenahme von Kautschukdreiecken, mißt dann die Abszissen mit dem Hauptzirkel ab, dreht hierauf den Reduktionszirkel um und trägt jede einzelne Abszisse auf der gleichliegenden Achse im kleinen Quadratnetze auf, in welches nun auch wieder mit Hilfe der Dreiecke die Ordinaten eingezeichnet und aus dem Originale verkleinert übertragen werden. Die weitere Ausführung der verkleinerten Zeichnung erfolgt entweder genau nach dem vorliegenden Originale oder nach für jeden einzelnen Fall gegebenen Vorschriften.

Bei der Verkleinerung größerer Karten würde die Anwendung des Reduktionszirkels zuviel Zeit in Anspruch nehmen. Man wendet deshalb für solche Arbeiten ein eigenes Instrument, den **Pantographen** oder **Storchschnabel** an, mit welchem insbesondere für die Zwecke der forstlichen Kartierung aus den Wirtschaftskarten die Bestandeskarten hergestellt werden.

Sollte es sich darum handeln, eine Karte mit dem Reduktionszirkel zu vergrößern, so ist der Vorgang der umgekehrte wie beim Verkleinern; man wird also mit den kurzen Schenkeln am Originale abgreifen und mit dem Hauptzirkel sodann die Übertragung vornehmen. Auch mit dem Pantographen läßt sich das Vergrößern vornehmen.

V. Kapitel.

Die Berechnung des Flächeninhaltes von Grundstücken.

Bei der Berechnung der Fläche von aufgenommenen Figuren haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, und zwar:

1. Berechnung der Fläche von Grundstücken unmittelbar aus den in der Natur gemachten Messungen ohne vorausgegangene Anfertigung einer Karte.

2. Berechnung der Fläche von Grundstücken aus der Karte oder dem Plane.

§ 23. Berechnung der Fläche von Grundstücken unmittelbar aus den Messungen in der Natur.

1. **Einfache Flächen**, die nur unter Zugrundelegung einer Aufnahmsachse vermessen wurden, ermittelt man, indem man die durch die Abszissen und Ordinaten gebildeten Dreiecke und Trapeze separat berechnet und ihre Flächeninhalte addiert.

So besteht beispielsweise die Vermessungsfläche in Fig. 236, Seite 247, aus den Dreiecken *I, IV, V, VIII* und aus den Trapezen *II, III, VI, VII.* Nachdem sowohl in jedem Dreiecke die Grundlinie und Höhe, als auch in jedem Trapeze die beiden parallelen Seiten und die Höhe bekannt sind, so ergibt sich die Gesamtfläche $F = 16{\cdot}73 \,.\, \frac{15{\cdot}24}{2} + 22{\cdot}77 \,.\, \frac{17{\cdot}38}{2} + 8{\cdot}04 \,.\, \frac{10{\cdot}41}{2} + 9{\cdot}22 \,.\, \frac{12{\cdot}40}{2} + \frac{15{\cdot}24 + 11{\cdot}26}{2} \,.\, 31{\cdot}33 + \frac{11{\cdot}26 + 17{\cdot}38}{2} \,.\, 14{\cdot}21 + \frac{10{\cdot}41 + 15{\cdot}00}{2} \,.\, 26{\cdot}98 + \frac{15{\cdot}00 + 12{\cdot}40}{2} \,.\, 40{\cdot}80 = 1944{\cdot}7167\, m^2 = 0{\cdot}1945\, ha.$

2. **Bei etwas größeren Grundstücken oder Grundstückkomplexen**, die vermittels der Einlegung eines Netzes aufgenommen wurden, wird die Fläche nach demselben Gedankengange berechnet, welcher der Vermessung zugrunde liegt, d. h. es wird vorerst die Berechnung der Fläche des Netzes vorgenommen und sodann die Fläche der übrigen über dem Netze sich aufbauenden Figuren, welche, je nachdem sie innerhalb oder außerhalb des Netzes liegen, von der Fläche des Netzes abzuziehen oder demselben zuzuzählen sind. In dem nebenstehenden Beispiele, Fig. 300, hat man also vorerst die Fläche des Hauptdreieckes *I*, dann jene der Dreiecke zweiter Ordnung *II, III, IV* zu berechnen, ehe man an die Flächen-

berechnung der durch die Beziehung der Detailpunkte auf die einzelnen Dreieckseiten als Aufnahmsachsen gebildeten kleinen Dreiecke und Trapeze schreitet. In diesem Falle wären zu der Summe der Flächen der Netzdreiecke $I + II + III + IV$ die Flächen der Dreiecke und Trapeze über den Netzlinien *1—4*, *8—10*, *10—14*, *14—16* zu addieren, die Flächen über den Netzlinien *4—8* und *16—1* hingegen von derselben zu subtrahieren, um die Fläche des ganzen großen Komplexes zu erhalten.

Während die Flächenberechnung der über den einzelnen Netzlinien gelegenen Dreiecke aus Grundlinie und Höhe stattfinden kann, ist es nicht möglich, bei der Berechnung des Flächeninhaltes der Netzdreiecke diesen Vorgang einzuschlagen, denn wir haben von diesen Netzdreiecken in der Natur nicht die Grundlinie und Höhe, sondern die drei Seiten

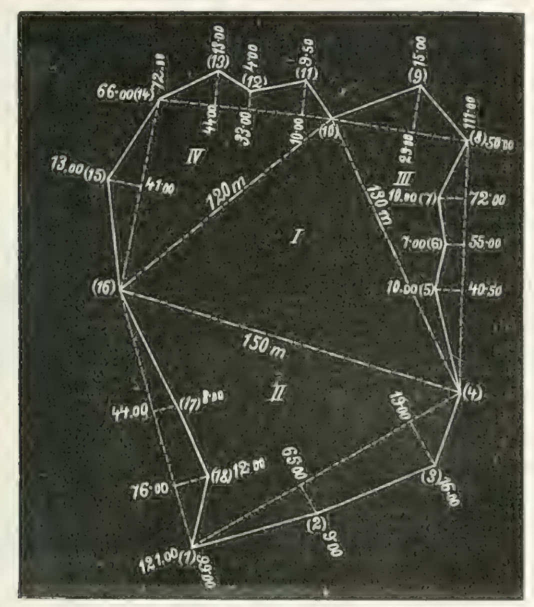


Fig. 300.

jedes Netzdreieckes gemessen. Wir benützen daher zur Berechnung der Fläche der Netzdreiecke die Flächenformel für das Dreieck aus den drei Seiten, wie diese Seite 147 näher erklärt wurde.

Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnet man sich jede einzelne Figur, wenigstens die größeren derselben mit römischen Ziffern und stellt sich die Resultate der Rechnungen in einer Tabelle nach folgendem Muster zusammen.

Der Ansatz „Doppelte Fläche" scheint aus folgendem Grunde auf: Bei der Berechnung von Dreiecken und Trapezen aus Grundlinie und Höhe, beziehungsweise aus den beiden parallelen Seiten und der Höhe müßte man in jedem einzelnen Falle eine Division mit 2 durchführen. Um nun diese oftmalige Arbeit zu ersparen, läßt man die Division bei jedem einzelnen Dreiecke und Trapeze weg, schreibt also den doppelten Inhalt an und dividiert erst das gesamte Resultat durch 2, wodurch man an Arbeit erspart.

Eine Flächenberechnung kann als hinreichend genau angesehen werden, wenn sie mit einem zweiten, auf Grundlage eines anderen Arbeitsvorganges erhaltenen Resultate bis auf $\frac{1}{200}$ bis $\frac{1}{300}$ des gefundenen Inhaltes übereinstimmt.

„Berechnung der Fläche in Fig. 300."

Fortlauf. Nr.	Bezeichnung der Dreiecke und Trapeze	Ansatz	Doppelte Fläche		Einfache Fläche		Anmerkung
			+	—	+	—	
		I. Berechnung des Netzes.					
1	I	$\sqrt{200.(200-150).(200-130).(200-120)}$	.	.	7483	.	
2	II	$\sqrt{185.(185-150).(185-121).(185-99)}$	.	.	5970		
3	III	$\sqrt{145·5.(145·5-130).(145·5-111).(145·5-50)}$	.	.	2726	.	
4	IV	$\sqrt{129.(129-120).(129-66).(129-72)}$	.	.	2042	.	
		Summe I			18221	.	
		II. Berechnung der Detaildreiecke und Trapeze.					
5	1, 2, 2′	(121·00—65·00) . 9·00	504·00	.	.	.	
6	2, 3, 3′, 2′	(9·00 + 16·00) . (65·00 — 19·00) . . .	1150·00	.	.	.	
7	3, 4, 3′	19·00 . 16·00	304·00	.	.	.	
8	4, 5′, 5	40·50 . 10·00	.	405·00	.	.	
9	5′, 6′, 6, 5	(10·00 + 7·00) . (55·00—40·50)	.	246·50	.	.	
10	6′, 7′, 7, 6	(7·00 + 10·00) . (72·00—55·00)	.	289·00	.	.	
11	7′, 8, 7	(111·00—72·00) . 10·00	.	390·00	.	.	
12	8, 9, 9′	(50·00—29·00) . 15·00	315·00	.	.	.	
13	9, 10, 9′	29·00 . 15·00	435·00	.	.	.	
14	10, 11, 11′	10·00 . 9·50	95·00		.	.	
15	11, 12, 12′, 11′	(9·50 + 4·00) . (33·00—10·00)	310·50	.	.	.	
16	12, 13, 13′, 12′	(4·00 + 13·00) . (44·00—33·00)	187·00	.	.	.	
17	13, 14, 13′	(66·00—44·00) . 13·00	286·00	.	.	.	
18	14, 15, 15′	(72·00—41·00) . 13·00	403·00	.	.	.	
19	15, 16, 15′	41·00 . 13·00	533·00	.	.	.	
20	16, 17, 17′	44·00 . 8·00	.	352·00	.	.	
21	17, 18, 18′, 17′	(8·00 + 12·00) . (76·00—44·00)	.	640·00	.	.	
22	18, 1, 18′	(99·00—76·00) . 12·00	.	276·00	.	.	
		Summe II	4522·50	2598·50	2261·25	1299·25	
		dazu Summe I			18221·00		
		+ und — Gesamtfläche			20482·25	1299·25	
		Gesamtfläche (Differenz):			1·9183 *ha*		

In die Spalte mit dem + Zeichen kommen jene Flächen, welche zu addieren, in die mit — überschriebene Spalte jene, die zu subtrahieren sind.

§ 24. Berechnung der Fläche von Grundstücken aus der Karte oder dem Plane.

I. Ohne Anwendung besonderer Instrumente.

Soll die Fläche eines Grundstückes auf der Karte, beispielsweise eines solchen von der Form in Fig. 300 berechnet werden, so geht man in derselben Weise vor, wie dies im vorhergehenden auseinandergesetzt wurde. Man teilt nämlich das Grundstück durch Ziehen von Hilfslinien auf dem Papiere ebenso wie in Fig. 300, nimmt dann die für die obige Berechnung erforderlichen Maße mittels des Zirkels unter Anwendung des betreffenden Verjüngungsmaßstabes ab und führt die Flächenberechnung genau so durch, wie dies in der obigen Tabelle dargestellt ist. Der Unterschied besteht also nur darin, daß man die einzelnen Längen nicht nach der Natur mißt, sondern in der Karte mit dem Zirkel abgreift, was natürlich äußerst genau vorgenommen werden muß.

II. Mit Anwendung von Instrumenten.

Die Flächenberechnung nach dem Plane wird nur bei kleineren Grundstücken und da oft nur in Ermangelung eines dazu gehörigen Instrumentes mit Maßstab und Zirkel vorgenommen. Für gewöhnlich bedient man sich dazu geeigneter Instrumente, der sogenannten Planimeter, von denen das gebräuchlichste und bequemste das Polarplanimeter von Amsler (Fig. 301) ist.

Dasselbe besteht aus zwei Metallarmen, von denen der längere in einer Hülse E verschiebbar, der kürzere aber um eine vertikale Achse C der genannten Hülse drehbar ist. Der kürzere Arm trägt an dem einen Ende eine Nadel D, den sogenannten Pol, und ist dortselbst mit einem Gewichte F beschwert; der längere besitzt am Ende einen Fahrstift A. Wird nun das Instrument auf ein Zeichenpapier gelegt und der Pol D mit der Spitze eingedrückt, so kann man durch Bewegung des Fahrstiftes den langen Schenkel nicht nur um C drehen, sondern durch Bewegung des Fahrstiftes nach vor- oder rückwärts auch den Winkel ACD vergrößern und verkleinern. Bei beiden Bewegungen des Fahrstiftes überträgt sich jedes Maß der Drehung des Schenkels AC auf ein Laufrädchen G, das sich auf einer in den Backen der Metallhülse laufenden Horizontalachse I befindet. Dieses Rädchen ist in der Regel in 100 Teile geteilt, und seine jeweilige

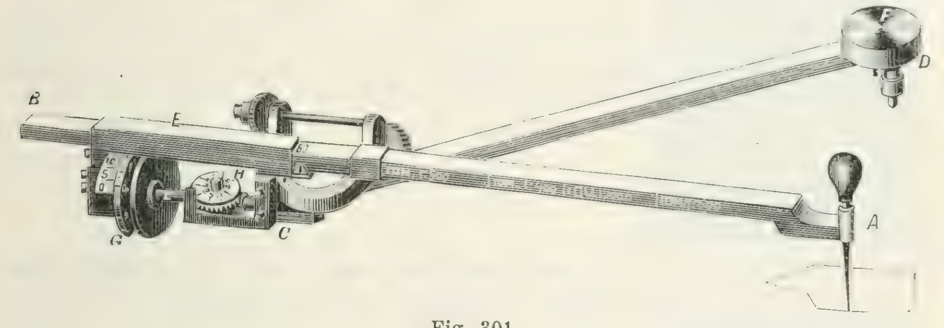


Fig. 301.

Stellung kann an einem ebenfalls auf einer Hülsenbacke befindlichen Zeiger (Nullstrich) genauestens abgelesen werden. Die Bewegung des Laufrädchens überträgt sich noch auf eine Scheibe H, auf der die ganzen Umdrehungen des Laufrädchens ersehen werden können, während man an dem Rädchen selbst nur Bruchteile, und zwar mit Hilfe eines Nonius bis $^1/_{1000}$ einer ganzen Umdrehung abliest.

Das Verfahren bei der Berechnung von Flächen mit dem Planimeter besteht nun darin, daß man die zu ermittelnde Fläche mit dem Fahrstifte umfährt, die Zahl der Ganzen und der Bruchteile der Umdrehungen des Laufrädchens ermittelt und diese Zahl mit einem bestimmten Faktor (Konstante) multipliziert.*) Die Zahl der Umdrehungen des Laufrädchens ermittelt man, indem man den Stand des Laufrädchens und der Scheibe vor dem Umfahren und nach dem Umfahren abliest und zwischen beiden Ablesungen die Differenz bildet. Die Konstante, mit welcher man diese Differenz multiplizieren muß, um die Fläche zu erhalten, ist je nach dem Verjüngungsverhältnisse, in welchem die zu berechnende Fläche gezeichnet ist, verschieden. Um aber ein Planimeter für verschiedene Maßstäbe benützen zu können, sind auf dem langen Arme verschiedene Maßstabmarken eingeritzt, welche mit dem dazugehörigen Maßstabe und der betreffenden Konstanten bezeichnet sind und mit denen eine an der Hülse E befindliche Marke durch Verschieben der Hülse in Übereinstimmung gebracht werden muß, um in dem betreffenden Maßstabe bei Anwendung der beigeschriebenen Konstanten arbeiten zu können.

Sollte auf dem langen Schenkel für einen weniger oft vorkommenden Maßstab eine Marke nicht vorhanden sein, so ermittelt man bei einer gegebenen Stellung der beiden Arme des Instrumentes die Konstante wie folgt: Man zeichnet in dem vorliegenden Maßstabe mit dem Zirkel unter Zuhilfenahme von Dreiecken ein Quadrat von genügender Größe, z. B. 20 *ha*, umfährt dieses Quadrat mit dem Planimeter und macht die Anfangs- und Schlußablesung. Ist die bezügliche Differenz $= d$, so muß nach dem Grundprinzipe der Berechnung mit dem Planimeter diese Differenz multipliziert mit der

*) Hiebei muß sich der Pol außerhalb der umfahrenen Fläche befinden.

unbekannten Konstanten x die Fläche von $20\,ha$ ergeben. Es muß also $d\,.\,x = 20\,ha$ sein, woraus sich $x = \frac{20}{d}$ leicht berechnen läßt.

Bei der praktischen Ausführung von Flächenberechnungen mit dem Planimeter umfährt man eine Figur gewöhnlich zwei- bis dreimal und nimmt aus den erhaltenen Ablesungen, wenn sie gegenseitig nicht erheblich differieren (4 bis 5 Einheiten der letzten Stelle), das arithmetische Mittel. Auch hiebei legt man, wenn viele Berechnungen auf der Karte vorzunehmen sind, eine eigene Berechnungstabelle von folgender Form an:

Konstante = 0·002

Laufende Nr.	Parzelle	Ablesung zu Beginn des Umfahrens	Ablesung am Schlusse des Umfahrens	Differenz	Fläche *ha*	Anmerkung
1.	3	5341	6479	1138	2·276	
2.	$\frac{24}{2}$	2461	3794	1333	2·666	
3.	$\frac{214}{4}$, 17, 7, $\frac{9}{8}$	4976	7864	2888	5·776	

Der Geübtere kann leicht eine Armstellung (durch öfteres Probieren) finden, bei welcher die Differenz der Ablesungen direkt die Fläche gibt.

VI. Kapitel.

Das Wesentlichste über die Teilung von Grundstücken und die Geradelegung von Grenzen.

§ 25. Über die Teilung der Grundstücke.

Für den Forstschutzmann in seiner Eigenschaft als technisches Hilfsorgan können Teilungen von Grundstücken durch Abstecken von in der Natur sichtbaren Linien in den einfachsten Fällen vorkommen bei der Einteilung von Forstgärten (Pflanzschulen), bei der losweisen Verpachtung kleiner landwirtschaftlicher Grundstücke, bei der Einteilung von Schlägen, welche zwecks Waldfeldbaues*) in größeren oder kleineren Losen an Parteien abgegeben werden, bei der Grasnutzung in Schlägen u. dgl. Die Aufgaben über die Teilung von Grundstücken lassen sich nur in den allereinfachsten Fällen direkt in der Natur ausführen. In den meisten Fällen ist es erforderlich, von dem zu teilenden Grundstücke einen Plan in tunlichst großem Maßstabe zu verfassen, auf diesem die geometrische Teilung durchzuführen und die erhaltenen Punkte nun in die Natur zu übertragen.

1. Aufgabe: Ein rechteckiges Grundstück ist parallel zu seiner Längsseite *a)* in drei flächengleiche Teile, *b)* in drei Teile so zu teilen, daß sich die Teilungsflächen wie 3 : 4 : 5 verhalten.

a) Man bildet die drei flächengleichen Parallelstreifen dadurch, daß die Breite in drei gleiche Teile geteilt wird und von den Teilungs-

*) Unter Waldfeldbau versteht man das Bebauen von Schlagflächen mit landwirtschaftlichen Früchten bei gleichzeitiger oder erst nachfolgender Forstkultur.

punkten Parallele zur Längsseite gezogen werden. In der Natur steckt man die Parallelen durch Absteckstäbe an den beiden Breitseiten ab und sucht durch Einvisieren nach der Mitte Zwischenpunkte.

b) Die Breite der einzelnen Parallelstreifen findet man hier nach der Gesellschaftsrechnung. Die Breite B des Rechteckes ist im ganzen in zwölf Teile zu teilen, so daß ein Teil $\frac{B}{12}$ ist. Auf den ersten Streifen entfallen sodann $3 \cdot \frac{B}{12}$, auf den zweiten $4 \cdot \frac{B}{12}$ und auf den dritten $5 \cdot \frac{B}{12}$. Diese so erhaltenen Maße mißt man auf beiden Breitseiten ab, steckt nach dem ersten und zweiten Streifen auf beiden Breitseiten je einen Absteckstab und visiert nun inmitten Zwischenpunkte ein.

2. Aufgabe: Ein dreieckiges Grundstück ist *a)* in zwei gleiche Teile, *b)* in drei Teile, deren Flächen im Verhältnisse von 3 : 4 : 5 stehen, so zu teilen, daß die Teilungslinien durch den Scheitel C gehen. (Fig. 302 und 303.)

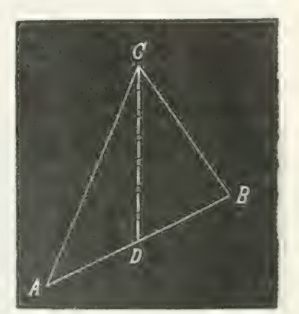


Fig. 302.

a) Die Lösung dieser Aufgabe beruht auf dem Satze, daß Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe auch dieselbe Fläche haben.*) Wenn man daher die Basis AB (Fig. 302) halbiert und den Halbierungspunkt mit C verbindet, so müssen die beiden Dreiecke ADC und DBC flächengleiche Teile vom ganzen Dreiecke sein, denn beide Dreiecke haben eine gleichlange Basis und dieselbe Höhe.

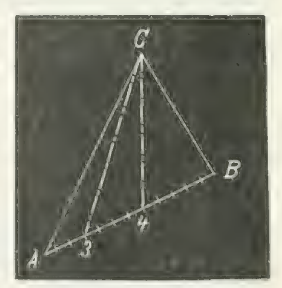


Fig. 303.

b) Die Lösung dieser Aufgabe beruht auf dem unter *a)* genannten geometrischen Satze und der Anwendung der Gesellschaftsrechnung. Man denkt sich hienach im ganzen $3 + 4 + 5 = 12$ Teildreiecke von der Gesamtfläche in der Art gebildet, daß die Basis AB (Fig. 303) in zwölf gleiche Teile geteilt und jeder Teilungspunkt mit C verbunden wird. Die dadurch entstehenden zwölf Dreiecke sind flächengleich, denn sie haben je eine gleichlange Basis und dieselbe Höhe. Faßt man nun einmal drei, dann vier und fünf solcher Dreiecke in je eines zusammen, wie dies die Linien $3C$ und $4C$ anzeigen, so erhält man die geforderten Dreiecksteile im Flächenverhältnisse 3 : 4 : 5.

Die Aufgaben 2 *a)* und 2 *b)* lassen sich direkt in der Natur ausführen.

Beispiel: Die Fläche von $\triangle ABC = 1{\cdot}25\,ha$, $AB = 228{\cdot}2\,m$. Wie groß sind die Strecken $A3$, 34, $4B$ und die Flächen der Teildreiecke?

3. Aufgabe: Von einem Dreiecke von der Fläche F ist ein beliebig großes Flächenstück f abzuschneiden, *a)* wenn die Teilungslinie durch einen Eckpunkt, *b)* wenn die Teilungslinie durch einen bestimmten Punkt einer Seite gehen soll.

a) Soll die Teilungslinie durch C gehen, Fig. 304, und das abzuschneidende Dreieck die Seite AC, deren Länge durch Messung ermittelt

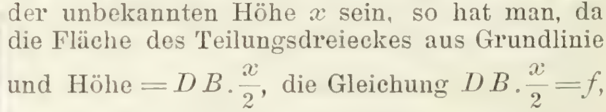
*) Siehe Geometrie Seite 146.

wird, zur Basis haben, so hat man über dieser Basis ein Dreieck von einer unbekannten Höhe x zu suchen, dessen Fläche f ist. Es besteht also, da der Flächeninhalt des abzuschneidenden Dreieckes aus Basis und Höhe $= AC \cdot \frac{x}{2}$, die Gleichung $AC \cdot \frac{x}{2} = f$, folglich $\frac{x}{2} = \frac{f}{AC}$, und $x = \frac{2f}{AC}$. Hat man hienach die unbekannt gewesene Höhe bestimmt, so errichtet man in A und C je eine Senkrechte von der Länge x, steckt die dadurch gegebene Linie ac mittels Absteckstäben ab und bestimmt ihren Schnitt mit der Dreieckseite AB in D wie in Aufgabe 4, Seite 222. Die Linie CD ist sodann die richtige Teilungslinie, denn, wie aus Fig. 304 zu ersehen ist, hat das Dreieck ACD die gesuchte Länge x zur Höhe.

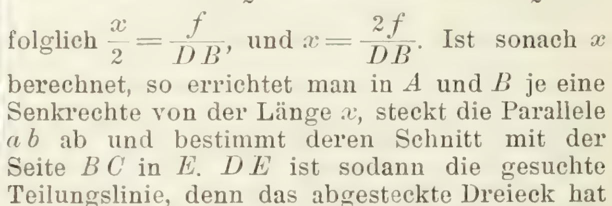
Fig. 304.

Beispiel: $\triangle ACD = 0{\cdot}66\,ha$, $AC = 331{\cdot}5\,m$; wie groß ist x?

b) Soll die Teilungslinie durch den Punkt D gehen, Fig. 305, und die abgemessene Strecke DB die Basis des abzutrennenden Dreieckes von



der unbekannten Höhe x sein, so hat man, da die Fläche des Teilungsdreieckes aus Grundlinie und Höhe $= DB \cdot \frac{x}{2}$, die Gleichung $DB \cdot \frac{x}{2} = f$,



folglich $\frac{x}{2} = \frac{f}{DB}$, und $x = \frac{2f}{DB}$. Ist sonach x berechnet, so errichtet man in A und B je eine Senkrechte von der Länge x, steckt die Parallele ab ab und bestimmt deren Schnitt mit der Seite BC in E. DE ist sodann die gesuchte Teilungslinie, denn das abgesteckte Dreieck hat DB zur Basis und die Strecke x zur Höhe, weshalb seine Fläche $= f$.

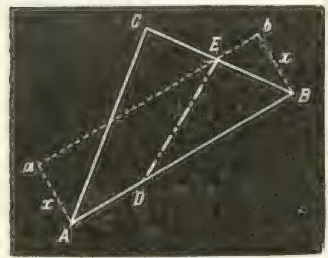


Fig. 305.

Beispiel: $f = 0{\cdot}35\,ha$, $DB = 97{\cdot}35\,m$; wie groß ist x?

4. Aufgabe: Das Trapezoid $ABCD$ ist in zwei Teile im Verhältnisse von $1:3$ zu teilen, wobei die Teilungslinie durch die Eckpunkte B und D gehen soll, Fig. 306.

Die Lösung dieser Aufgabe ist dieselbe wie in Aufgabe 2 *b)*. Man teilt nämlich AC in vier Teile und zieht in $\frac{AC}{4}$, d. i. im Punkte E die Linien DE und BE. Es ist dann nämlich $AED = \frac{1}{4}$ von ACD und $AEB = \frac{1}{4}$ von ACB.

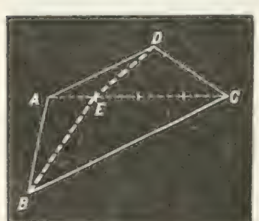


Fig. 306.

5. Aufgabe: Von der Figur $ABCD$, Fig. 307, soll ein Trapez $ABdc$ von dem bestimmten Inhalte $f = 0{\cdot}80\,ha = 8000\,m^2$ abgeschnitten werden. AB wurde mit $167{\cdot}50\,m$ gemessen.

Die Lösung geschieht mittels einer Näherungsmethode wie folgt: Wir denken uns die abzuschneidende Fläche vorläufig als ein Rechteck von der Länge AB und einer noch unbekannten Höhe x und stellen den Ansatz für die Fläche dieses Rechteckes aus Länge und Breite gleich der abzuschneidenden Fläche f. In unserem Falle besteht dann die

Gleichung: $167{\cdot}50 \,.\, x = 8000$, woraus $x = \frac{8000}{167{\cdot}50} = 47{\cdot}76\,m$. Trägt man nun die so berechnete Höhe x in A und B auf und zieht die Parallele $a'b'$, so schneidet die letztere von dem Vierecke $ABCD$ das Flächenstück $ABba$ ab, welches kleiner ist als die wirklich abzuschneidende Fläche f, denn diese ist ja so groß wie das Rechteck $ABb'a'$. Es muß sonach zu dem Trapeze $ABba$ noch ein Parallelstreifen hinzugegeben werden, welcher so groß ist, wie die Flächendifferenz zwischen f und $ABba$. Um diese zu erhalten, mißt man ab, in unserem Falle z. B. mit $146{\cdot}50\,m$, berechnet hierauf die Fläche von $ABba$ mit $\frac{167{\cdot}50 + 146{\cdot}50}{2} \,.\, 47{\cdot}76 = 7498\,m^2$ und hat dann in $8000 - 7498 = 502\,m^2$ die gesuchte Differenz oder den noch hinzuzugebenden Flächenstreifen. Stellt man sich den letzteren abermals als ein Rechteck von einer unbekannten Höhe y vor, so besteht die weitere Gleichung $146{\cdot}50 \,.\, y = 502$, woraus $y = \frac{502}{146{\cdot}50} = 3{\cdot}43\,m$ ist. Wird sodann y von a und b aus aufgetragen und die Teilungslinie cd gezogen und abgemessen, in unserem Falle mit $145{\cdot}08\,m$, so beträgt der wirkliche Inhalt des hinzugekommenen Flächenstreifens als Trapez berechnet $\frac{146{\cdot}50 + 145{\cdot}08}{2} \,.\, 3{\cdot}43 = 500{\cdot}06\,m^2$, welche Fläche gegenüber der hinzuzugebenden von $502\,m^2$ um die belanglose Fläche von $1{\cdot}94\,m^2$ zu klein ist. Es wird daher die Linie cd als die richtige Teilungslinie angesehen. Sollte aber bei der Anreihung des Streifens von der Höhe y die Teilungslinie noch nicht hinreichend genau liegen, so wird in der gleichen Weise noch ein dritter Streifen angereiht.

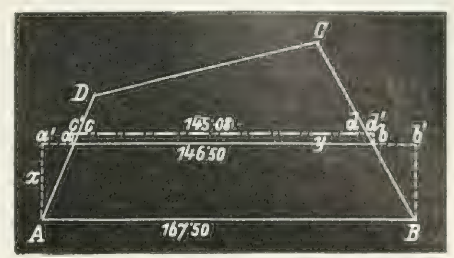


Fig. 307.

Es ist selbstverständlich, daß zur Durchführung einer solchen Teilung wie im vorliegenden Beispiele von dem Grundstücke ein genauer Plan aufgenommen werden muß, auf welchem die Teilung vorgenommen wird. Die gefundenen Punkte c und d werden dann nach den Abmessungen am Plane im Wege der Einbindemethode in die Natur übertragen.

6. Aufgabe: Ein Polygon vom Inhalte F soll in drei Teile von den Inhalten f_1, f_2, f_3 zerlegt werden, so daß die Teilungslinien zu einer angenommenen Linie parallel gehen, Fig. 308.

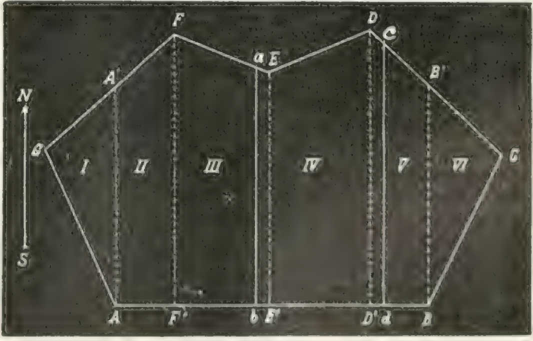


Fig. 308.

Man macht eine genaue Aufnahme von dem Grundstücke und trägt sie in einem möglichst großen Maßstabe auf. Alsdann zieht man in der Zeichnung von sämtlichen Eckpunkten Parallele zu der gewünschten Richtung der Teilungslinie NS und zerlegt hiedurch das Polygon in

die Dreiecke und Trapeze *I*, *II*, *III* usw. Nun berechnet man durch Abgreifen der erforderlichen Bestimmungsstücke mit dem Zirkel die Fläche der einzelnen Dreiecke und Trapeze, deren Summe bei richtiger Berechnung gleich F sein muß.*) Alsdann sieht man nach, wieviele von den berechneten Dreiecken und Trapezen zu nehmen sind, um die Fläche f_1 zu erhalten. Wäre die Summe von $I + II$ kleiner und $I + II + III$ größer als f_1, so wird die erste Teilungslinie ab innerhalb des Trapezes *III* liegen müssen. Um die Fläche von $I + II$ auf jene von f_1 zu bringen, muß man zu der ersteren Summe jene Fläche dazugeben, um welche $I + II$ kleiner ist als f_1, d. h. man muß die Differenz zwischen f_1 und $I + II$ noch hinzugeben. Man tut dies im Wege der Näherungsmethode in Aufgabe 5 und erhält sonach die richtige Teilungslinie ab. In gleicher Weise teilt man von *VI* ausgehend die Fläche f_3 ab und erhält hiedurch die richtige Teilungslinie cd. Zur Kontrolle der richtig ausgeführten Teilung berechnet man alsdann noch die Fläche $a\,b\,E'\,D'\,d\,c\,D\,E$ und überträgt schließlich im Wege der Einbindemethode die gefundenen Punkte a, b, c, d in die Natur.

7. Aufgabe: Von dem Grundstücke $ABCDEFG$, Fig. 309, ist vom Punkte B ausgehend eine Fläche $F = 0{\cdot}9850\,ha$ abzuschneiden.

Aufnahme des Grundstückes und Verfassung eines Planes wie bei Aufgabe 6. Ziehen der Diagonalen und Berechnen der Flächen der entstandenen Dreiecke nach dem Plane. Addieren der Flächen zweier oder mehrerer Dreiecke, ähnlich wie in Aufgabe 6, um zu ersehen, innerhalb welchen Dreieckes die Teilungslinie zu liegen kommt. Ist hienach $I + II = 8530\,m^2$, so ist vom Dreiecke *III* noch eine Dreiecksfläche von $9850 - 8530 = 1320\,m^2$ hinzuzugeben, um auf die ganze abzuschneidende Fläche zu kommen. Um vom Dreiecke *III* die Fläche von $1320\,m^2$ abzuschneiden, geht man nach Aufgabe 3 *a)* vor. Ist $BF = 148{\cdot}25\,m$, so findet man die unbekannte Höhe des zu

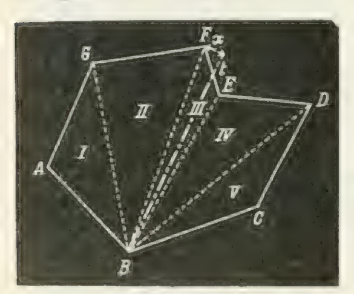


Fig. 309.

I und *II* noch hinzuzugebenden Dreieckes aus der Gleichung $1320 = 148{\cdot}25 \,.\, \frac{x}{2}$, woraus $\frac{x}{2} = \frac{1320}{148{\cdot}25}$ und $x = \frac{2\,.\,1320}{148{\cdot}25} = 17{\cdot}81\,m$ ist. Nun errichtet man in F eine Senkrechte, längt diese auf $17{\cdot}81\,m$ ab und zieht eine Parallele zu BF so weit, bis sie die EF in t schneidet. t ist der gesuchte Teilpunkt, der nach Abmessung der Strecke Et auf der Zeichnung in der Natur von E aus eingebunden wird.

Zusatz. Die vorstehenden Flächenteilungen setzen voraus, daß die Bodengüte oder die Bonität des zu teilenden Grundstückes durchaus gleich ist. Ist dies nicht der Fall und sind also mehrere Bonitätsklassen in dem zu teilenden Grundstücke vereinigt, so wird anstatt der Fläche der einzelnen Teile deren Wert in die Rechnung eingeführt wie das folgende Beispiel zeigt.

*) Ist diese Summe um einen zulässigen Fehler, z. B. $12\,m^2$, gegenüber der Zahl F zu klein, so verteilt man diesen Fehler im Sinne der Teilregel auf die einzelnen Dreiecks- und Trapezflächen. Man sagt: Auf die Fläche F entfällt ein Fehler von $12\,m^2$, folglich auf die Flächeneinheit ein Fehler von $\frac{12}{F}$ und auf die Fläche I ein Fehler von $\frac{12}{F} \,.\, I$, auf die Fläche II ein Fehler von $\frac{12}{F} \,.\, II$ usw. Addiert man nun die auf die einzelnen Dreiecke und Trapeze entfallenden Fehleranteile zu den berechneten Flächen, so bekommt man die als richtig anzunehmenden Flächen, deren Summe gleich F sein muß.

Drei Käufer A, B und C haben zusammen ein aus je einem Streifen Feld, besserer Wiese und schlechterer Wiese, bestehendes Grundstück, Fig. 310, unter der Annahme gekauft, daß das Feld pro 1 ha einen Wert von 2000 K, die bessere Wiese einen solchen von 1800 K und die geringere Wiese einen Wert von 1500 K besitze. Die Käufer wollen das Grundstück so unter sich teilen, daß A seinen Anteil aus dem Streifen I und der Ergänzung aus II, B seinen Anteil aus II und C seinen Teil aus dem Reste von II und aus der ganzen Fläche III erhalte. Der Wert des Feldstreifens ist bei der eingeschriebenen Flächengröße $0·5550 \times 2000\,K = 1110\,K$, jener der besseren Wiese $1·2150 \times 1800\,K = 2187\,K$ und jener der schlechteren Wiese $0·6050 \times 1500\,K = 907·5\,K$. Der Gesamtwert des Grundstückes ist $1110 + 2187 + 907·5 = 4204·5\,K$, somit der auf einen Käufer entfallende Wert $= \frac{4204·5\,K}{3} = 1401·5\,K$. Der Flächenstreifen I ist 1110 K wert, daher muß A noch einen Wert aus II von $1401·5\,K - 1110\,K = 291·5\,K$ dazu erhalten. In II entspricht ein Wert von 291·5 K einer Fläche von $291·5 : 1800 = 0·1619\,ha$, welche nun im Wege der Näherungsmethode von Aufgabe 5 zu I hinzuzugeben ist. Von II bleibt alsdann noch ein Wert von $2187\,K - 291·5\,K = 1895·5\,K$ übrig. Da aber II nur auf einen Grundstückwert von 1401·5 K Anspruch hat, so kommt von II noch an C ein Wert von $1895·5\,K - 1401·5\,K = 494\,K$, entsprechend einer Wiesenfläche von $494 : 1800 = 0·2744\,ha$, welche nun zu III nach der genannten Näherungsmethode hinzugeschlagen wird.

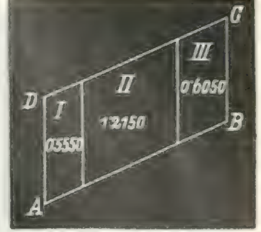


Fig. 310.

§ 26. Über die Geradelegung der Grenzen.

1. **Aufgabe:** Die beiden Grundstücke I und II, Fig. 311, sind durch die gebrochene Grenze $a\,b\,c$ getrennt. Diese Grenze ist auf Verlangen beider Besitzer gerade zu legen.

a) Lösung mittels einer Näherungsmethode. Man nimmt die Grenze $a\,b\,c$, sowie die anliegenden Seiten $A\,E$ und $B\,C$ auf und verzeichnet sie auf dem Plane. Auf diesen zieht man eine Linie $d'\,e'$ so, daß die Teile, welche durch diese Linie dem Grundbesitzer II von I her zufallen, nach dem Augenmaße gleich groß erscheinen mit jenen Teilen, welche dem Grundbesitzer I von II herzufallen, mit anderen Worten, daß nach dem Augenmaße $\triangle f\,g\,b = \triangle\,a\,f\,d' + \triangle\,g\,c\,e'$. Nun berechnet man diese abgeschnittenen Dreiecke und sieht nach, inwieweit diese Annahme zutrifft. Ist beispielsweise das $\triangle\,f\,g\,b$ um die Fläche f kleiner als die beiden an I gefallenen Dreiecke, so muß die Teilungslinie um ein Stück nach abwärts gerückt werden. Die Größe dieses Stückes kann vorerst näherungsweise aus einem Rechtecke von der Basis $d'\,e'$ und einer unbekannten Höhe x gefunden werden. Es ist $d'\,e' \,.\, x = f$ und $x = \frac{f}{d'\,e'}$.

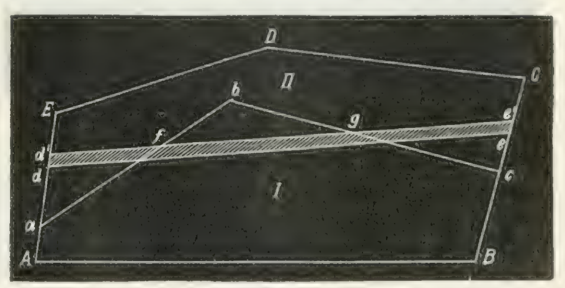


Fig. 311.

Man zieht nun im Abstande x die Linie $d\,e \parallel d'\,e'$ und berechnet die Dreiecke nochmals. Ist das mittlere Dreieck noch immer nicht so groß, wie die beiden seitlichen zusammengenommen, so nimmt man eine abermalige Verschiebung der Teilungslinie vor.

b) Lösung auf rein konstruktivem Wege (Fig. 312). Man verbindet auf der wie bei *a)* angefertigten Zeichnung a mit c und zieht zu dieser Verbindungslinie in b eine Parallele bis Punkt d. Die Linie $a\,d$ ist die

gesuchte neue Grenze, denn es ist nach dem auf Seite 305 bei Aufgabe 2 *a)* zitierten geometrischen Satze $\triangle\, a\,c\,b = \triangle\, a\,c\,d$. Subtrahiert man auf beiden Seiten der Gleichung . . $\triangle\, a\,c\,e = \triangle\, a\,c\,e$,
so erhält man . . . . $\triangle\, a\,e\,b = \triangle\, e\,c\,d$, d. h. das vom Grundstücke *I* durch die Teilungslinie zum Grundstücke *II* hinzugekommene Flächenstück = dem vom Grundstücke *II* zu dem Grundstücke *I* gekommenen Flächenstücke.

Fig. 312.

Sowohl bei Lösung *a)* als auch bei *b)* ist es nur noch nötig, die Endpunkte der neuen Teilungslinie aus der Zeichnung abzumessen und in die Natur nach der Einbindemethode zu übertragen, worauf das Abstecken der Linie nach der Mitte erfolgen kann.

2. Aufgabe: Wie vor, nur ist hier die Grenze mehrfach gebrochen (Fig. 313).

Die Lösung der Aufgabe geschieht in derselben Weise wie jene der vorhergehenden. Man bringt den Grenzzug zu Papier und schafft einen Winkelpunkt nach dem anderen weg. Behufs Wegschaffung von *b* verbindet man *c* mit *a*, zieht zu dieser Verbindungslinie in *b* eine Parallele und erhält nach Verbindung von *c* mit dem Punkte *f* die neue Grenze *c f* statt *a b c*. Man hat nun den Winkelpunkt *c* wegzuschaffen. Zu diesem Zwecke wird *d* mit *f* verbunden, von *c* aus zu *d f* eine Parallele gezogen und durch die Verbindungslinie *d g* die neue Grenze anstatt des Zuges *f c d* geschaffen. In derselben Weise wird auch der Punkt *d* noch weggeschafft, so daß man schließlich in *e h* die neue geradgelegte Grenze erhält, die nun wie bei Aufgabe 1 in der Natur festgelegt wird.

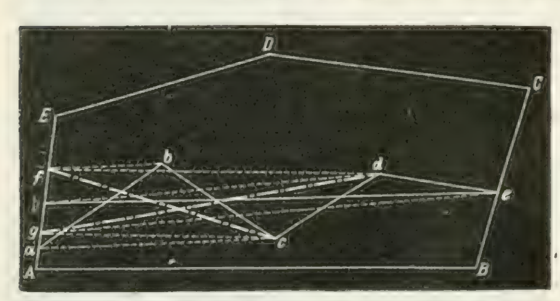


Fig. 313.

Zusatz. Wie in § 19, so sind auch die Aufgaben über die Geradelegung der Grenzen nur dann in der vorstehenden Weise zu lösen, wenn die Güteklasse der Grundstücke zu beiden Seiten der Grenzzüge dieselbe ist. Wäre aber der eine Grund besser als der andere, so wird bei der Ausgleichung der Grenzen ein Näherungsvorgang wie in Aufgabe 1 eingeschlagen, nur stellt man dann nicht die gegenseitig zu- oder abgekommenen Flächengrößen als solche, sondern den Geldwert dieser Flächen einander gegenüber und verschiebt z. B. in Fig. 311 die Teilungslinie so lange, bis der Geldwert von $\triangle\, f\,g\,b$ = dem Geldwerte von $\triangle\, a\,f\,d + \triangle\, g\,c\,e$.

II. Abschnitt.

Die Höhenmeßkunde.

§ 27. Feststellung der nötigen Begriffe.

Zwei Punkte der Erdoberfläche sind gleich hoch, wenn sie vom Mittelpunkte der Erdkugel dieselbe Entfernung besitzen. Auf vollkommen horizontalem Terrain sind daher alle Punkte gleich hoch, auf geneigtem und insbesondere unebenem Terrain aber besitzen die einzelnen Punkte die mannigfachsten Höhenverschiedenheiten.

Im gewöhnlichen Leben versteht man jedoch unter der Höhe eines Punktes nicht seine Entfernung vom Erdmittelpunkte, sondern seinen senkrechten Abstand von einer durch einen anderen, als Nullpunkt angenommenen Punkt, gelegten horizontalen Ebene. Nimmt man als diese horizontale Ebene den Meeresspiegel an, so heißt der senkrechte Abstand irgend eines Punktes von diesem Horizonte seine Seehöhe, Meereshöhe oder seine absolute Höhe.*) Unter der relativen Höhe versteht man den senkrechten Abstand eines Punktes von irgend einer anderen horizontalen Ebene, z. B. bei einem Berggipfel seine Erhebung über die durch den tiefsten Punkt der Talsohle, oder die Oberkante der Eisenbahnschienen im nächsten Stationsgebäude usw. gelegte horizontale Ebene.

Wenn man von der Höhe von Gegenständen spricht, die sich auf der Erdoberfläche befinden, so meint man in der Regel ihre geometrische Höhe, d. h. den vertikalen Abstand ihres Scheitels von der Grundfläche.

Für den Höhenunterschied zweier oder mehrerer Punkte bei Straßen und Wegen, Flüssen und Bächen u. dgl. gebraucht man die Ausdrücke Gefälle und Steigung. Ist die Seehöhe eines Punktes größer als jene eines zweiten, so heißt der Höhenunterschied zwischen beiden Punkten mit Bezug auf den höheren Punkt als Ausgangspunkt das Gefälle vom ersten zum zweiten Punkte und mit Bezug auf den niederen Punkt als Ausgangspunkt die Steigung zwischen beiden Punkten.

Die Höhenmeßkunde hat, wie schon in der Einleitung gesagt wurde, die Aufgabe, die Höhenunterschiede gegebener Punkte zu ermitteln. Für diese Ermittlung sind zwei Fälle zu unterscheiden. In dem einen Falle nimmt man zwischen dem höchsten und niedrigsten Punkte eine Anzahl von Zwischenpunkten an, mißt durch Legen von horizontalen Visierebenen durch jeden einzelnen Punkt immer direkt den senkrechten Abstand zweier aufeinander folgender Punkte und vergleicht die einzelnen Abstände sowohl gegeneinander als auch den Abstand jedes Zwischenpunktes von einer gewissermaßen als Ausgangspunkt ange-

*) In Österreich werden die absoluten Höhen aller Punkte auf den Meeresspiegel bei Triest bezogen.

nommenen Horizontalebene (Niveauebene). Man nennt diese Höhenbestimmungsmethode das Nivellieren und die dabei zu verrichtende Arbeit ein Nivellement.

Im zweiten Falle mißt man den fraglichen Höhenunterschied nicht direkt, sondern man berechnet denselben aus anderen gemessenen oder beobachteten Bestimmungsstücken auf Grund geometrischer oder physikalischer Sätze. Der hiebei eingehaltene Vorgang bildet das eigentliche Höhenmessen.

I. Kapitel.

Das Nivellieren oder Abwägen.

§ 28. Die Geräte zum Nivellieren.

Das Nivellieren bedingt nach dem vorhergehenden stets die Herstellung einer horizontalen Visierlinie, von der aus die senkrechten Abstände bis zu dem Bodenpunkte an einer vertikal aufgestellten und in der Regel in Zentimeter geteilten Latte abgelesen werden. Ist hienach der Höhenunterschied, z. B. der Punkte A und B zu bestimmen, Fig. 314, so ist es erforderlich, in A mittels eines Instrumentes eine horizontale Visierlinie herzustellen und soweit zu verlängern, bis sie eine in B aufgestellte Latte trifft. Der Abstand dieses Schnittpunktes s vom Fußpunkte der Latte bezeichnet dann den Höhenunterschied zwischen A und B. Wir bedürfen demnach zum Nivellieren der Nivellierlatten zum Messen der vertikalen Abstände und der eigentlichen Nivellierinstrumente zur Herstellung horizontaler Visierlinien. Neben den eigentlichen Nivellierinstrumenten kommen zuweilen noch einige aushilfsweise erforderliche Neben- oder Hilfsgeräte in Anwendung.

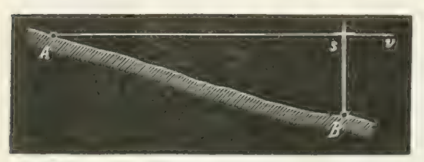


Fig. 314.

I. Die Nivellierlatten.

Man unterscheidet: 1. Nivellierlatten mit Zielscheiben und 2. Nivellierlatten zum Selbstablesen.

1. Eine Nivellierlatte mit Zielscheibe, Fig. 315, besteht aus einer 2·5 bis 3·0 *m* langen, gut gearbeiteten und geölten Latte *l*, deren Hinter- oder Seitenfläche vom Fußpunkte ausgehend mit einer Zentimetereinteilung versehen ist, ferner aus einer kreisrunden Scheibe, der sogenannten Zielscheibe, welche an ihrer Vorderfläche in vier weiß und rot angestrichene Felder geteilt ist und mittels zweier die Latte umfassenden Öhre an derselben auf- und abgeschoben werden kann. An der rückwärtigen Seite trägt die Zielscheibe eine Marke (Index), welche mit dem Zentrum der Scheibe in derselben Höhe liegt, so daß der jeweilige Abstand der Marke vom Fußpunkte genau dem Abstande des Zentrums der Scheibe vom Lattenfußpunkte gleichkommt. Damit die Scheibe an jeder Stelle der Latte festhalte, kann sie durch eine Klemmschraube *k* in der jedesmaligen Stellung an die Latte angezogen werden oder wird durch eine an der Rückseite angebrachte Stahlfeder an die Latte angedrückt.

In vielen Fällen erweist sich die eben beschriebene Latte für die Messung der durch die horizontalen Visierebenen auf der Latte abgeschnittenen Längen als zu kurz, weshalb man gewöhnlich eine Doppelnivellierlatte mit Zielscheibe in Verwendung nimmt. Dieselbe besteht aus zwei Latten *I* und *II*. Die Latte *I* ist mit *II* durch zwei Metallhülsen *m* und *m'* so verbunden, daß sie an *II* auf- und abgeschoben und an jeder beliebigen Stelle mittels der Klemmschraube *K* festgehalten werden kann. Wenn die Latte *I* aus den Hülsen herausgezogen ist und für sich allein gebraucht wird, so dient sie zur Bestimmung der an der Nivellierlatte abzulesenden Vertikalabstände bis zu 2·2 *m*. Für größere Vertikalabstände wird die Latte *I* durch die Hülsen an *II* gesteckt, die Zielscheibenmarke genau auf 2·2 *m* eingestellt (Fig. 315, *b*) und die Latte *I* längs *II* in die Höhe geschoben. Hat die Zielscheibe den richtigen Stand, d. h. wird ihr Zentrum von der horizontalen Visierlinie getroffen, so wird die Klemmschraube der Hülse *m'* angezogen. Der zu messende Vertikalabstand besteht dann aus der fixen Länge der Latte *I* mehr der Entfernung der Bodenfläche der Latte *II* vom Fußpunkte der Latte *I*. Um diese Summe auf einmal ablesen zu können, ist die Latte *II* von unten nach aufwärts so beziffert, als ob sie eine Fortsetzung der Latte *I* wäre. Die untere Fläche entspricht also der Zahl 2·2 *m* und die folgenden Dezimeter tragen die Bezeichnungen 3, 4, 5, 6 usw. Auf diese Weise kann man Lattenhöhen bis zu 4 *m* ablesen. In unserer Zeichnung ist die Ablesung 2·5 *m*.

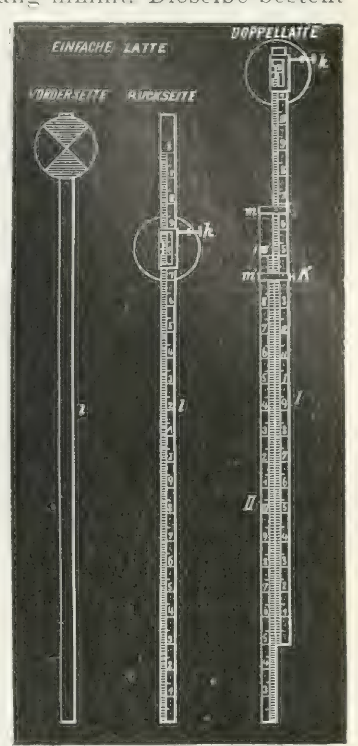


Fig. 315.

2. Nivellierlatten zum Selbstablesen. Dieselben sind nichts anderes als 3·5 bis 4 *m* lange, mit weißer Ölfarbe angestrichene Meßlatten mit einer Handhabe und Zentimeterteilung, an welcher der Schnitt der horizontalen Visierebenen direkt vom Beobachter mittels des Nivellierinstrumentes abgelesen wird. Da dieses Ablesen nur mittels Fernrohren in genauer Weise möglich ist, so leuchtet ein, daß die selbstablesbaren Latten auch nur bei Fernrohrinstrumenten Verwendung finden können, für welche sie heute allerdings die Latten mit Zielscheiben gänzlich verdrängt haben.

II. Die eigentlichen Nivellierinstrumente.

Das Grundprinzip aller Nivellierinstrumente besteht darin, eine horizontale Visierlinie herzustellen. Diese Forderung kann auf dreierlei Art erreicht werden und zwar: 1. mittels eines Lotes (Pendels), auf dessen (vertikaler) Richtung eine Visiervorrichtung senkrecht steht; 2. durch Benützung der Oberfläche ruhig stehender Flüssigkeiten in sogenannten kommunizierenden Röhren, in denen die Flüssigkeitsoberflächen in einer horizontalen Ebene liegen, und 3. durch Verbindung der Libelle (Wasserwage) mit einer Visiervorrichtung. Je nachdem nun

die horizontale Visierlinie auf die eine oder die andere Art hergestellt wird, unterscheidet man: 1. Pendelinstrumente, 2. Röhreninstrumente, 3. Libelleninstrumente.

1. Pendelinstrumente.

Zu den für unsere Zwecke brauchbaren Pendelinstrumenten gehören die Setzlatte und das Bose'sche Nivellierinstrument.

A. Die Setzlatte:

a) Beschreibung. Die Setzlatte, Fig. 316, ist eine Verbindung der Setzwage mit zwei Latten. Sie besteht als Ganzes aus einer 3 bis 4 *m* langen Holzlatte, auf die zur Herstellung der horizontalen Lage eine Setzwage aufgesetzt wird und deren Ende mittels einer einfachen hölzernen Hülse mit Klemmschraube an einer vertikal gestellten Meßlatte verschoben und festgehalten werden kann, sobald die Setzwage die horizontale Lage anzeigt.

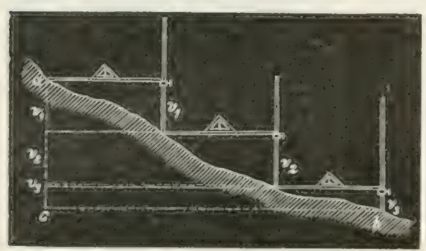


Fig. 316.

In der Praxis hat man anstatt der vollkommenen Setzlatte oft nur zwei Latten mit einer Setzwage oder einer Libelle zur Verfügung, während die Führungshülse mit der Klemmschraube gänzlich fehlt. In diesem Falle wird das Auf- und Niederschieben und das Festhalten der Setzlatte an der Vertikallatte mittels der Hände bewirkt, wobei eine dritte Person gewöhnlich die Ablesung vornimmt.

b) Gebrauch. Ist der Höhenunterschied der Punkte a und b zu ermitteln, so legt man die Setzlatte an den höher gelegenen Punkt a an und verschiebt auf der vertikal gestellten Meßlatte die Setzlatte so lange, bis die Setzwage einspielt, worauf man die Klemmschraube anzieht. Alsdann liest man an der Vertikallatte die Höhe v_1 ab, legt dann die Setzlatte genau an den bisherigen Standpunkt der Vertikallatte von neuem an, bringt die Setzwage zum Einspielen, liest abermals den Höhenunterschied v_2 ab und setzt das Verfahren bis zum Endpunkte b fort. Die Summe aller Ablesungen ergibt den Höhenunterschied zwischen a und b, denn es ist $v_1 + v_2 + v_3 = a\,c$.

c) Prüfung. Eine Setzlatte ist nur dann richtig, wenn die obere schmale Längsfläche eben und mit der unteren parallel ist. Ist dies nicht der Fall, dann steht die untere Fläche nicht horizontal, wenn die obere horizontal gerichtet wird und man erhält dann entweder ein zu kleines oder zu großes Resultat, je nachdem das dickere Ende vorne oder hinten sich befindet. Die Parallelität prüft man durch genaues Abmessen der Abstände der beiden Längsflächen an verschiedenen Punkten.

B. Das Bose'sche Nivellierinstrument.

Dieses Instrument eignet sich sowohl zum Nivellieren als auch zum Messen von Baumhöhen. Für den ersteren Zweck stellt dasselbe wie alle Pendelinstrumente eine vertikale Richtung selbst her, auf welcher dann eine Visiervorrichtung senkrecht steht, die alsdann die horizontale Lage einnimmt.

a) Beschreibung. Ein rechteckiger Messingrahmen $ABCD$, Fig. 317, ist in der Mitte des oberen Streifens AB an einem in dem Stockstative SS befindlichen Stahlstifte st frei

aufgehängt und schwingt infolge der Schwere des Rahmens um den Aufhängepunkt wie ein Pendel; in der Ruhe nimmt der Rahmen daher auch eine lotrechte Lage ein. Um das Gewicht des Rahmens zu vermehren und die lotrechte Stellung der Längskanten desselben eventuell korrigieren zu können, ist auf der Rückseite des Streifens CD ein parallelepipedisches Stück Eisen xy angeschraubt.

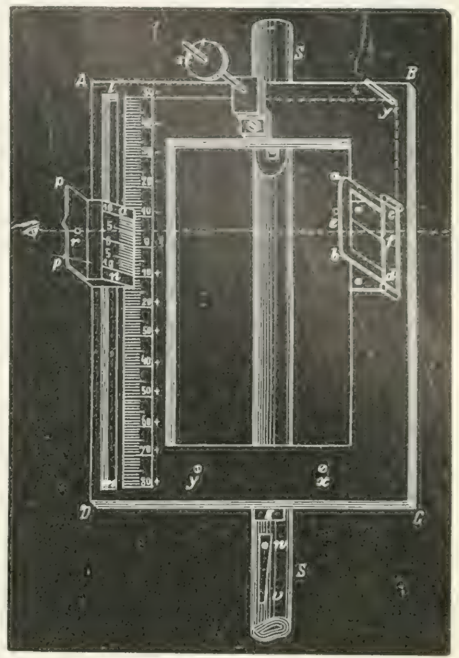


Fig. 317.

Das Stockstativ ist ein längerer Meßkettenstab, der unten über dem eisernen Schuhe eine scheibenförmige Eisenplatte besitzt, bis zu welcher das Stativ stets in den Boden eingestoßen werden muß. Bei E besitzt das Stativ einen rechteckigen Einschnitt, in welchem der Rahmen während des Übertragens des Instrumentes bei der Arbeit mittels des Riegels vw festgehalten wird.

Auf den Messingstreifen AD und BC ist die Visiervorrichtung (die Diopter) angebracht. Dieselbe besteht aus dem auf dem Streifen BC befindlichen Objektivdiopter, d. i. einem kleinen Rähmchen $abdc$, welches in der Mitte einen wagrecht gespannten Roßhaarfaden ef enthält, sich rechtwinklig zur Fläche des Messingstreifens BC stellen läßt und in dieser Stellung durch eine Feder festgehalten wird; ferner aus dem auf dem gegenüberliegenden Messingstreifen AD angebrachten Okulardiopter, bestehend aus einem rechteckigen, auf der Fläche des Messingstreifens rechtwinklig stehenden Messingscheibchens pp', das ein Visierloch r enthält, und aus einem Plättchen on, welches direkt auf dem Messingstreifen AD aufliegt und auf diesem samt dem Scheibchen in der Nut lm des Streifens AD auf- und niedergeschoben, aber auch in jeder Stellung mittels einer auf der Rückseite des Messingstreifens angebrachten Schraube festgeklemmt werden kann. Auf dem Plättchen endlich ist ein mit Null bezeichneter Strich (Nullstrich) eingeritzt, welcher bei freihängendem Instrumente in gleicher Höhe mit dem Visierloche liegt.

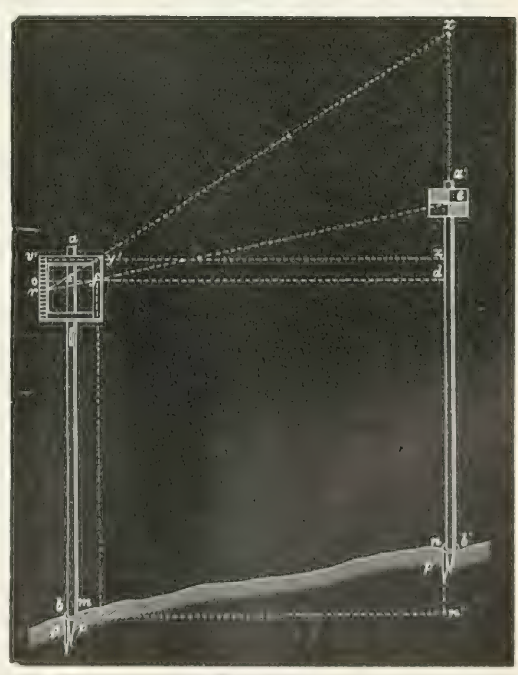


Fig. 318.

Auf der Vorderseite des Messingstreifens AD befindet sich eine Einteilung (Skala), welche so beschaffen ist, daß 100 Teile derselben der Entfernung des Visierloches (Augpunktes) r vom Objektivfaden ef gleich sind. Bringt man den Nullpunkt der Skala mit dem Nullpunkte des Plättchens des Okulardiopters in Übereinstimmung, so muß die durch das Visierloch r und den Faden ef gehende Visierlinie horizontal sein, wenn der Rahmen vollkommen zur Ruhe gekommen ist (d. h. nicht mehr schwingt). Bei dieser Stellung des beweglichen Absehens (Okulars) kann das Instrument sonach zum Nivellieren mittels der Horizontalvisur in Verbindung mit den oben beschriebenen Nivellierlatten verwendet werden.

Wird hingegen der Nullpunkt des Okularplättchens z. B. auf dem Teilstriche 20, Fig. 318, der Teilung an AD festgehalten, so nimmt die sonach durch r und ef bestimmte Visierlinie eine schiefe Lage an, deren Neigung gegen die Horizontale,

da ein Teilstrich an der Skala gleich $\frac{1}{100}$ der Entfernung der beiden Absehen ist, durch ein Verhältnis, in unserem Falle durch das Verhältnis 20 : 100 oder 1 : 5, ausgedrückt werden kann. Diese Eigenschaft des Instrumentes ermöglicht dessen Verwendung zum Nivellieren unter Anwendung eines eigenen Visierstabes, sowie insbesondere zur Absteckung von bestimmten Neigungen im Terrain.

Der für letztere Zwecke erforderliche Visierstab, Fig. 318, $a'b'$, ist ein längerer Kettenstab mit einem Eisenschuh und einer scheibenförmigen Eisenplatte und trägt das in vier Felder geteilte Scheibchen e derart, daß die Entfernung von e bis zur Eisenplatte gerade so groß ist, wie das Stück cb des Instrumentes. Unter dieser Voraussetzung stellt sich für das Nivellieren*)

b) der Gebrauch des Nivellierinstrumentes wie folgt: Soll der Höhenunterschied der Punkte n und m, Fig. 318, ermittelt werden, so stellt man den Visierstab $a'b'$ über n und das Instrument ab über m und schiebt das Okular so weit herunter, daß die Visierlinie rf bei e schneidet, wenn das Instrument frei hängend sich selbst überlassen bleibt. Man hat dann $de = n'n$, d. i. der zu suchenden Höhe, und es ist, da $\triangle def \sim \triangle orf$, $of : or = fd : de$, und daraus $de = \frac{or \cdot fd}{of}$. In unserem Falle ist der Abstand $or = 20$ Teilstriche. Da nun der Abstand of nach der obigen Erklärung gleich ist 100 Teilstrichen, so ist $or = 0{\cdot}200 \cdot of$ und daher $de = \frac{0{\cdot}200 \cdot of \cdot fd}{fo} = 0{\cdot}200 \cdot fd$, d. h. man ermittelt den Höhenunterschied zweier Punkte, wenn man den hundertsten Teil der Ablesung an der Skala mit der horizontalen Entfernung der Punkte multipliziert.

Hiebei begeht man den Fehler, daß man als horizontale Entfernung von m nach n die Strecke fd annimmt, statt dc. Dieser Fehler ist indessen so klein (cf ist nur 8 *cm*), daß er gegenüber den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern nicht in Betracht kommt. Er beträgt bei einem Gefälle von 10 *m* bei einer Länge von 100 *m* erst 0·8 *cm*.

c) Prüfung und Berichtigung. Um sich von der horizontalen Lage der Visierrichtung zu überzeugen, stellt man den Nullpunkt des Okulars auf dem Nullpunkte der Teilung fest und stellt das Instrument hierauf in einem ziemlich horizontalen Terrain auf. Alsdann schlägt man in der Entfernung von etwa 30 *m* vor- und rückwärts vom Instrumente je einen Pflock ein und bringt den Visierstab vorerst auf den einen Pflock und schlägt diesen so ein, daß die Visierlinie die Mitte der Visierscheibe genau trifft. Alsdann dreht man das Instrument um, visiert nach dem mittlerweile auf dem zweiten Pflocke aufgestellten Visierstabe und schlägt denselben ebenso wie den ersten ein. Wird nun das Instrument selbst über einem der so festgeschlagenen Pflöcke, der Visierstab aber auf dem zweiten Pflocke aufgestellt, so muß bei einem richtigen Instrumente das Roßhaar genau auf den Visierpunkt zeigen; ist dies nicht der Fall, so feilt man an dem einen oder anderen Ende den Eisenstab xy so lange zu, bis die Visur genau in die Mitte des Scheibchens fällt.

Der Grund für diesen Vorgang wird aus der Prüfung der eigentlichen Nivellierinstrumente (Seite 319) noch klarer werden.

2. Röhreninstrumente.



Fig. 319.

Zu den Röhreninstrumenten gehört die Kanalwage und die Quecksilberwage.

A. Die Kanalwage. Dieses Instrument besteht aus einer an beiden Enden rechtwinklig nach aufwärts gebogenen Messingröhre, Fig. 319, welche mit einer Hülse h auf einem Stock- oder Dreifußstative s befestigt werden kann. In die rechtwinklig umgebogenen Enden der Röhre ist je ein passender Glaszylinder eingekittet, der entweder offen oder mit Deckeln verschließbar ist. Die Röhre ist mit gefärbtem Wasser gefüllt, dessen Oberfläche — nach dem physikalischen Gesetze von den kommunizierenden

*) Die Anwendung des Instrumentes zum Abstecken bestimmter Neigungen siehe Seite 335.

Röhren — in beiden Zylindern stets gleich hoch steht. Nachdem nun die Oberfläche des Wassers an und für sich horizontal ist, so ist auch die durch die Wasseroberflächen in beiden Schenkeln gelegte Ebene horizontal. Wegen der mangelhaften Visiervorrichtung ist dieses Instrument nur auf kurze Distanzen verwendbar und fast ganz außer Gebrauch gekommen, ebenso wie

B. die Quecksilberwage, welche dieselbe Einrichtung besitzt, aber mit Quecksilber gefüllt ist.

3. Libelleninstrumente.

Je nachdem die horizontale Visierlinie mittels einfacher Diopter oder mit Hilfe von Fernrohren hergestellt wird, unterscheidet man Diopter- und Fernrohrinstrumente. Bei genauer Kenntnis des Nivellierdiopters und der Einrichtung eines Fernrohres bietet das Fernrohrnivellierinstrument keine Schwierigkeit, weshalb im nachfolgenden bloß das Nivellierdiopter beschrieben wird.

Das Nivellierdiopter.

a) Beschreibung. Das Nivellierdiopter, Fig. 320, besteht aus einem zirka 30—40 *cm* langen und 4—5 *cm* breiten Messinglineale *m n*, an dessen Enden zwei senkrechte Diopter *m o* und *n p* angebracht sind. Im Gegensatze zu den Dioptern bei der Winkeltrommel oder beim Diopterlineal stehen hier die Fäden horizontal, da es sich ja um die Herstellung einer horizontalen Visierebene handelt. Die Diopter sind zum Vor- und Rückwärtsvisieren eingerichtet, d. h. es trägt jede einzelne Lamelle sowohl ein Okularloch *u* als auch einen Objektivfaden *t*; das Okularloch muß natürlich, damit sowohl die Vorwärts- als auch die Rückwärtsvisur in einer und derselben Ebene liegt genau in der Verlängerung des daneben gespannten Fadens sich befinden.

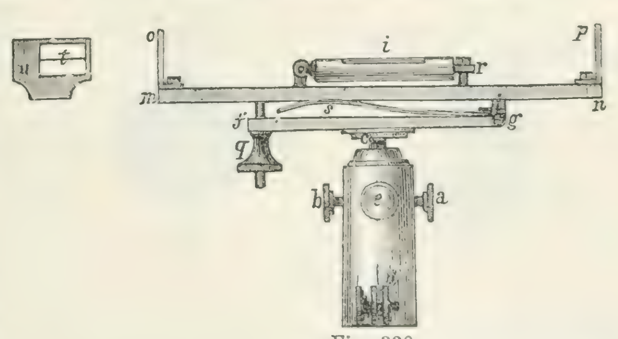


Fig. 320.

Mitten auf dem Messinglineale ist eine Libelle *i* angebracht, welche mit Hilfe der Schraube *r* einseitig gehoben und gesenkt, also rektifiziert werden kann. Dieses Messinglineal ist mit einem zweiten Messingstabe *f g* so verbunden, daß es sich um die Achse *g* durch die Schraube *q*, die Elevationsschraube, etwas heben und senken läßt. Zwischen den beiden Messingstäben *m n* und *f g* ist eine Feder *s* angebracht, welche den toten Gang der Schraube *q* verhindert.

Die Platte *f g* läßt sich um eine darauf rechtwinklige Achse drehen und diese Achse selbst kann mittels der Schräubchen *a b c c'* (wovon *c'* in der Figur rückwärts liegt, daher unsichtbar ist) vertikal gestellt werden. Die Figur 321 veranschaulicht die Konstruktion des unteren Teiles des Instrumentes. Von der Messingplatte *f g* ragt ein runder Stahlzapfen *e e* nach unten, der von einem Messingkörper *i c* umgeben ist, in welchem er sich drehen läßt. Diese Messinghülle ist oben bei *i* kugelförmig verdickt und läuft nach unten in ein gleichseitiges vierkantiges Prisma aus. Damit der Stahlzapfen nicht aus der Messinghülse herausgezogen werden

kann, ist er an seinem unteren Ende bei *c* mittels einer Deckschraube befestigt. Das Ganze ist von einer Messinghülse *h h'* umgeben, welche auf den Zapfen eines Dreifußstativs aufgeschoben und dort mittels einer Klemmschraube (*d* in Fig. 320) befestigt werden kann. Durch die Hülse *h h'* gehen die vier Schräubchen *a*, *b*, *e* und *e'*, die auf die vier Seiten des prismatischen Zapfens *i o* wirken, so daß diesem Zapfen innerhalb gewisser Grenzen jede beliebige Stellung gegeben werden kann, wodurch dann die Horizontalstellung der Platte *f g*, beziehungsweise des Instrumentes, ermöglicht wird. Fig. 321 *a* zeigt den prismatischen Zapfen mit den vier Schrauben im Schnitte. Wird z. B. die Platte *f g* über die 2 Schrauben *a* und *b* gestellt, so bewegt sich der prismatische Zapfen nach links, wenn man die Schraube *a* nachläßt und gleichzeitig die Schraube *b* anzieht. Dadurch wird aber das Ende *g* der *f g* gesenkt und das Ende *f* gehoben; die Platte selbst kann also in der Richtung *a b* horizontal gestellt werden. Stellt man dann die Platte *f g* auch über die Schrauben *e e'*, so kann sie mit Hilfe dieser Schrauben auch in der Richtung *e e'* horizontal gestellt werden. Da die Richtungen *a b* und *e e'* zwei sich schneidende Gerade vorstellen, eine Ebene durch zwei solche Gerade aber bestimmt ist, wird die Platte *fg*, beziehungsweise das Instrument in jeder beliebigen Richtung horizontal stehen, wenn es in den beiden genannten Richtungen horizontal steht. (Siehe Zusatz zu § 7. I 2 C b.)

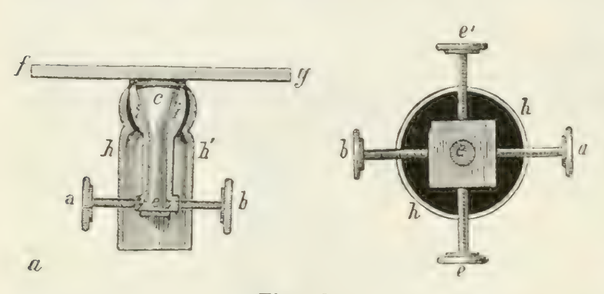


Fig. 321.

Das Stativ besteht aus einem Zapfen zum Aufschieben der Hülse des Instrumentes, welcher nach unten in ein dreiseitiges Prisma ausläuft, das an jeder Seite einen Fuß trägt. Die Füße können mittels Flügelschrauben in jeder Lage festgehalten werden.

b) Prüfung und Berichtigung. Da die Anwendung des Nivellierdiopters darauf begründet ist, daß bei einspielender Libelle die durch die Diopter bestimmte Visur horizontal ist, hat man zu untersuchen *aa)* ob die Achse der Libelle senkrecht zur Drehungsachse ist; *bb)* ob die Visierebene mit der Libellenachse parallel ist.

aa) Um dies zu prüfen, stellt man das Stativ so auf, daß der Zapfen dem Augenmaße nach vertikal steht und steckt das Instrument mit der Hülse darauf. Sodann dreht man die Libelle so, daß sie über zwei gegenüber liegende Schräubchen (z. B. *a* und *b* in Fig. 321) zu liegen kommt und bringt sie mit Hilfe derselben zum Einspielen. Nun dreht man die Libelle um 180°, so daß ihre beiden Enden vertauscht werden. Spielt die Blase noch ein, dann ist die Libellenachse horizontal und steht auf der Drehungsachse, die dann genau vertikal steht, senkrecht. Spielt die Blase aber nicht ein, dann wird der halbe Fehler an den zwei Schräubchen *a* und *b*, der andere halbe Fehler an dem Libellenrektifizierschräubchen *r* beseitigt und dieser Vorgang so oft wiederholt, bis die Libelle in beiden Lagen genau einspielt. Sodann stellt man die Libelle auch über das andere Schraubenpaar *e e'* und bringt sie auch in dieser Richtung damit zum Einspielen.

Nun weiß man zwar, daß die Drehungsachse vertikal und die Libellenachse horizontal steht, es kann aber trotzdem die Visur geneigt

sein. Die schematische Darstellung in Fig. 322 zeigt in I ein gänzlich unberichtigtes Instrument, in II ein solches, bei dem die eben besprochene Rektifikation bereits vorgenommen wurde, die Visur aber noch schief steht. *ll* deutet die Libelle, beziehungsweise die Libellenachse an, *vv* die Visur und *ax* die Drehungsachse. Es erübrigt also noch, auch die Visur horizontal, d. h. parallel zur Libellenachse zu stellen.

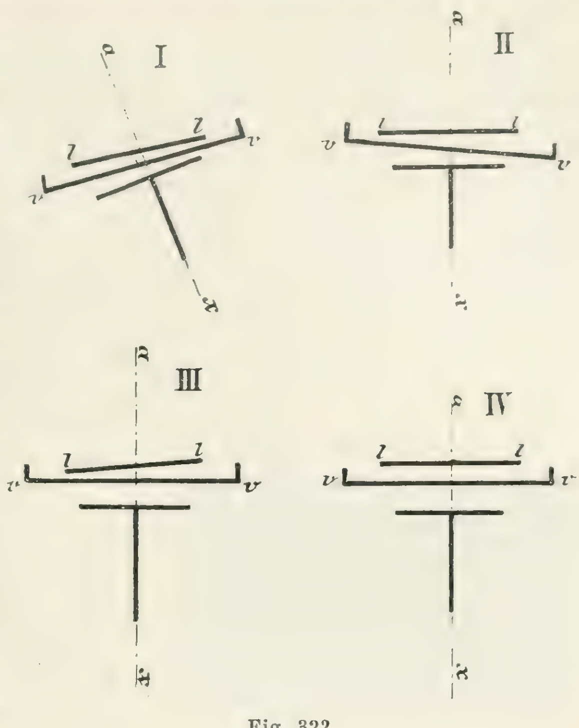


Fig. 322.

bb) Zu diesem Zwecke wählt man auf einem nur sehr wenig geneigten Terrain zwei etwa 60 *m* von einander entfernte Punkte *A* und *B* (Fig. 323, oben) und stellt in ihrer Mitte das Nivellierdiopter annähernd horizontal auf. Sodann schickt man nach *A* und *B* je einen Figuranten mit einer Nivellierlatte und richtet die Visur bei genau einspielender Libelle nach *A*, weist die Zielscheibe genau ein und liest die Lattenhöhe L_A ab, oder es ruft der geübte Figurant dem Geometer die Zielhöhe zu. Hierauf dreht man das Instrument gegen *B*, weist, indem man nur das eine Paar Absehen benützt, bei genau einspielender Libelle die Zielscheibe ein und liest die Lattenhöhe L_B ab.

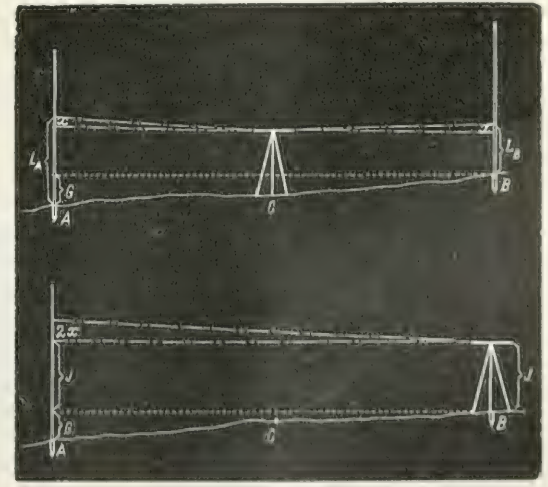


Fig. 323.

Nehmen wir an, es sei die Visur bei einspielender Libelle nicht horizontal, sondern sie weiche an der Latte um das Stück x von der Horizontalen ab, so muß, da man mit demselben Absehenpaar bei einspielender Libelle in der gleichen Entfernung $AC = BC$ nach *A* und *B* visierte, dieser Fehler x in gleicher Größe sowohl bei der Lattenhöhe in *A*, als auch bei jener in *B* gemacht worden sein. Die richtige Lattenhöhe in *A* wäre demnach $L_A - x$ und jene in $B\ L_B - x$, und das Gefälle G zwischen *A* und *B* die Differenz zwischen $L_A - x$ und $L_B - x$. Diese Differenz ist ebenso groß

wie jene zwischen L_A und L_B, weil der Rest derselbe bleibt, wenn Minuend und Subtrahend um dieselbe Zahl vergrößert oder verkleinert werden, weshalb man auch schreiben kann $G = L_A - L_B$, d. h. es ergibt die Differenz der unrichtigen Lattenhöhen nach dem gewählten Messungsvorgange den richtigen Höhenunterschied.

Nun überträgt man das Instrument von C nach dem höher gelegenen Endpunkte B, Fig. 323 unten, und visiert bei einspielender Libelle die Zielscheibe einer in A aufgestellten Latte ein. Wäre die Visur genau horizontal, so müßte die jetzt abgelesene Lattenhöhe in A gleich sein dem bei der ersten Aufstellung richtig ermittelten Gefälle von B nach A, vermehrt um den Abstand des Okularloches vom Bodenpunkte B, d. i. die Instrumentenhöhe J in B, oder es müßte, durch eine Gleichung ausgedrückt, $L_A = G + J$. Da aber in unserem Falle die Visur in B bei einspielender Libelle nicht horizontal ist, sondern bei der Entfernung $AC = BC = \frac{1}{2} AB$ um das Stück x von der Horizontalen abweicht, so wird, da bei der zweiten Aufstellung die Entfernung $AB = 2\,AC$, also das Doppelte der früheren ist, der Fehler an der Latte auch das Doppelte des früheren Fehlers, also $2x$ betragen und man wird wirklich an der Latte eine Ablesung von $G + J + 2x$ machen. Man wird also, wenn, wie in unserem Falle, die in B abgelesene Lattenhöhe der aus $G + J$ berechneten nicht entspricht, das Instrument in der Art richtig stellen müssen, daß die in B bei einspielender Libelle abzulesende Lattenhöhe gleich ist der berechneten. Man läßt nun die Zielscheibe der Latte auf die richtige Lattenhöhe $G + J$ einstellen und verbessert die Visur so lange, bis sie genau durch den Mittelpunkt der Zielscheibe geht. Diese Verbesserung der Visur kann dadurch erfolgen, daß man das eine Diopter so lange hebt oder senkt, bis die Visur die verlangte Richtung hat. Es ist dies jedoch nicht bei allen Instrumenten durchführbar, da die Diopter sehr häufig fest angebracht sind. In dem Falle bewirkt man die Richtigstellung mit der Schraube q in Fig. 320, indem man das ganze Lineal mn so lange hebt oder senkt, bis die Visur durch die Zielscheibe geht. Dann ist die Visur tatsächlich horizontal; da jedoch die Libelle mit dem Lineal mn verbunden ist, spielt die Blase natürlich nicht mehr ein und muß mittels der Schraube r wieder zum Einspielen gebracht werden. Die Figur 322 zeigt in schematischer Anordnung in III das Instrument nach Einstellung der Visur (wobei die Achse ax nicht geändert, aber die Libelle geneigt wird), in IV nach Zurückbringen der Libelle ll in die horizontale Lage, d. h. nach vollkommener Rektifikation des Nivellierdiopters.

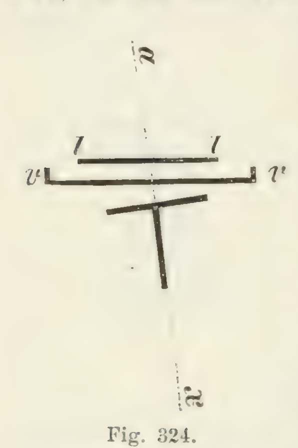


Fig. 324.

Wenn man ein derart rektifiziertes Instrument beim jedesmaligen Aufstellen mittels der vier Stellschrauben abc und c' horizontiert, d. h. die Libelle zum Einspielen bringt, so weiß man, daß die Visur vv in jeder Lage horizontal liegt, also beim Drehen um die Achse ax eine horizontale Ebene beschreibt. Man kann aber auch bei nicht vertikalem Stande der ax eine horizontale Visur herstellen, indem man mittels der Elevationsschraube q (Fig. 320) die Libelle zum Einspielen bringt, da ja mit Hilfe des früher beschriebenen Vorganges die Libellenachse mit der Visur parallel gestellt wurde. Die Stellung des Instrumentes in diesem Falle zeigt schematisch die Figur 324.

Allerdings wird dann bei der geringsten Drehung um $a\,x$ die Visur samt der Libelle ihre horizontale Lage verlassen und man muß für jede neue Visierrichtung neuerdings mit der Elevationsschraube die Visur horizontal richten. (Dieser Vorgang ist jedenfalls einzuhalten bei Instrumenten, denen eine Vorrichtung zur Vertikalstellung der $a\,x$ mangelt, was mitunter vorkommt). Weitaus vorteilhafter aber ist es, sich das Instrument nach Fig. 323 zu berichtigen und jenen Stand der Elevationsschraube, bei welchem Visur und Libelle auf der Drehungsachse senkrecht stehen, durch ein Zeichen zu markieren.

Außer den besprochenen Prüfungen soll auch noch untersucht werden, ob der Horizontalfaden des Diopters tatsächlich horizontal ist. Dies geschieht, indem man bei horizontalgestelltem Instrumente einen Punkt (Nagelkopf oder dgl.) scharf anvisiert und beobachtet, ob beim Drehen um die vertikal gestellte $a\,x$ der Faden in seiner ganzen Länge immer den zuerst anvisierten Punkt deckt. Ist dies nicht der Fall, dann muß entweder das Diopter oder bloß der Faden einseitig gehoben oder gesenkt werden, je nachdem die Einrichtung des Instrumentes dies gestattet. Man kann sich auch dadurch helfen, daß man die Visur immer über ein und dieselbe Partie des Fadens gehen läßt, was auch bei den Prüfungen $a\,a$ und $b\,b$ zu beobachten ist.

c) Gebrauch. Hat man nun den Höhenunterschied zweier Punkte A und B (Fig. 325) zu ermitteln, so stellt man das auf dem Stativ befindliche Instrument durch Abschreiten der Entfernung $A\,B$ in der Mitte derselben auf, schickt nach A und B je einen Figuranten mit einer Nivellierlatte, visiert bei einspielender Libelle durch die Diopter einmal nach A und das zweitemal nach B und weist die Figuranten so lange zum Verschieben der Zielscheiben an, bis die letzteren in der horizontalen Visur liegen. Ist dann l_1 die Lattenhöhe in A und l_2 die Lattenhöhe in B, so ist $h = l_1 - l_2$.

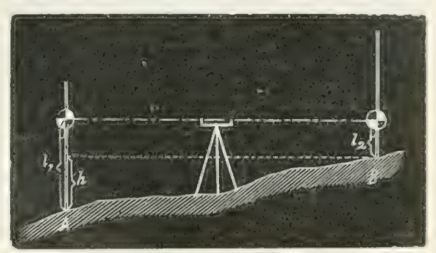


Fig. 325.

III. Nebengeräte beim Nivellieren.

Als Nebengeräte bei Nivellierarbeiten kommen die Visier- oder Pflasterkreuze und entsprechend starke Schnüre in Verwendung.

1. Die Visier- oder Pflasterkreuze (auch Kreuzvisiere genannt).

a) Beschreibung. Ein Visierkreuz, Fig. 326, besteht aus zwei unter einem rechten Winkel mit einander verbundenen, etwa 2 *cm* dicken Lattenstücken, von denen das Querstück etwa 50 *cm*, der Stiel aber 1·0 bis 1·2 *m* lang ist. Zum Schutze gegen das Abstoßen ist der Stiel am unteren Ende häufig mit einem Eisenbeschläg versehen.

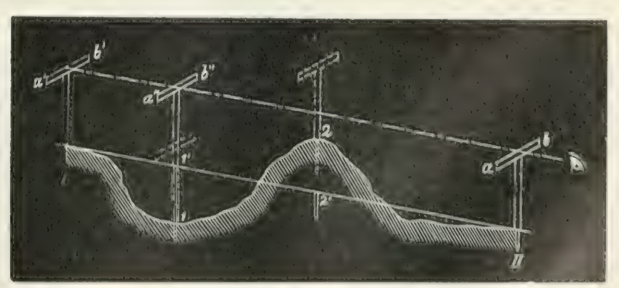


Fig. 326.

b) Gebrauch. Die Visierkreuze dienen dazu, innerhalb der vertikalen Lage zweier Punkte, z. B. *I* und *II*, Fig. 326, mehrere andere, etwa 1' und 2', zu bestimmen, welche in der geraden Neigung von *I II* liegen. Zu diesem Behufe sind drei Visierkreuze von gleicher Stiellänge erforderlich, von denen das Vermessungsorgan eines auf dem Pflocke in *II* und ein Gehilfe ein zweites auf dem Pflocke in *I* so aufstellt, daß die Stiele beider Visierkreuze dem Augenmaße nach vertikal stehen, während die Kreuzarme *a b* und *a' b'* annähernd horizontal liegen. Nun stellt ein zweiter Gehilfe das dritte Visierkreuz auf dem vorerst in die Vertikalebene *I II* einzuvisierenden Pflocke 1 vertikal auf, worauf der Beobachter in *II* über die Kante *a b* nach der Kante *a' b'* visiert. Hiebei zeigt es sich, ob der Punkt 1 zu hoch oder zu niedrig liegt. In unserem Falle ist 1 zu niedrig, denn die Visur geht darüber hinweg. Es muß daher der Pflock 1 so weit herausgezogen oder durch einen längeren Pflock 1' ersetzt werden, bis die Visierlinie auch genau durch *a'' b''* des dritten Kreuzes geht. Überträgt der Gehilfe das Visierkreuz nun auf den zweiten in die Neigungslinie *I II* zu bringenden Punkt 2, so geht die Visur unter dem Kreuzarme hinweg; man muß daher in 2 so viel abgraben und den Pflock 2 nach 2' so tief einschlagen, bis die Visur genau wieder über die Kreuzarmkante des dritten Kreuzes geht. Die Punkte 1' und 2' liegen alsdann genau in der Geraden *I II* und man hat, um das Terrain zwischen *I* und *II* vollkommen eben zu machen, nur nötig, den Erdhügel um 2 abzutragen, die Grube bei 1 hingegen auszufüllen.

c) Die Prüfung der Visierkreuze besteht in der Abmessung, ob die einzelnen Stiele gleich lang sind, ferner darin, ob bei jedem Kreuze die Kanten des Querarmes zu den Kanten des Stieles vollkommen winkelrecht stehen.

2. Schnüre.

Dieselben werden zu demselben Zwecke gebraucht wie die Visierkreuze. In Fig. 326 würde man von *I* nach *II* eine Schnur spannen und in 2 einen schmalen Streifen so weit ausgraben, bis die gespannte Schnur nirgends mehr aufliegen, d. i. vollkommen gerade sein würde. In 1 müßte der Pflock so weit herausgezogen werden, bis die gespannte Schnur genau anstoßen würde.

§ 29. Die Arten und Methoden des Nivellierens.

Durch das Nivellieren sind zwei Hauptgruppen von Aufgaben zu lösen, und zwar:

I. Die Ermittlung des Höhenunterschiedes der in einer geraden, gebrochenen oder krummen Linie liegenden Punkte.

II. Die Ermittlung der gegenseitigen Höhenlage regelmäßig oder unregelmäßig über eine Fläche verteilter Punkte, um danach die ganze Gestaltung der Bodenoberfläche, sowie eventuelle Anlagen vorerst auf einem Plane darstellen, und letztere sodann in die Natur übertragen zu können.

Nach diesen Gesichtspunkten unterscheidet man daher: I. Das Liniennivellement und II. das Flächennivellement.

I. *Das Liniennivellement.*

1. Ausführung desselben.

A. Mit der Setzlatte und dem Bose'schen Nivellierinstrumente.

a) Mit der Setzlatte. Das Nivellieren mit der Setzlatte wurde dem Wesen nach bereits Seite 314 beschrieben. Man pflockt hiebei gewöhnlich nur die Anfangs- und Endpunkte und einige wichtige Zwischenpunkte aus, während die übrigen Punkte unausgepflockt bleiben. Handelt es sich nur darum, den Höhenunterschied zweier Punkte zu bestimmen, so arbeitet man durchaus mit der vollen Lattenlänge; ist es jedoch erforderlich, den Höhenunterschied jedes einzelnen Brechungspunktes innerhalb des Anfangs- und Endpunktes der Linie zu ermitteln, so werden die Lattenlängen nur so groß genommen, als sie eben von Brechpunkt zu Brechpunkt entsprechen. Über die Aufnahme führt man in einem Manuale die folgende tabellarische Aufschreibung, wobei in unserem Falle (Fig. 327) die Ermittlung des Höhenunterschiedes aller Brechungspunkte untereinander angenommen wird. Unter dem Worte „Station" versteht man hiebei die Entfernung zweier Meßpunkte.

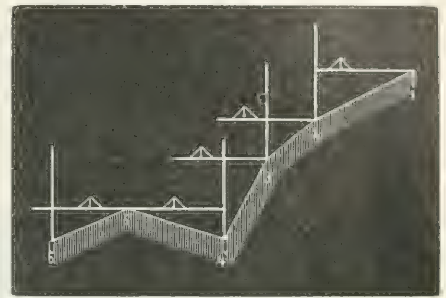


Fig. 327.

Station		Länge der Station	Das Terrain		Anmerkung
			steigt	fällt	
von	bis	Meter*)			
1	2	4	—	2·32	
2	3	2	—	1·78	
3	4	2	—	3·65	
4	5	4	1·33	—	
5	6	3	—	1·62	
		15	1·33	9·37	
				1·33	
			Gesamtgefälle	8·04	

Es ist wohl aus Fig. 327 und nach den Auseinandersetzungen in Punkt *b)* auf Seite 314 sofort erklärlich, daß der Gesamthöhenunterschied der

*) Viele Geometer lesen in Zentimetern statt in Metern ab.

beiden Endpunkte *1* und *6*, beziehungsweise irgend zweier anderer Punkte des Nivellements gefunden wird, indem man die zwischen diesen Punkten ermittelten Steigungen und Gefälle je für sich addiert und die kleinere Summe von der größeren subtrahiert.

Das Nivellieren mit der Setzlatte ist zeitraubend und beschwerlich und wird daher nur bei den einfachsten Arbeiten angewendet.

b) Mit dem Bose'schen Nivellierinstrumente. Das Wesen der Ausführung eines solchen Nivellements wurde bereits Seite 316, *b)* beschrieben. Ist eine größere Längenerstreckung mit mehreren Brechungspunkten zu nivellieren, so geht man bezüglich der Verpflockung wie bei *a)* vor. Die einzelnen Stationen wählt man bis zu 30 *m* Länge und mehr und führt über die Aufnahme ebenfalls ein Manuale.

B. Mit den Röhren- und Libelleninstrumenten.

Für die Ausführung des Nivellierens mit diesen Instrumenten kommen zwei Methoden in Betracht und zwar:

a) Das Nivellieren aus der Mitte. *b)* Das Nivellieren aus den Endpunkten.

a) Das Nivellieren aus der Mitte oder das Vor- und Rückwärts-Nivellieren. Es wurde bereits Seite 321 erörtert, wie man durch Aufstellen des Nivellierdiopters in der Mitte zweier Punkte *A* und *B* deren Höhenunterschied ermitteln kann. In der Mehrzahl der Fälle reicht man aber mit einer Aufstellung nicht aus, sondern es sind die auf ihren Höhenunterschied zu untersuchenden Punkte so weit von einander entfernt, daß es notwendig wird, die Nivellierweite in einzelne Teile, Stationen, einzuteilen, diese sodann nach dem oben beschriebenen Verfahren je für sich auf ihren Höhenunterschied zu untersuchen und aus der Summe der Höhenunterschiede der einzelnen Stationen den Gesamthöhenunterschied der Nivellierstrecke zu finden.

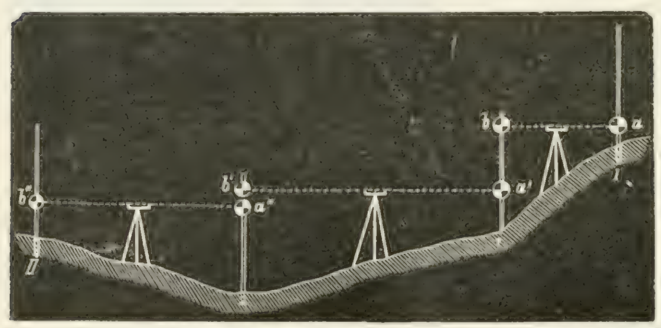


Fig. 328.

Auf Grund dieser Vorbemerkungen wird das Nivellement zwischen den Punkten *I* und *II*, Fig. 328, wie folgt ausgeführt: Man schreitet von *I* aus eine dem Gefälle angepaßte Entfernung*) (beim Nivellierdiopter etwa von 10 bis 50 Schritten) ab, stellt an deren Ende das Instrument auf, visiert bei horizontaler Visur sowohl rückwärts nach einer in *I* aufgestellten Latte als auch vorwärts nach einer im Schrittmaße gleichweit entfernt im Punkte *1* aufgestellten Latte und notiert die Zielhöhen an beiden Latten. Alsdann überträgt man, den Punkt *1* überspringend, das Instrument auf einen zweiten Aufstellungspunkt und richtet die horizontale Visur sowohl nach rückwärts auf die in *1* verbliebene Latte als auch nach vorwärts nach der im Schrittmaße vom Instrumente gleichweit aufgestellten zweiten Latte in *2*, wobei wieder beide Zielhöhen zu notieren sind. In gleicher Weise wie bei den ersten Aufstellungen vollzieht man die dritte Aufstellung des Instrumentes.

*) Bei starkem Gefälle weniger, bei schwachem Gefälle mehr.

Man hat nun als Gefälle von *I* bis *1* die Differenz der Zielhöhen $b\,1 - a\,I$, als Gefälle von *1* bis *2* die Differenz $b'\,2 - a'\,1$ und als Steigung von *2* bis *II* die Differenz $a''\,2 - b''\,II$, daher als Gesamtgefälle von *I* bis *II* die Summe der Gefälle weniger der Steigung von *2* bis *II*, also $G = b\,1 - a\,I + b'\,2 - a'\,1 - (a''\,2 - b''\,II)$*) $= b\,1 - a\,I + b'\,2 - a'\,1 - a''\,2 + b''\,II$, d. h. man ermittelt das Gesamtgefälle zweier Punkte, indem man alle vorwärtigen Lattenhöhen addiert und von dieser Summe alle rückwärtigen Lattenhöhen abzieht.

Für die Aufschreibung der Lattenhöhen (Zielhöhen) und die Berechnung der Höhenunterschiede führt man in einem Manuale folgende tabellarische Aufschreibung:

Nivellement von *I* bis *II*.

Station			Lattenhöhe (Zielhöhe)		Gefälle von Lattenpunkt zu Lattenpunkt		Höhe unter dem Haupthorizonte in I	Anmerkung
von	bis	Länge in Schritten	Rückwärts	Vorwärts	Steigen +	Fallen —		
			Meter**)					
I	*1*	30	0·720	3·815	.	3·095	3·095	$1^x = 0·75\,m$
1	*2*	70	1·635	3·550	.	1·915	5·010	
2	*II*	50	3·010	1·480	1·530	.	3·480	
		Summe	5·365	8·845	1·530	5·010	3·480	

Der Höhenunterschied zwischen je zwei aufeinander folgenden Punkten ergibt sich als Differenz zwischen der bezüglichen vorwärtigen und rückwärtigen Lattenhöhe (von demselben Aufstellungsorte des Instrumentes) und bedeutet ein Steigen des Terrains, wenn die rückwärtige Lattenhöhe größer, und ein Fallen des Terrains, wenn die rückwärtige Lattenhöhe kleiner als die vorwärtige ist. Da nun sämtliche Einzelhöhenunterschiede zusammengezählt ebenfalls dem Gesamthöhenunterschiede gleichkommen, so ist hiedurch eine Kontrolle für die richtige Rechnung gegeben.

In vielen Fällen ist es erwünscht, nicht nur den Höhenabstand zwischen dem Anfangs- und Endpunkte, sondern auch den Abstand der Zwischenpunkte vom Anfangs- oder vom Endpunkte der abzunivellierenden Strecke zu bestimmen. Man nennt die Horizontale, welche durch den als Ausgangspunkt für alle Höhenabstände gewählten Punkt geht, die Haupthorizontale oder den Haupthorizont. Die Höhenabstände der einzelnen Punkte vom Haupthorizonte, in unserem Falle von der Horizon-

*) Eine Differenz wird von einer Zahl substrahiert, indem man den Minuend von der Zahl subtrahiert und den Subtrahend addiert, denn es ist $5 - (4 - 2) = 5 - 4 + 2 = 3$. Wer die Grundbegriffe der Algebra kennt, sagt: Steht vor einer Klammer ein —Zeichen, so kann dieselbe weggelassen werden, wenn man an den Gliedern innerhalb der Klammer die Zeichen ändert.

**) Vielfach auch in Zentimetern abgelesen.

talen durch I, ergeben sich durch stufenweise Addition, beziehungsweise Subtraktion der einzelnen Höhenunterschiede. Der letzte Abstand muß dem Gesamthöhenunterschiede zwischen Anfangs- und Endpunkt gleich sein.

Zum Zwecke der praktischen Ausführung des Nivellierens wird hier noch folgendes bemerkt: *aa)* Bei Anwendung des Nivellierdiopters ist das Diopterlineal LL_1 nach vollzogener Rückwärtsvisur so lange zu drehen, bis die Visur auf die vorwärtige Latte geht. Sind jedoch zwei Diopterpaare vorhanden. die genauestens berichtigt sind, so kann bei der Rückwärtsvisur das eine und bei der Vorwärtsvisur das andere Diopterpaar verwendet werden. ohne daß das Diopterlineal (bei einer geraden Stationslänge) gedreht wird. *bb)* Es ist ferner wichtig, daß die Nivellierlatte immer vertikal aufgestellt werde. Zu diesem Zwecke benützt man einen Senkel, den der Gehilfe an einem an der Latte angebrachten Öhre oder Haken aufhängt. *cc)* Die Längen der einzelnen Stationen, das sind die Entfernungen je zweier auf einander folgender Punkte, sind zur bloßen Ermittlung des Höhenunterschiedes nicht notwendig, und ebenso ist es bei der bloßen Höhenermittlung nur nötig, diejenigen Stationspunkte mit Pflöcken zu versehen, auf die man besonderes Gewicht legt, also insbesondere den Anfangs- und Endpunkt und einzelne wichtige Zwischenpunkte; die übrigen Punkte bleiben unausgepflockt. Die Pflöcke werden dem Erdboden gleich eingetrieben und daneben kleine Pflöcke eingeschlagen, welche mit der Nummer des Punktes bezeichnet sind. Der erste heißt Boden- oder Standpflock, der zweite Schreib- oder Nummernpflock. *dd)* Ist der Höhenunterschied zweier Punkte zu bestimmen, so braucht das Nivellement nicht auf der geraden Verbindungslinie ausgeführt zu werden, da man nach jeder Verbindungslinie den gleichen Höhenunterschied erhalten muß; man wählt daher für das Nivellement die Verbindung mit den wenigsten Hindernissen. Auch ist es nicht notwendig, daß sich das Instrument bei jeder Station in der geraden Verbindung der beiden Stationsendpunkte befinde, sondern es kann auch außerhalb derselben stehen, da in beiden Fällen die Differenz zwischen vorwärtiger und rückwärtiger Lattenablesung dieselbe bleibt. *ee)* Wichtigere Nivellements werden wenigstens zweimal ausgeführt.

b) Das Nivellieren aus den Endpunkten oder das Vorwärtsnivellieren. Soll nach dieser Methode der Höhenunterschied zweier Punkte I und 1 Fig. 329) bestimmt werden, so stellt man das Instrument in I so auf, daß das Okular des Diopterlineals (oder der eine Arm der Kanalwage) herabgesenkelt genau den Bodenpunkt I trifft. Nun stellt man einen Gehilfen mit einer Nivellierlatte in 1 auf und weist denselben an, die Zielscheibe so lange zu verschieben, bis ihre Mitte mit der horizontalen Visierlinie zusammentrifft;

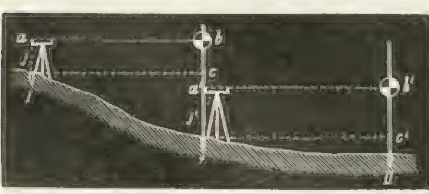


Fig. 329.

hiedurch ergibt sich die Lattenhöhe $b\,1$. Mißt man nun die Instrumentenhöhe, d. i. die Entfernung des Okulars vom Kopfe des Pflockes I mittels einer auf den letzteren gestellten und an das Okular angehaltenen Latte mit $a\,I = J$, so ist das Gefälle von I bis 1, wie leicht aus der Figur ersichtlich ist, gleich der Lattenhöhe $b\,1$ weniger der Instrumentenhöhe J, also $b\,1 - J$.

Ist die Entfernung zweier auf ihren Höhenunterschied zu bestimmenden Punkte zu groß. etwa I bis II, Fig. 329, so daß eine einzige

Aufstellung im Anfangspunkte nicht genügt, so müssen auf der betreffenden Strecke mehrere Zwischenpunkte, zwischen denen nach dem angegebenen Vorgange je das Gefälle für sich bestimmt wird, angenommen und hierauf deren Einzelngefälle addiert werden, um das Gesamtgefälle der ganzen Strecke zu erhalten. In unserem Falle ist nur der Zwischenpunkt *1* notwendig, weshalb nur die Einzelngefälle von *I* bis *1* und *1* bis *II* zu bestimmen sind. Es ist dann das Gesamtgefälle von *I* bis *II* $G = b1 - J + b' II - J'$, d. h. man findet die Gesamthöhe zwischen zwei Punkten, indem man die bei den einzelnen Aufstellungen erhaltenen Lattenhöhen addiert und die sämtlichen Instrumentenhöhen davon abzieht.

Für die Aufschreibung der Latten- und Instrumentenhöhen und die Berechnung der Höhenunterschiede führt man folgende tabellarische Aufschreibung:

Nivellement von *I* bis *II*.

Station			Instrumenthöhe	Lattenhöhe	Gefälle		Höhe unter dem Haupthorizonte	Anmerkung
von	bis	Länge in Schritten			Steigen +	Fallen —		
			Meter					
I	*1*	50	1·152	3·621	.	2·469	2·469	Haupthorizont in *I* angenommen
1	*II*	50	1·983	2·780	.	0·797	3·266	
Summe .		100	3·135	6·401	.	3·266	.	

Der Höhenunterschied zwischen je zwei aufeinander folgenden Punkten ergibt sich durch Subtraktion der Instrumentenhöhe im Aufstellungspunkte von der Lattenhöhe im Endpunkte oder umgekehrt. Ist die Lattenhöhe größer als die Instrumentenhöhe, so fällt das Terrain, ist die Lattenhöhe aber kleiner als die Instrumentenhöhe, so steigt das Terrain auf der bezüglichen Teilstrecke. Sämtliche Einzelhöhenunterschiede von Punkt zu Punkt ergeben den Gesamthöhenunterschied. Man hat hiedurch beim Nivellieren aus den Enden eine Kontrolle für die Rechnung. Ist es endlich erwünscht, den Abstand jedes einzelnen Zwischenpunktes von einem Haupthorizonte (in unserem Falle von *I*) zu ermitteln, so sind die Höhenunterschiede der einzelnen Zwischenpunkte stufenweise zu addieren, beziehungsweise zu subtrahieren.

Bei der praktischen Ausführung des Nivellements aus den Enden sind im allgemeinen dieselben Rücksichten zu beobachten wie beim Nivellieren aus der Mitte. Es ist jedoch hier besonders hervorzuheben, daß bei etwas größerer Genauigkeit sämtliche Zwischenpunkte der zu nivellierenden Strecke auszupflocken sind, weil man die Latte genau auf dem der betreffenden Instrumentenhöhe entsprechenden Punkte aufstellen muß.

Von den beiden Nivelliermethoden ist dem Nivellieren aus der Mitte der Vorzug zu geben, und zwar aus folgenden Gründen: *a)* Annahme doppelt so langer Stationen, also raschere Arbeit. *b)* Wegfall der Messung der Instrumentenhöhe. *c)* Richtigkeit des Nivellements mit einem Nivellierdiopter auch dann, wenn die Visierlinie nicht genau horizontal, das Instrument also nicht vollkommen richtig ist, da, entsprechend den Erklärungen bei der Überprüfung und Richtigstellung

eines Nivellierdiopters, sowohl bei der Vor- als auch bei der Rückwärtsvisur derselbe Fehler begangen wird, welcher sich in der Differenz aufhebt.*) Aus diesem Grunde wird das Nivellieren aus der Mitte viel häufiger angewendet als das Vorwärtsnivellieren.

2. Nivellementsprofile und die zeichnerische Darstellung derselben.

In vielen Fällen handelt es sich nicht nur darum, die Höhenunterschiede innerhalb einer gegebenen Strecke zu ermitteln, sondern auch die gegenseitige Höhenlage der einzelnen Punkte eines Nivellements zeichnerisch darzustellen. Man bezeichnet eine solche Darstellung als ein Nivellementsprofil und spricht von einem Längenprofil (Längsschnitt), wenn die Terraingestaltung nach ihrer Längenerstreckung und von einem Querprofil, wenn sie nach einer auf die Längenausdehnung senkrechten Richtung dargestellt wird. Wenn sonach von einem Wege oder einem Bache die Mittellinie (Achse) in bezug auf die Gefällsverhältnisse dargestellt ist, so haben wir das Längenprofil des Weges oder des Baches**) vor uns, während alle in bestimmten Punkten des Längenprofils senkrecht auf die Achse aufgenommenen Terrainschnitte Querprofile sind.

Die Aufnahme eines Längenprofils, wie sie für unsere Zwecke etwa bezüglich des Weges *I* und *II*, Fig. 330, in Betracht kommen kann, geschieht, wie folgt: *a)* Auspflocken der wichtigen Gefällsbruchpunkte durch Pflöcke *1*, *2*, *3*, usw. *b)* Genaues Messen der horizontalen Entfernungen *I—1*, *1—2*, *2—3* usw. *c)* Nivellieren dieser Punkte aus der Mitte unter Führung eines Manuales nach dem Aufschreibungsformulare S. 325. Kleine und unwesentliche Terrainbrüche werden durch Vorwärtsnivellieren oder auch durch Nivellieren aus der Mitte innerhalb der wichtigen Gefällsbruchpunkte ermittelt. Alle abnivellierten Punkte werden auf einen bestimmten Haupthorizont, in unserem Falle auf den Punkt *I* bezogen.

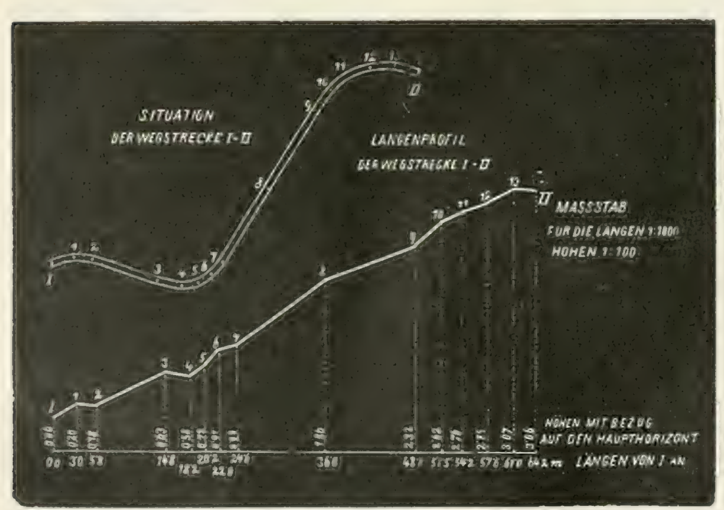


Fig. 330.

*) Hiebei ist vorausgesetzt, daß man das Instrument immer gleich weit von der Vorwärtslatte und der Rückwärtslatte aufstellt. Ist man vollkommen von der Richtigkeit eines Instrumentes überzeugt, dann ist es nicht nötig, sich genau in der Mitte zwischen den einzelnen Stationen aufzustellen. Vorsichtshalber tut man dies aber nach Tunlichkeit dem Augenmaße nach immer.

**) Bei einem Wege nimmt man die Wegmitte, bei einem Bache eine der Uferlinien.

Das Längenprofil ist nach dem Gesagten der Schnitt des Terrains mit den durch die Punkte *I — 1, 1 — 2, 2 — 3* u. s. f. gelegten vertikalen Ebenen. Da diese einzelnen Vertikalebenen mit einander Winkel einschließen, also nicht in einer einzigen Ebene liegen, müssen sie, damit man die einzelnen Längsschnitte auf der Zeichenebene als fortlaufende Linie zeichnen könne, erst in eine einzige Ebene aufgerollt gedacht werden oder man denkt sich die horizontale Projektion, die „Situation", zuerst in eine Gerade ausgezogen, wodurch dann auch die einzelnen Vertikalebenen in eine einzige Ebene zu liegen kommen.

Man trägt nun behufs Zeichnung des Längenprofils die horizontalen Entfernungen der einzelnen Punkte als Abszissen, am besten auf einem nach *mm* quadrierten Zeichenpapiere, vom Anfangspunkte an, auf. Als Auftragsmaßstab kommt für Längenprofile bei Wegen zumeist das Verjüngungsverhältnis 1 : 1000 in Betracht. Die Höhen der einzelnen Punkte vom Haupthorizonte betrachtet man als Ordinaten, wählt aber für ihre Auftragung meist eine kleinere Verjüngung, und zwar gewöhnlich den 10fachen Maßstab der Länge, d. i. zumeist 1 : 100, damit die Gefällsverhältnisse deutlicher hervortreten. Man erhält hiedurch ein sogenanntes verzerrtes Bild, welches aber für den vorliegenden Zweck sehr am Platze ist. Die Beschreibung des verzeichneten Längenprofils geschieht in der aus der Figur ersichtlichen Weise.

Die Querprofile dienen in Verbindung mit den Längenprofilen zur vollständigen Darstellung des Terrains und sind kleine Profile, welche man gewöhnlich nur in einer Ausdehnung von 10—20 *m* senkrecht auf die Längenprofile aufnimmt. Zur Aufnahme der Querprofile bedient man sich beim Waldwegebau meist der Setzlatte oder einer Latte mit einer aufgelegten Röhrenlibelle; die senkrechte Richtung auf das Längenprofil wird mittels einer Kreuzscheibe oder einer Winkeltrommel abgesteckt, und die Aufnahme der Querprofile selbst erfolgt genau in derselben Weise, wie dies beim Nivellieren mit der Setzlatte erklärt wurde. Gewöhnlich verfertigt man von jedem Querprofile im Manuale einen Handriß und schreibt in diesen die entsprechenden Abmessungen ein. Die Bruchpunkte der Querprofile werden nur in manchen Fällen durch kleine Pflöckchen bezeichnet. Größere Querprofile nimmt man in derselben Weise auf, wie die Längenprofile.

Die Auftragung der Querprofile erfolgt ohne Verzerrung und meist so, daß der Maßstab für das Querprofil derselbe ist, wie der Höhenmaßstab des Längenprofiles. Auch für die Auftragung der Querprofile bedient man sich eines nach *mm* quadrierten Zeichenpapieres.

3. Aufgaben über das Nivellieren von Linien.

1. Aufgabe. Es ist das Gefällsprozent einer bestimmten abnivellierten Strecke zu finden.

Unter dem Gefällsprozente versteht man jenes Gefälle, um welches eine Strecke bei 100 *m* Horizontallänge steigt oder fällt. Hat man demnach beispielsweise bei einer horizontalen Längenerstreckung von 25 *m* ein Gefälle von 1·5 *m* gefunden, so berechnet man das Gefällsprozent nach folgendem Schlusse: Bei 25 *m* ist das Gefälle 1·5 *m*, folglich bei 1 *m* $\frac{1·5}{25}$ *m* und bei 100 *m*, d. i. das Gefällsprozent, $\frac{1·5}{25} . 100 = 6$.

Ist umgekehrt das Gefällsprozent gegeben und handelt es sich darum, hieraus auf das Gefälle einer bestimmten Stationslänge zu schließen, so

hat man den Schluß von 100 *m* Stationslänge auf die Einheit und von dieser auf die Maßzahl der vorliegenden Stationslänge zu führen.*)

2. Aufgabe. Durch einen in der Natur gegebenen Punkt *I* eine horizontale Linie in einer bestimmten Richtung nach *II* abzustecken. (Fig. 331.)

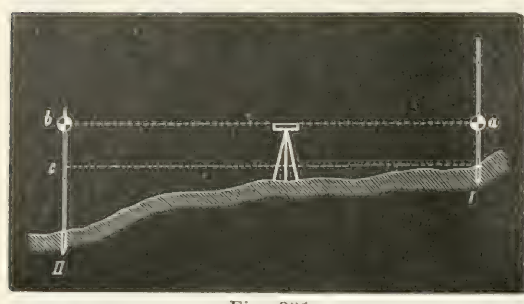


Fig. 331.

Man stellt in *I* und *II* Nivellierlatten und in der Mitte von *I* und *II* das Nivellierinstrument auf, richtet die Visur horizontal und visiert die Lattenscheiben nach *a* und *b* ein. Die durch *I* abzusteckende Linie kann nur dann horizontal sein, wenn sie mit *ab* parallel ist; dies ist dann der Fall, wenn der Pflock in *II* um die Strecke *II c*, das ist also um das Gefälle von *I* nach *II*, gehoben wird. Wäre der Punkt *II* höher gelegen, so müßte das Terrain bis zum Punkte *c* abgegraben werden.

3. Aufgabe. Es ist eine horizontale Linie in der Natur abzustecken, deren Richtung nicht gegeben ist, sondern sich an das Terrain anschließen soll.

Stellt man auf einem vollkommen horizontalen Terrain das Nivellierinstrument auf und visiert nach in einzelnen Punkten aufgestellten Nivellierlatten, so ergibt sich die Lattenhöhe immer gleich der Instrumentenhöhe. Diesen Umstand benützen wir bei der vorliegenden Aufgabe. Man schlägt zu diesem Zwecke im Anfangspunkte einen glatt abgeschnittenen Pflock bis zur Bodenoberfläche ein, stellt das Nivellierinstrument über demselben auf und mißt die Instrumentenhöhe. Hierauf begibt sich der Figurant in die mutmaßliche Richtung der horizontalen Linie und stellt sich mit der Latte, deren Zielscheibe er genau auf die Instrumentenhöhe eingestellt hat, in einem beliebigen Punkte auf. Visiert nun der Geometer horizontal nach der Latte und trifft hiebei die Visur die Zielscheibenmitte, so entspricht der betreffende Lattenaufstellungspunkt der gestellten Forderung. Geht die Visur aber über oder unter der Zielscheibenmitte vorüber, so stellt der Gehilfe die Latte so weit an der Lehne auf- oder abwärts, bis Visur und Zielscheibenmitte zusammenfallen; der so gefundene Lattenfußpunkt liegt dann in der horizontalen Ebene des Ausgangspunktes.

Auf dieselbe Weise können vom Anfangspunkte aus noch mehrere andere Punkte bestimmt werden. Soll aber die Horizontallinie noch weiter fortschreitend abgesteckt werden, so stellt man sich auf einem der bereits gefundenen Punkte neuerdings auf, mißt die Instrumentenhöhe und setzt die Arbeit wie vom Anfangspunkte aus fort. Man erhält auf diese Weise eine Linie, welche an dem Terrain durchaus in der gleichen Höhenschicht fortverläuft und deshalb Schichtenlinie oder Isohypse genannt wird. Wir kommen auf die Schichtenlinien beim Flächennivellement S. 332 zurück.

4. Aufgabe. Es ist durch zwei gegebene Punkte eine Gerade von dem Gefälle der Verbindungslinie abzustecken (Fig. 332).

*) Selbstverständlich kann die Rechnung immer auch mittels Proportion gelöst werden.

1. Lösung. Man bestimmt auf bekannte Weise den Gesamthöhenunterschied von *I* bis *II* und mißt ferner die horizontale Länge *A II*. Entspricht hienach dieser Gesamtlänge ein Totalgefälle I*A*, so findet man z. B. für die Stationslänge *I—1* das zugehörige Gefälle aus der Proportion *A II*: *I A* = *I b* : *1 b*, woraus das Gefälle für die Stationslänge *I b*, nämlich $1b = \frac{IA \times Ib}{AII}$. Stellt man nun das Nivellierinstrument in *I* auf, so muß man den Pflock *1*, um ihn in die Gefällsrichtung *I II* zu bringen, so weit herausziehen, bis man an der Latte die Höhe $1b + J$ abliest. Hat man sonach in dem Pflockkopfe in *1* einen gesuchten Punkt, so überträgt man das Instrument nach *1*, rechnet den auf die horizontale Stationslänge *1—2* entfallenden Gefällsanteil und verfährt in gleicher Weise wie von *I* aus. Zwischen den Punkten *I—1*, *1—2* und *2—II* bedient man sich zur vollständigen Anebnung des Terrains der Pflasterkreuze oder einer Schnur in derselben Weise, wie dies Seite 322 erklärt wurde.

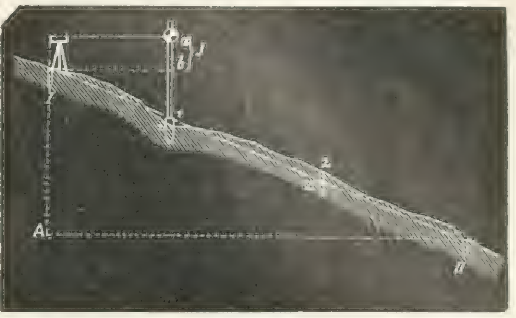


Fig. 332.

Anstatt eines Nivellierinstrumentes kann man sich auch der Setzlatte wie folgt bedienen: Bestimmung des Gesamtgefälles von *I—II*, wobei man gleichzeitig die horizontale Länge *I II* erhält, Berechnung des auf die Lattenlänge (z. B. 4 *m*) entfallenden Gefälles *g* der geraden Verbindungslinie *I II*, Nivellieren mit der Latte von *I* angefangen und Einschlagen von Pflöcken nach jeder Lattenlänge so, daß der Abstand von jedem Pflockkopfe bis zur Latte gleich *g* ist.

2. Lösung durch Nivellieren aus der Mitte. Man stellt das Instrument in der Mitte jeder Stationslänge auf und läßt den jedesmal vorwärtigen Pflock so tief einschlagen (oder herausziehen), bis die Differenz zwischen vorwärtiger und rückwärtiger Lattenhöhe gleich wird dem für die betreffende Stationslänge entsprechenden Gefälle in der geraden Verbindungslinie *I II*. Lösung 2 ist genauer als Lösung 1.*)

3. Lösung. Man nimmt das Profil *I II* nach vorheriger Verpflockung in derselben Weise auf, wie dies früher gesagt wurde, verzeichnet dasselbe mit verzerrten Höhen auf einem Millimeter-Papiere und zieht die gerade Verbindungslinie *I II*. Entnimmt man alsdann mit dem Zirkel dieser Zeichnung die Ordinatenstücke *1—1'* und *2—2'*, so hat man die Abstände, um welche von dem natürlichen Boden aus angeschüttet oder abgetragen werden muß.

5. Aufgabe. Es ist mit einem Nivellierdiopter oder einer Kanalwage an einem Bergabhange die Mittellinie eines Weges zu suchen, der durchaus mit dem gleichen Prozente, z. B. 5%, ansteigt.

Man stellt das Nivellierinstrument im Anfangspunkte *I* (Fig. 333) auf und läßt den Gehilfen eine Nivellierlatte in einer bestimmten Stationslänge, z. B. 20 *m* (horizontal gemessen) aufstellen. Wenn das Terrain 5%, also bei 100 *m* 5 *m* steigt, so beträgt die Ansteigung bei 20 *m* 1 *m*. Vom

*) Wenn es sich um eine größere Genauigkeit handelt, ist das Nivellieren aus der Mitte auch bei der 3. Aufgabe vorteilhafter als jenes aus den Enden anzuwenden. Man muß dann bei der Vor- und Rückwärtsvisur immer die gleichen Lattenhöhen erhalten.

Anfangspunkte *I* aus wird demnach ein Punkt *1* bei 20 *m* Stationslänge dem geforderten Gefällsprozente entsprechen, wenn seine Erhöhung über *I* gleich 1 *m* ist. Diese Erhöhung (Steigung) ist aber gleich der Instrumentenhöhe weniger der Lattenablesung, daher ist umgekehrt die Lattenablesung gleich der Instrumentenhöhe weniger der Steigung. Man stellt daher die Scheibe der Latte auf die Differenz zwischen Instrumentenhöhe und Steigung und läßt den Gehilfen in einer horizontalen Entfernung von 20 *m* so lange die Latte auf dem Hange auf- und abbewegen, bis die horizontale Visur durch die Scheibe geht. Der dadurch gefundene Punkt *1* ist also horizontal 20 *m* von *I* entfernt und liegt 1 *m* höher; die Steigung *I 1* ist also 5%.

Vom Punkte *1* an wiederholt sich der Vorgang von neuem. Die Stationslängen wählt man in gleichmäßigem Terrain länger, in ungleichmäßigem kürzer und berechnet danach die bezüglichen Gefälle. Jeder Punkt wird gut verpflockt und numeriert.

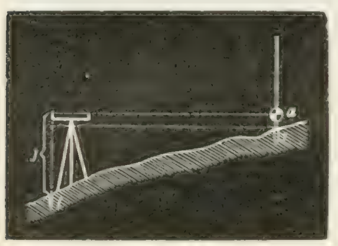


Fig. 333.

Sehr bequem läßt sich diese Aufgabe mit einem Nivellierinstrument lösen, dessen Visierlinie man in die gewünschte Neigung bringen kann. Man hat in dem Falle nur nötig, die Scheibe der Latte in die jeweilige Instrumentenhöhe zu stellen und einen Punkt zu suchen, in welchem die Visur durch die Scheibe geht. Da die Visur die verlangte Neigung hat und sowohl Instrument als Scheibe, d. h. also Anfang und Ende der Visur gleich weit vom Punkte abstehen, so ist klar, daß die Verbindungslinie der beiden Standpunkte mit der Visur parallel ist, daher ebenfalls die gewünschte Neigung besitzt. Diese Methode hat den Vorteil, daß man von der Stationslänge unabhängig ist. Wir haben ein so beschaffenes Nivellierinstrument in dem Bose'schen kennen gelernt, dessen diesbezügliche Anwendung im folgenden Paragraph erläutert ist.

Will man mit gleichbleibender Steigung einen bestimmten Endpunkt erreichen, so wird dies oft nur dann möglich sein, wenn der Weg eine Schleife oder Kehre macht, oder bei stärker geneigtem Terrain und bei der direkten Führung auf einen Berggipfel Serpentinen (Schlangenlinien) beschreibt. Ist ein Weg zwischen zwei Punkten längs eines Baches oder Grabens zu führen, so muß der Weg das Gefälle des Baches annehmen. Man ermittelt daher vorher das Gefälle und die horizontalen Längen des Baches zwischen den gröbsten Gefällsbruchpunkten, rechnet daraus die bezüglichen Bachgefälle und ermittelt nun nach obigem Vorgange die Weglinie. Man nennt das Abstecken von Weglinien das Trassieren der Wege.

II. Das Flächennivellement.

1. Die wichtigste Aufgabe des Flächennivellements ist, aus der gegenseitigen Höhenlage von vielen über eine Fläche verteilten Punkten die Gestaltung der betreffenden Bodenoberfläche bildlich darzustellen. Diese Darstellung geschieht am zweckmäßigsten durch Schichtenlinien oder Isohypsen (Horizontalkurven), das sind Durchschnittslinien der Bodenoberfläche mit horizontalen Ebenen, welche in gleichen Höhenabständen untereinander liegen.

I III II (Fig. 334) stellt den vertikalen Durchschnitt durch einen Hügel vor, der in gleichen Abständen von 1, 10, 20 oder mehr Metern durch

die horizontalen Ebenen P_1, P_2, P_3 und P_4 geschnitten wird. Jede dieser Ebenen erzeugt auf dem Umfange des Hügels eine Schnittlinie (Schichtenlinie), welche die Gestalt des Umfanges der Hügelfläche an der Stelle des Schnittes ergibt.

Es ist nun eine wichtige Aufgabe, die Schichtenlinie in ihrer horizontalen Projektion auf der Karte darzustellen. Zu diesem Zwecke legt man über den Hügel ein Längenprofil *I III II* und senkrecht auf dasselbe mit Hilfe einer Winkeltrommel eine größere Anzahl von Querprofilen, z. B. *a' b'*, *c' d'*, *e' f'* usw., und nimmt diese Profile auf die bekannte Weise auf. Verzeichnet man alsdann das Längenprofil in verjüngtem Maßstabe auf dem Papiere und schneidet man dasselbe durch die gleichweit abstehenden Ebenen *I II*, P_1, P_2, P_3, P_4, so leuchtet ein, daß die Horizontalprojektion dieses Profiles eine gerade Linie *I' III' II'* sein muß und daß die Schnittpunkte der Schichtenebenen mit dem Längenprofil in *I'*. *1'*, *2'*, *3'*, ... *8'*, *II'* als horizontale Projektionen erscheinen müssen. In ähnlicher Weise ermittelt man auch die horizontalen Projektionen aller Querprofile, deren Entfernungen von *I* durch Staffelmessen genau bestimmt werden. So ergibt das Querprofil *e f* durch die Schichtenebenen *e f* und P_1, P_2, P_3 geschnitten die horizontalen Projektionen der Schnittpunkte in *e'*, *9'*, *10'*, *11'*, *12'*, *13'*, *14'*, *f'*, so daß man durch Verbindung aller Querprofilschnittpunkte der zusammengehörigen Ebenen die Horizontalprojektionen der Schichtenlinien zeichnen kann.*)

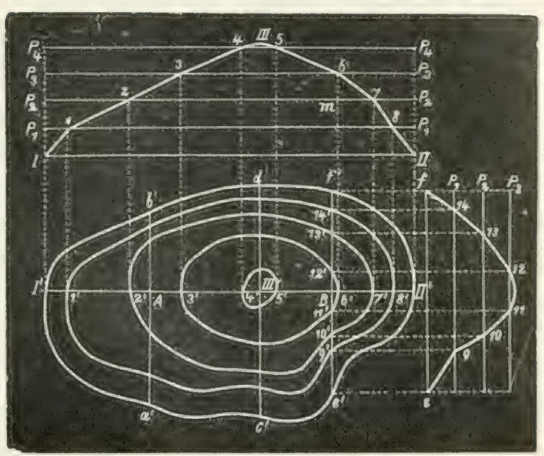


Fig. 334.

Aus dieser Darstellung ist folgendes ersichtlich: Der Neigungswinkel irgend eines Teiles des Hügels ist als Basiswinkel eines rechtwinkligen Dreieckes gegeben, dessen anliegende Kathete der Entfernung zweier Schichtenlinien und dessen andere Kathete dem vertikalen Abstande der Schichtenlinien gleichkommt. Z. B. im Dreiecke 7 *m* 6 ist der Winkel 6 7 *m* der Neigungswinkel des Terrains an jener Stelle des Hügels. Die Kathete 7 *m* = 7' 6' ist die horizontale Entfernung der Schichten, die Kathete *m* 6 ist die vertikale Entfernung der beiden Schichtenebenen P_2 und P_3. Je kürzer die Basis des Dreieckes im Verhältnisse zur Höhe, desto steiler die Hypotenuse, d. h. desto größer der Neigungswinkel.

Es ist daher dort, wo die Schichtenlinien näher aneinander kommen, das Terrain steiler und dort, wo sie weiter voneinander entfernt sind, das Terrain flacher. An einer Lehne verlaufen ferner die Schichtenlinien mehr oder weniger gerade und parallel, und an einem Bergrücken oder einer Nase sind sie ausgebaucht, in einer Mulde oder Schlucht aber eingebaucht. Man kann sonach aus den Schichtenlinien direkt auf die Gestaltung des Terrains schließen, und hierin liegt der große Wert der militärischen Spezialkarten, welche das Terrain

*) Bei ausgedehnten Schichtenlinienkonstruktionen wendet man unter Zuhilfenahme von Winkelinstrumenten andere Methoden an. Durch Holz- oder Tonmodelle und sogenannte Reliefkarten wird dem Schüler das Wesen der Schichtenlinien leicht veranschaulicht.

durch Schichtenlinien ersichtlich machen. Diese Karten dienen dem Forstmanne in vielen Fällen als Orientierungsbehelf und als Grundlage für die Anlage der Waldeinteilung durch Schneisen im Gebirge, zu Vorstudien bei der Anlage von Waldstraßen und Wegen u. dgl. Zur deutlicheren Ersichtlichmachung der Terrainbeschaffenheit enthalten die genannten Karten zwischen den Schichtenlinien auch noch eine Schraffierung, die um so dunkler und stärker ist, je steiler, und um so lichter und schwächer, je weniger geneigt das Terrain ist. Zur Fertigkeit im Lesen solcher Karten ist es gut, dasselbe praktisch zu üben.

2. Eine unebene Fläche soll horizontal geebnet werden.

Man steckt nach Aufgabe 2, S. 330, durch die Mitte der Fläche eine horizontale Gerade ab, wodurch sich eine Reihe von Pflöcken ergibt, deren Köpfe in derselben Horizontalen liegen. Wenn man nun senkrecht auf diese horizontale Gerade von den Pflockköpfen aus wieder neue horizontale Gerade aussteckt, so erhält man ein Netz von Punkten, zwischen denen durch Abtragung und Anschüttung die Fläche vollkommen horizontal gemacht werden kann.

3. Eine gleichmäßig geneigte Fläche herzustellen.

Man pflockt auf der Fläche ein rechteckiges Netz von Punkten so aus, daß die einen Pflockreihen voraussichtlich in die Schicht, die senkrecht darauf stehenden Reihen aber in der Richtung des größten Gefälles zu liegen kommen. Man legt nun auf die bekannte Weise die unterste und oberste Pflockreihe horizontal, bestimmt alsdann das Gefälle eines Punktes der untersten Pflockreihe von einem Punkte der oberen Pflockreihe und legt endlich nach Aufgabe 4, S. 330, das Terrain von den im größten Gefälle verlaufenden Pflockreihen in jeder einzelnen derselben eben.

Die Aufgaben 2 und 3 kommen bei der Anlage von Pflanzschulen öfters vor.

II. Kapitel.

Das eigentliche Höhenmessen.

§ 30. Allgemeines.

Die für unsere Zwecke in Betracht kommenden Lösungen der Aufgaben des Höhenmessens beruhen auf den geometrischen Lehrsätzen von der Ähnlichkeit der Dreiecke und auf dem physikalischen Gesetze von der Abnahme des Luftdruckes mit zunehmender Erhebung. Die auf geometrischen Sätzen beruhenden Instrumente werden aber mehr in der Holzmeßkunde als in der praktischen Geometrie angewendet, weshalb wir, um Wiederholungen zu vermeiden, dieselben hier übergehen und, soweit sie für uns in Betracht kommen, ihre Anwendung auf Grund der Kenntnisse aus der Holzmeßkunde in der Wegebaukunde kurz anführen werden. Dagegen ist es am Platze, den Gebrauch des Bose'schen Nivellierinstrumentes, das unter den Nivellierinstrumenten beschrieben wurde und ebenso als Höhenmesser verwendet werden kann, hier vorzuführen und daran kurz das Höhenmessen mit dem Barometer (Luftdruckmesser) anzuschließen.

§ 31. Das Höhenmessen mit dem Bose'schen Nivellierinstrumente und dem Barometer.

I. Das Bose'sche Nivellierinstrument als Höhenmesser.

1. Gebrauch als eigentlicher Höhenmesser. Um das Instrument zur Messung beliebiger Höhen, etwa von Baumhöhen benützen zu können, ist oben in der Ecke bei B (Fig. 317, 318) der Stift y' angebracht, welcher senkrecht auf der Fläche desselben steht. Die Entfernung $y' v' = r f$ (wenn r auf 0 steht), und die Entfernung $y' f$ enthält genau 50 Teile der Skala. Visiert man nun von dem Punkte $r = 20$ über den Stift y' hinaus nach der Spitze des Baumes x, so wird die Höhe von x über dem Punkte z, welcher mit y' in derselben Horizontalebene liegt, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $y' z x$ und $y' v' r$ ebensoviele Prozente von der horizontalen Entfernung $y' z$ betragen, als $v' r$ Prozente von $v' y'$ beträgt, d. i. in unserem Falle 70%; man hat daher die horizontale Entfernung $y' z$ mit $\frac{70}{100} = 0{\cdot}7$ zu multiplizieren, um $z x$ zu erhalten. Näheres in der Holzmeßkunde.

2. Der Gebrauch des Bose'schen Instrumentes für das Abstecken von Weglinien nach einem bestimmten Gefällsprozente.*) Die bezügliche Aufgabe ist dieselbe, wie jene unter 4 auf S. 330. Wäre z. B. in gebirgigem Terrain ein Forstschutz- oder Reitsteig mit 8% Gefälle abzustecken, so wird das Okular am Messingstreifen $A D$ bis auf den Teilstrich 8 unter dem Nullstriche der Skala verschoben und das Instrument nun im Beginnspunkte m des Steiges (Fig. 318) meßgerecht derart aufgestellt, daß die Visierlinie annähernd in die Richtung der zu bestimmenden Gefällslinie kommt. Sodann geht ein Gehilfe in der mutmaßlichen Richtung des Steiges längs des Hanges mit dem Visierstabe auf einen zweiten Punkt n und rückt dort nach Anweisung des Visierenden den Visierstab so lange auf-, beziehungsweise abwärts, bis die Visur $r f$ die Mitte der Zielscheibe (e) trifft. Die Verbindungslinie zwischen dem Aufstellungspunkte des Instrumentes in m und des Visierstabes in n hat dann ein Gefälle von 8%. Nun geht man mit dem Instrumente auf den eben erhaltenen Punkt n und wiederholt denselben Vorgang wie aus m, geht dann auf den nächsten erhaltenen Punkt usw.

Die Begründung für diesen Vorgang liegt in folgendem: Da ein Teil der Skala längs des Streifens $A D$ (Fig. 317) genau dem 100sten Teile der Entfernung $r f$ entspricht, so sind 8 Teile $\frac{8}{100}$ oder 8% dieser Entfernung. Stellt man daher das Okular auf den Teilstrich 8 ein, so entsteht eine schiefe Visierlinie, welche die Neigung von 8% besitzt. Da weiters der Mittelpunkt der Visierstabscheibe von dem Eisenplättchen b', Fig. 318, ebensoweit entfernt ist, als der Punkt f des Instrumentes vom Eisenplättchen b, ist auch, wenn die Visur durch e geht, die Linie $m n$ parallel mit $r f e$ und daher ebenfalls 8% geneigt. Hiebei kann selbstverständlich die Entfernung zwischen m und n verschieden groß (10 bis 30 m) gewählt werden, und zwar an einem gleichmäßigen Hange größer, in einem unregelmäßigen Terrain kleiner.

Sind für die Absteckung eines solchen Weges der Anfangs- und Endpunkt gegeben, so ist es gut, den Höhenunterschied dieser Punkte aus einer Spezialkarte zu entnehmen und hieraus sowie aus dem gegebenen Neigungsprozente die Länge des Weges zu ermitteln und in die Karte einzutragen. Man steckt alsdann, der Skizzierung in der Karte entsprechend, probeweise eine Linie mit dem angenommenen Gefälle aus, wobei man den Endpunkt in den seltensten Fällen gleich das erstemal erreichen wird. Es wird daher die Arbeit nach Erfordernis mehreremale wiederholt, wobei man, je nachdem man höher oder tiefer hinauskommt, die Gefällslinie entsprechend verkürzt oder verlängert, bis man endlich den gegebenen Endpunkt erreicht. Sollte das Terrain es bedingen, so kann man auch einen oder mehrere Gefällswechselpunkte annehmen, so daß dann die Weglinie nicht durchaus dasselbe Gefälle besitzt.

II. Das barometrische Höhenmessen.

Es beruht auf der bekannten Tatsache, daß der Luftdruck mit zunehmender Höhenlage abnimmt. Wenn man daher ein Barometer zur Verfügung hat, so ist, da außerdem die Art und Weise der Abnahme des Luftdruckes mit zunehmender Höhe bekannt ist, aus den Barometerablesungen in zwei verschieden hohen Punkten die Berechnung des Höhenunterschiedes dieser beiden Punkte möglich.

Für das technische Hilfspersonale kann die Aufgabe in Betracht kommen, mit für seine Zwecke praktisch hinlänglicher Genauigkeit mit einem sogenannten Aneroïd-

*) Hierin liegt der große Wert des Bose'schen Instrumentes.

(Metall-)Barometer, auch kurz Aneroid*) genannt, die Höhendifferenz verschiedener Punkte ermitteln, oder in roher Weise einen Pürschsteig, einen vorübergehenden Holzausfuhrweg (Zug- oder Schlittweg) oder dergleichen ausstecken, d. h. trassieren zu müssen.

1. Die Höhenbestimmung zwischen zwei Punkten. Man entnimmt aus einer Spezialkarte die Höhendaten (Koten) zweier Punkte (z. B. Berggipfel) und erhält hiernach die Höhendifferenz zwischen beiden Punkten, z. B. mit 110 *m*. Nun geht man bei vollkommen ruhigem Wetter mit dem Aneroïd auf den einen Punkt und macht dortselbst die Ablesung mit beispielsweise 740·5 *mm*, begibt sich hierauf so rasch als möglich auf den zweiten Punkt und erhält dortselbst eine Ablesung von 729·5 *mm*. 110 *m* Höhenunterschied entsprechen hienach einer Änderung am Aneroïd von 740·5 *mm* — 729·5 *mm* = 11·0 *mm*, daher entspricht 1 *m* Höhenunterschied einer Änderung am Aneroïd von 11·0 : 110 = 0·1 *mm*.

Ist nach dieser einmaligen, für jedes Instrument besonders vorzunehmenden Feststellung der Höhenunterschied zweier beliebiger Punkte zu bestimmen, so macht man vorerst auf dem einen die Ablesung am Aneroïd, z. B. 743·2 *mm*, geht sodann so rasch als möglich auf den zweiten Punkt und macht wieder die Ablesung, z. B. 735·8 *mm*; die Differenz beider Lesungen ist 743·2 *mm* — 735·8 *mm* = 7·4 *mm*. Da nun die Ablesung von 0·1 *mm* am Aneroïd 1 *m* Höhe entspricht, so entspricht 1 *mm* am Aneroïd $\frac{1}{0·1}$ *m*, und 7·4 *mm* $7·4 . \frac{1}{0·1}$ *m* = 74 *m*. Man findet danach die Höhendifferenz zweier Punkte mit dem Aneroïd, indem man ihre Barometerdifferenz durch den ermittelten Ablesungsfaktor für 1 *m* Höhe dividiert.

Der geschilderte Vorgang ist nur dann ganz richtig, wenn die Temperatur an beiden Orten gleich ist. Es ist deshalb der Genauigkeit der Arbeit sehr förderlich, wenn das Aneroïd so beschaffen ist, daß der Fehler, welcher durch die Verschiedenartigkeit der Temperaturen hervorgerufen wird, sich in der Ablesung selbst aufhebt, oder wenn dem Aneroïde eine kleine Tabelle beigegeben ist, nach welcher die durch die Verschiedenheit der Temperatur entstehenden Fehler durch eine kleine Umrechnung sofort behoben werden können.**) Für Messungen mit geringen Höhenunterschieden bei einer gleichmäßigen Witterung kann jedwede Korrektur außer Rechnung bleiben und jede Ablesung direkt benützt werden. Höhenmessungen mit einem guten Aneroïd stimmen bis auf 1 *m* und weniger mit jenen von Nivellierinstrumenten überein.

2. Die Ausmittlung einer Wegtrasse mit dem Aneroïd mag aus folgendem Beispiele ersehen werden: Ist ein Weg von 8% Neigung abzustecken, so kommen auf 100 *m* 8 *m*, also auf eine Stationslänge von 50 *m* 50 . 0·08 *m* = 4·0 *m* Steigung, entsprechend 4·0 . 0·1 *mm* = 0·4 *mm* am Aneroïd; auf eine Stationslänge von 80 *m* 80 . 0·08 *m* = 6·4 *m* Steigung, entsprechend 6·4 . 0·1 *mm* = 0·64 *mm* am Aneroïd usw. Wenn man nun mit dem letzteren am Anfangspunkte nach oben hin beginnt und daselbst 740·2 *mm* abliest, so muß man, wenn man für den ersten Punkt der Trasse mit dem Meßbande oder schrittweise 50 *m* Stationslänge nimmt, so lange an der Lehne auf- oder abwärts gehen, bis die Ablesung 740·2 *mm* — 0·4 *mm* = 739·8 *mm* ist. Ist dieser Punkt gefunden, so schlägt man einen Pflock ein. Begibt man sich nun behufs Ausmittlung eines folgenden Punktes auf eine mit dem Meßbande horizontal gemessene Stationslänge von z. B. 80 *m*, so muß man mit dem Aneroïd am Ende dieser Stationslänge so lange auf- oder abwärts gehen, bis die Lesung 739·8 *mm* — 0·64 *mm* = 739·16 *mm* beträgt usw. Auf diese Weise kann man, wenn möglich, unter Anwendung noch größerer Stationslängen, einen Weg in ähnlicher Weise wie mit dem Bose'schen Instrumente abstecken, wobei auf alle dortselbst gemachten weiteren Bemerkungen hingewiesen wird. Zwischen je zwei mit dem Aneroïd ermittelten Punkten, insbesondere bei großen Stationslängen, kann man sich mit einem einfachen Nivellierinstrumente, der Setzlatte oder mit Pflasterkreuzen behelfen, oder aber man betrachtet gewöhnlich die mit dem Aneroïd erhaltene Trasse nur als eine provisorische und sucht längs derselben mit dem Bose'schen oder einem anderen Instrumente die definitive Trasse.

---

*) Ein Aneroïd besteht aus einer Metalldose mit einem dünnen elastischen Metalldeckel. Die in der Dose befindliche Luft ist sehr verdünnt, so daß je nach der Stärke des äußeren Luftdruckes der Deckel mehr oder weniger niedergedrückt wird. Die geringste hiedurch hervorgerufene Bewegung wird durch ein Hebelwerk auf einen Zeiger übertragen, der an einer Teilung die Ablesung des jeweiligen Barometerstandes in Millimetern und Bruchteilen gestattet.

**) Bei unvermittelten Temperaturschwankungen, wie bei Gewittern, starken Winden u. dgl., muß der Gebrauch des Aneroïds unterbleiben. Das letztere ist immer mit horizontaler Scheibe in gleicher Höhe zu halten und vor jeder Ablesung sachte mit dem Finger zu beklopfen.

Anhang.

Auflösungen der im I. und II. Teile enthaltenen Rechenaufgaben.

A. Arithmetik.

Zu § 7. Über das Rechnen mit unbenannten und einnamigen Zahlen.

5. Wortaufgaben: 1. *a)* 21 *K*, *b)* 42 *K*, *c)* 207·37 *K*, *d)* 31·71 *K*, *e)* 12047·17 *K*. 2. 1898 *fm*. 3. 911·71 *K*. 4. *a)* 1·5 *fm*, *b)* 11·62 *fm*, *c)* 15·94 *fm*, *d)* 1500·56 *fm*. 5. *a)* 1·10, *b)* 2·31, *c)* 27·22 Steinbrechertagschichten. 6. 15·94 Tage. 7. 471·62 *ha* um 248499·96 *K*. 8. 99·75 Tagschichten 179·55 *K*. 9. 214·62 *K*. 10. 43·52 *K*. 11. 507·66 *fm*, 5076·21 *K*. 12. 297·63 *K*. 13. 8 *K*. 14. 15·24 *rm*. 15. 44·15 *K*. 16. 1 *fm* = 1·3 *rm* Scheith., = 1·23 *rm* Prügelh., = 1·75 *rm* Stockholz. 257·55 *fm* = 334·815 *rm* Scheiter. 17. Pro *ha* 338·29 *fm* Nutzholz, 277·10 *rm* Brennholz. Gesamtholzanfall pro *ha* 532·25 *fm*. 18. 1 *m* = 20 *h*, 735 *m* = 147·00 *K*. 19. 59·28 *K*. 20. 0·67 *K*. 21. *a)* 4·29048 *ha*, *b)* 0·7 *ha*. 22. 6535 m^2.

Zu § 15. Über das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

1. 8500 *mm*, 90120 *mm*, 9003000 *mm*, 708 *mm*, 165 *mm*. 2. 130500 m^2, 1506 m^2; 300000000 m^2, 19000000 m^2, 371000 m^2. 3. 5000000 cm^3, 6015000 cm^3, 33027026 cm^3, 27000 cm^3, 5000039 cm^3, 16004000 cm^3. 4. 3000 *kg*, 400 *kg*, 6503 *kg*, 3548 *kg*. 5. 315 *l*, 2103 *l*, 796 *l*. 6. 30160 Bogen, 22005 Bogen, 609 Bogen. 7. 360 St., 195 St., 324 St. 8. 8760^h, 8784^h. 9. 0·37 *m*, 4·856 *m*, 0·348 *m*, 235·5 *m*. 10. 0·243 *km*, 0·3749 *km*, 1·4483 *km*, 0·33806 *km*. 11. 0·39 m^2, 0·000347 m^2, 0·5846 m^2, 57809·34 m^2. 12. 0·0348 *a*, 27·59 *a*, 0·003441 *a*, 0·35801432 *a*. 13. 0·0000224251 *ha*, 0·00345178 *ha*, 0·218943 *ha*, 0·4734112 *ha*, 3·5766881 *ha*. 14. 0·00003 m^3, 0·002431 m^3, 0·000074839 m^3, 0·083411 m^3, 0·033343511 m^3, 0·000647801441 m^3. 15. 2 Tage $12^h\ 38^m\ 24''$. 16. 239 Tage $10^h\ 43^m$. 17. $153^0\ 0'\ 43·2''$, $7^0\ 54'\ 30''$. 18. $32^0\ 47'\ 68''$, $8^0\ 75'\ 43''$. 19. $35^0\ 30'\ 47·8''$ a. T. 20. $52·507971^0$ n. T. 21. $202·7438^0$, $14500·53^0$, $203·4683^0$. 22. 90·7152 *m*, 2362·4501 *m*, 85·2298 *m*. 23. 3879·2075 c′, 11·2988 c′, 27139·4107 c′. 24. 25·1621 m^3, 2210·0014 m^3, 6502·6791 m^3. 25. 510·8 *fm*. 26. 215 *m*, 2 *dm* 2 *cm* 9 *mm*. 27. 212 *km* 2 *hm* 4 *dkm* 3·8 *m*. 28. 132 *ha* 30 *a*. 29. 158 m^2 56 dm^2 44 cm^2 32 mm^2. 30. 67 J 118□⁰. 31. 499 *hl* 12 *l*. 32. 526 m^3 25 dm^3. 33. $145^0\ 4'\ 12''$ a. T. 34. $113^0\ 12'\ 75''$ n. T. 35. 11 *m* 8 *dm* 1 *cm* 9 *mm*. 36. 8 *ha* 89 *a*. 37. 6 Tage $5^h\ 31^m\ 24''$. 38. $110^0\ 30'\ 51''$ a. T. 39. $141^0\ 63'\ 71''$ n. T. 40. 12 m^3 737 dm^3. 41. 915 m^2 4 dm^2. 42. 1893 m^3 381 dm^3. 43. 230 *ha* 8 *a*. 44. $1492^0\ 55'\ 48''$. 45. 370 *hl* 76 *l*. 46. 728 J 1128□⁰. 47. 2472 *K* 37 *h*. 48. 5 m^3 267 dm^3 590 cm^3. 49. $7^h\ 29^m\ 36''$. 50. 119 *ha* 79 *a* 70 m^2. 51. 942 *ha* 70 *a* 54 m^2, 317126·10 *K*. 52. 211·18 *K*. 53. 3375 *K*. 54. 550·24 *K*. 55. 321·75 *K*. 56. 44·7 *rm*. 57. 12 m^2. 58. 1·75″. 59. 2·73 *m*. 60. 13mal. 61. 73·64 *K*.

Zu § 18. Über die Teilbarkeit der Zahlen.

Die Aufgaben 1 bis einschließlich 6 wird wohl jeder leicht selbst ausführen können. 7. M = 2, 6, 4, 6, 7, 8. 8. M = 18, 10, 11, 12, 13. 9. M = 15, 9, 21, 33. 10. v = 252, 132, 2415, 480, 5152. 11. v = 14549535. 12. v = 5040. 13. v = 97698825. 14. v = 180480. 15. v = 25200. 16. v = 12600.

Zu § 27. Über das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

1. $2\frac{5}{9}$, $3\frac{1}{6}$, $1\frac{61}{72}$, $2\frac{13}{16}$, $3\frac{13}{15}$, $12\frac{13}{14}$, $3\frac{46}{105}$, $205\frac{119}{348}$. 2. $\frac{29}{8}$, $\frac{68}{9}$, $\frac{148}{11}$, $\frac{303}{13}$, $\frac{6563}{64}$, $\frac{11308}{111}$, $\frac{1597208}{1597}$. 3. $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, $\frac{35}{60}$, $\frac{12}{60}$, $\frac{51}{60}$, $\frac{46}{60}$. 4. $\frac{3003}{3960}$, $\frac{2205}{3960}$, $\frac{2060}{3960}$, $\frac{1688}{3960}$. 5. $\frac{31027125}{80305500}$, $\frac{19915761}{80305500}$, $\frac{1467950}{80305500}$.

$\frac{2506350}{80305500}$. 6. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{12}{31}, \frac{1}{4}, \frac{1}{15}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}$. 7. $\frac{225}{300}, \frac{250}{300}, \frac{210}{300}, \frac{275}{300}, \frac{108}{300}, \frac{65}{300}$. 8. $\frac{3525}{5040}, \frac{2100}{5040}, \frac{4680}{5040}, \frac{945}{5040}, \frac{1960}{5040}, \frac{2310}{5040}$. 9. $\frac{179955}{191952}, \frac{181288}{191952}, \frac{93744}{191952}, \frac{94944}{191952}$, 10. $\frac{14605}{23241}, \frac{12871}{23241}$. 11. $\frac{4131}{4182}, \frac{34030}{4182}$. 12. 2. 13. $2\frac{2}{9}$. 14. $2\frac{1}{6}$. 15. $2\frac{36653}{62985}$. 16. $2\frac{26189}{652245}$. 17. $1\frac{54}{217}$. 18. $79\frac{5}{8}$. 19. $416\frac{7}{24}$. 20. $111\frac{5}{12}$. 21. $191\frac{76}{275}$. 22. $56\frac{79}{1529}$. 23. $13\frac{33}{[illegible]}$. 24. $\frac{7}{24}$. 25. $\frac{98}{511}$. 26. $\frac{503}{1054}$. 27. $1\frac{1}{2}$. 28. $75\frac{79}{[illegible]}$. 29. $95\frac{103}{240}$. 30. $\frac{793}{2035}$. 31. $23\frac{808}{811}$. 32. $8\frac{9}{13}$. 33. $1\frac{3}{8}$. 34. $85\frac{268}{969}$. 35. $1\frac{14446}{18901}$. 36. $\frac{2}{3}$, 4, $4\frac{1}{8}$, 20, $5\frac{1}{2}$. 37. $564\frac{4}{9}$, 12122, $229311\frac{57}{73}$. 38. $3\frac{327}{385}$, $362\frac{23}{25}$, $188\frac{596}{1667}$. 40. 3750 m^2. 41. 165·40925 m^3. 42. $\frac{1}{6}, \frac{1}{28}, \frac{15}{496}, \frac{51}{913}$. 43. $\frac{8}{15}, \frac{35}{36}, 3\frac{11}{30}, 5\frac{69}{76}$. 44. $\frac{4}{273}, \frac{8}{1017}, \frac{67}{8787}, \frac{67}{2335}$. 45. $38\frac{17}{72}$, $10\frac{75}{169}$, $45\frac{403}{675}$. 46. $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{7}{11}$. 47. $\frac{39}{104}, \frac{228}{289}, \frac{4148}{4797}, \frac{22131466}{65009059}$. 48. $\frac{2336755}{8413966}, \frac{1}{1002}, \frac{444657}{602602}, \frac{772551}{1759925}$. 49. $\frac{48}{875}, \frac{4}{375}, \frac{224}{40375}$. 50. $51\frac{3}{[illegible]}$, $547\frac{93}{161}$, $11619\frac{15}{323}$, $19\frac{167}{841}$. 51. $60982\frac{1150}{1173}$, $206199\frac{119}{255}$. 53. 7·05 *kg*, 12·69 *kg*, 12·53 *kg*, 24·44 *kg*. 54. $\frac{27}{[illegible]}$, $2\frac{32}{[illegible]}$, $\frac{20301}{[illegible]}$, $24\frac{1731}{[illegible]}$. 55. $\frac{29887}{[illegible]}$, $\frac{2090}{[illegible]}$, $\frac{1385599}{[illegible]}$. 56. $1\frac{379}{[illegible]}$, $1\frac{32384}{[illegible]}$, $1\frac{353}{[illegible]}$. 57. $\frac{11}{104}, \frac{15}{221}, \frac{19}{525}, \frac{851}{899}, \frac{1833}{1763}, \frac{6018}{5035}$. 58. 1·04. 59. 78. 60. 35·67 *h*. 61. 0·75, 0·83, 0·538461, 0·43902, 0·90625, 0·63478260869565217391304, 0·117882, 0·278048. 62. 0·4, 0·375, 0·263157894736842105, 0·325301 . . . . . , 0·296, 0·399602 . . . . , 0·81, 0·105. 63. $\frac{2}{3}, \frac{67}{99}, \frac{116}{333}, \frac{1667}{3333}, \frac{228301}{333333}$. 64. $3\frac{7}{9}$, $5\frac{889}{999}$, $17\frac{41}{99}$, $151\frac{328}{999}$, $2\frac{500132}{999999}$. 65. $\frac{695}{1998}, \frac{1687}{3300}, \frac{617}{1800}, \frac{28759}{33000}$. 67. $51\frac{2162}{4995}$, $103\frac{2903}{5625}$, $153\frac{24113}{111100}$. 68. 4·875, 0·07083. 69. 0·55, 0·4, 5·27. 70. 0·4, $\frac{1687}{66000}$, $37\frac{5027}{9999}$.

Zu § 29. Über das Potenzieren.

1. 196, 484, 576, 784, 900, 1369, 1681, 7569, 9801. 2. 101124, 262144, 416025, 619369, 968256. 3. 8105409, 42915601, 58874929, 62220544, 81162081, 82646281. 4. 2·0164, 0·316969, 0·45400644, 2·1139996816, 6·640382687236. 5. 2210·8804, 0·000014447601, 0·0000000225, 900·060001, 841·0110200361. 6. $\frac{25}{36}, \frac{49}{64}, \frac{7569}{8649}, \frac{11025}{42849}, \frac{256}{2025}, \frac{289}{6889}, \frac{90601}{252004}$. 7. 1728, 5832, 19683, 46656, 103823, 328509, 474552, 857375. 8. 14348907, 202262003, 62099136, 210644875, 27270901, 8242408. 9. 34169931125, 1006012008, 29332096704, 125075015001, 494913671000. 10. 449110734742209478381568, 276912878636781575534679507, 5498374087591983509509261000. 11. 0·000001953125, 0·039304, 0·857645778501, 4913·867051001, 69039·073562692904, 0·000001. 12. $\frac{343}{512}, \frac{4913}{6859}, \frac{4096}{110592}, \frac{68921}{157464}, \frac{300763}{438976}, \frac{592704}{912673}$.

Zu § 33. Über das Wurzelziehen.

1. 25, 47, 98, 901, 297, 697, 19683. 2. 0·91, 1·21, 0·16, 0·7071, 2·9, 3·22, 0·587. 3. 0·4472, 0·679366 . . . . , 0·7977 . . . , 1·94, 1·44, 0·96. 4. 602, 984·39, 438·42, 169·04, 83·3. 5. 4·5071, 0·9706, 2·3, 0·138 . . . . , 0·680049. 6. 0·72 . . . . , 1·8897, 0·8093, 0·587, 2·1154, 0·2143. . . .

Zu § 36. Über die Verhältnisse und Proportionen.

1. $1\frac{7}{9}$, $1\frac{53}{67}$, $1\frac{1}{15}$, $\frac{33}{166}$, $1\frac{55}{137}$, $\frac{333}{2440}$, $\frac{1007}{48580}$, $9\frac{1}{11}$. 2. 15, 33, 39, 63, $23\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{13}$, $53\frac{4}{7}$. 3. $1\frac{7}{8}$, $2\frac{3}{16}$, $2\frac{13}{16}$, $3\frac{3}{4}$, $5\frac{5}{16}$, $2\frac{11}{112}$, $4\frac{33}{128}$. 4. 78 : 35, 5 : 3, 7 : 5, 904 : 133, 5575 : 1533, 2536 : 1705. 5. 9 : 19, 74 : 147, 162 : 181, 334 : 297, 35 : 13. 6. 3·1 : 1·9. 7. 50 : 1, 1 : 0·575464. 8. 20 : 17. 9. x = 96·15, x = $41\frac{23}{29}$. 10. x = $3\frac{393}{464}$, x = $25\frac{7}{11}$, 11. x = $4\frac{1052}{5713}$, x = 13·1873. 12. x = = 4·91, x = 15·108 . . . . 14. $\frac{[illegible]}{4}$: 7 = x : $1\frac{1}{2}$, 3 : 6 = 4 : 8, 25 : 2 = x : [illegible]. 15. 35 : 6 = 3 : x, 234 : 7 = 113 : x, 1 : 1 = 1 : 1.

Zu § 39. Regeldetri-Aufgaben.

1. 4276·95 *K*. 2. 148·14 *K*. 3. 47·52 (praktisch genommen $47\frac{1}{2}$) Tagschichten. 4. 47·6 *m*. 5. 17051 Pflanzen. 6. 533$^1/_3$ *fm*. 7. 28·5 *m*. 8. 2677·5 *m*. 9. 25 *rm*. 10. 20 Tage. 11. 38·8 *rm*. 12. 502 Bäume. 13. 2 *K*. 14. 153·3 Umdrehungen. 15. 6750 Pflanzen. 16. 842·59 m^3 Kies. 17. 119·88 *K*. 18. 3 Monate 12·8 Tage. 19. 48 Arbeiter. 20. 14 Tage. 21. 46$^2/_3$ Bretter. 22. 7$^1/_2$ Sägen (= 7 Sägen und 1 Mann).

Zu § 41. Über die Prozentrechnung im allgemeinen.

4. 2·48 $^0/_0$. 5. 4069·8 *fm*, 6921·18 *rm*, zusammen 9468·32 *fm*. 6. 17953·36 *rm*. 7. Bauholz 49·59 $^0/_0$ oder 650 *fm*. Brennholz 39·56 $^0/_0$ oder 446·76 *fm*. Nutzrinde 10·85 $^0/_0$ oder 122·50 *fm*. 8. 254·3595 *fm* Nutzholz, 407·92 *rm* Brennholz und 85·03 *rm* Rinde: Wert des Bestandes = 4097 *K* 10 *h*. 9. 5 *K* 98 *h*. 10. 560 *K* 48 *h*. 11. 608·16 *fm*. 12. 0·875 m^3

tonige, 1·625 m^3 sandige Bestandteile. 13. 272·246 *fm* weiches, 463·554 *fm* hartes Holz. 14. Nach Stammzahl: 91·52% Buchen-, 8·48% Lärchenstämme; nach Holzmasse: 81·81% Buchen-, 18·19% Lärchenholz. 15. 10·26 *kg* Fichten-, 3·57 *kg* Kiefern-, 6·38 *kg* Lärchensamen. 16. 4896·34 *fm* vor, 4494·84 *fm* nach der Durchforstung. 17. 4·5%. 18. 8013·16 *m*. 19. 211·16 *m*. 20. 2·28% Fichten-, 2·52% Eichen-, 1·09% Eschen-, 1·62% Weißkiefernpflanzen. 21. *a)* 918·73 *m*, *b)* 569·98 *m*. 22. 142 *fm*. 21·06%. 23. 650·41 *fm*. 24. 52·66 [illegible]. 25. 1188·9 *hl* 26. 57·29%.

Zu § 42. Über die Zinsrechnung.

5. 3·12%. 6. 3·32%. 7. 689 *K* Gewinn, 5·84%. 8. 146000 *K*. 9. 24285·71 *K*. 10. 2357·99 *K*. 11. 736·25 *K*. 12. 14142·61 *K*. 13. 101·08 *K*. 14. 17 Jahre, 1 Monat, 17 Tage. 15. $33\frac{1}{3}$ Jahre. 16. 342857·14 *K*. 19. Beim ersten Zahlungstermine 1200 *K*, beim zweiten 1206 *K*, beim dritten 1218 *K* und beim vierten 1236 *K*. 20. 112704·37 *K*. 21. 12377·36 *K*. 22. 798·58 *K*.

Zu § 44. Über die Teilregel.

1. *a)* 11·40 *K*, *b)* 17·10 *K*, *c)* 20·90 *K*, *d)* 15·20 *K*. 2. 375 *kg* Salpeter, 65 *kg* Kohle, 60 *kg* Schwefel. 3. *A*. 187·5 *K*, *B*. 112·5 *K*, *C*. 138·0 *K*, *D*. 156·0 *K*, Gewinn = 15%. 4. *B*. 12·8 *K*, *C*. 14·4 *K*, *D*. 13·8 *K*, Gesamtnutzen = 61 *K*. 5. *A*. 70·25 *fm*, *B*. 75·88 *fm*, *C*. 86·41 *fm*. 6. 13·624 Volumteile Sauerstoff, 51·35 Volumteile Stickstoff, 0·026 Volumteile Kohlenstoff. 7. Holzmeister 469·50 *K*, *a)* 381·28 *K*, *b)* 352·95 *K*, *c)* 367·12 *K*, *d)* 380·00 *K*, *e)* 385·15 *K*. 8. *A*. 648 *K*, *B*. 729 *K*, *C*. 373·5 *K*. 9. *A*. 1411·77 *K*. *B*. 1235·29 *K*. *C*. 352·94 *K*. 10. *A*. 216 *K*, *B*. 157·5 *K*, *C*. 120 *K*.

Zu § 46. Über die Kettenrechnung.

1. $3^h\ 46^m\ 15''$. 2. 8 J 1108·2□°. 3. 924·82 *K*. 4. 23·03% Gewinn = 87·5 fl. 5. 4 fl. $02\frac{1}{2}$ kr. 6. 10 *K*. 7. 6·24 *K*. 8. 63 Weiber.

Zu § 49. Über die Mischungsrechnung.

1. Gesamtentlohnung 228·40 *K*, Durchschnittsentlohnung 1·80 *K*. 2. 8·86 *K*. 3. Der tarifmäßige Durchschnittspreis ist 8·50 *K*. 4. 69·54%. 5. 15·55 *rm* à $7\frac{3}{4}$ *K*, 19·45 *rm* à $5\frac{1}{2}$ *K*. 6. 2·2 *K*. 7. 72 *rm* à 4·64 *K*, 48 *rm* à 3·84 *K*. 8. 16 *rm* à 4·80 *K*, 16 *rm* à 6 *K*, 20 *rm* à 8 *K*.

Zu § 53. Aus der Formellehre.

1. $g = \frac{F}{h}$. 2. $r = \frac{U}{2\pi}$. 3. $s = \sqrt{F}$. 4. $d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}}$. 5. $h = \frac{2F}{a+b}$. 6. $g = \frac{3K}{h}$. 7. $r = \sqrt{\frac{3K}{4\pi}}$. 8. *a)* $R = \frac{M}{\pi \cdot s} - r$, *b)* $r = \frac{M}{\pi \cdot s} - R$, *c)* $s = \frac{M}{\pi(R+r)}$.

Zu § 54. Über das Rechnen mit allgemeinen Zahlen.

a) 19, *b)* 32, *c)* 5, *d)* 96.

Zu § 55. Über das Addieren allgemeiner Zahlen.

a) $a + b + c + d + f + g$. *b)* $a + b + c + d + e + f + g + h$. *c)* $5n + 3x + 3y + 4z$. *d)* $14u$. *e)* $8x + 5y$. *f)* $16x + 17y + 12z$. *g)* $4x$. *h)* my. *i)* $6m$. *k)* $2\frac{43}{60}a$. *l)* $7m + 5n$. *m)* $1\frac{17}{24}x + 1\frac{47}{63}y$. *n)* $12\frac{47}{56}x$. *o)* $4·1b + 0·5c + 7·6d$. *p)* $5\frac{9}{440}x$.

Zu § 57. Über das Auflösen von Klammern.

a) $3m$. *b)* O. *c)* $16y$. *d)* $\frac{3}{8}m$. *e)* $9x + 2y$. *f)* $15x - y$. *g)* $5m - 2n$. *h)* $5m + 2n$. *i)* $\frac{11}{40}a$. *k)* $5x$. *l)* $10a + 5b$. *m)* $2a - b$. *n)* $11x + 15y$. *o)* b [illegible]. *p)* $28s + 7t + 8u$.

Zu § 58. Über die Multiplikation allgemeiner Zahlen.

a) $68a^2b^2$. *b)* a^3bmn. *c)* m^3x^3. *d)* $1120b^{11}$. *e)* $\frac{35}{128}a^2b^2$. *f)* $90a^3b^{12}$. *g)* $51x^3y$. *h)* $a^{28}b^{28}$. *i)* $2^{28} \cdot 3^{28}$. *k)* $12xy$. *l)* $6ac$. *m)* $15xy$. *n)* $abcdef$. *o)* $5axyz$. *p)* ab.

Zu § 59. Über die Division allgemeiner Zahlen.

a) 6. *b)* 12. *c)* $6y$. *d)* $4cd$. *e)* c^4. *f)* ab. *g)* $2ab$. *h)* $mnop$. *i)* $6x^4y^2$. *k)* $2·07a$. *l)* $\frac{x}{2y}$. *m)* $\frac{ab}{xy}$. *n)* $\frac{abc}{xyz}$. *o)* $\frac{ab}{cd}$.

Zu § 61. Über die Addition algebraischer Zahlen.

a) 23. *b)* 13. *c)* $4xy$. *d)* xy. *e)* $-10a$. *f)* $-9ab$. *g)* $2{\cdot}5x$. *h)* $-4{\cdot}5x$. *i)* $4z$. *k)* $1\frac{1}{4}a^2$. *l)* $\frac{37}{66}x^2$. *m)* $8{\cdot}5x^2$. *n)* $3{\cdot}5a^4 + 8a^2b$. *o)* $-359{\cdot}72a$. *p)* 66. *q)* $-4{\cdot}25x + 5y$.

Zu § 62. Über die Subtraktion algebraischer Zahlen.

a) 7. *b)* 24. *c)* -39. *d)* 14. *e)* $9a$. *f)* $83b$. *g)* $-94x$. *h)* $-13{\cdot}7y$. *i)* $-9{\cdot}5m$. *k)* $+144n$. *l)* $-1\frac{1}{4}x$. *m)* $37ab$.

Zu § 63. Über die Addition und Subtraktion algebraischer Zahlen.

a) $-141{\cdot}075$. *b)* 3. *c)* $2a^2b - 7c$. *d)* $-9 - 6a + 5b + 2ax - 2x^2$. *e)* $2a - b - c - d$. *f)* $2b - 7c - 26$. *g)* $7\frac{7}{12}$. *h)* $\frac{2}{3}x$. *i)* y.

Zu § 64. Über die Multiplikation algebraischer Zahlen.

a) $54ab$. *b)* $-52{\cdot}5cd$. *c)* $-7\frac{7}{27}ef$. *d)* $-\frac{23}{45}x^2$. *e)* $192mo$; $68no$. *f)* $-10\frac{15}{16}ac + 6{\cdot}3bc$. *g)* $14\frac{1}{4}x^2 + 27\frac{1}{12}xy + 12\frac{1}{2}y^2$. *h)* $108ab + 180ac - 135bc - 81b^2$. *i)* $24\frac{3}{8}m^2 - 63\frac{31}{40}mn + 40\frac{22}{25}n^2$. *k)* $60a^2 - 45ab + 72ac - 54bc$. *l)* $a^4 - 22a^3 + 159a^2 - 418a + 280$. *m)* $48a^3 - 28a^2b - 28ab^2 + 15b^3$. *n)* $208x^2 + 41yx + 112xz - 15y^2 - 21yz$. *o)* $216a^3 + 108a^2b - 54ab^2 - 27b^3$. *p)* $y^4 - 2y^2z^2 + z^4$. *q)* $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6$. *r)* $M^4 - m^4$.

Zu § 65. Über die Division algebraischer Zahlen.

a) $2a$. *b)* 3. *c)* $12a$. *d)* $8ab$. *e)* $9 - abc$. *f)* $2\frac{25}{28}b$. *g)* $8b - 7$. *h)* $1 + 6a^2b + 9a^4b^2$. *i)* $-3yz + 6y - 5z$. *k)* $a - b$. *l)* $x + y$. *m)* $5a + 4$. *n)* $a + 3b$.

Zusatz: Über das Zerlegen allgemeiner und algebraischer Zahlenausdrücke in Faktoren.

a) $x.y.z$, $2.2.2.3.a.b$, $2.2.2.2.a.a.b$, $3.3.3.x.x.y.y$, $2.2.3.m.n.n.x.x.x$, $13.a.b.b.c.c.c$. *b)* $9y.(x + 3y)$. *c)* $(5a + 3b).(5a - 3b)$. *d)* $(2a + b).(2a - b)$. *e)* $.(m + n).(m - n)$.

Zu § 66. Über das Rechnen mit gebrochenen allgemeinen Zahlen.

1. Das Addieren der Brüche.

a) $\frac{a + c + d}{x}$. *b)* $\frac{a + b + c}{2}$. *c)* $\frac{a}{c}$. *d)* $\frac{2x^2 + 3a}{x}$. *e)* $\frac{2a}{a - b}$. *f)* $\frac{10ac + 15b[illegible]1}{5c}$. *g)* $\frac{bcd + 2acd + 3abd + 4abc}{abcd}$. *h)* $\frac{30a - 20b + 15c - 12d}{60}$. *i)* $\frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}$. *k)* $\frac{2(3a^2 - 10a + 4)}{a(a^2 - 6a + 8)}$. *l)* $\frac{100 - 7x}{4(16 - x)}$. *m)* $\frac{11 + 12x}{3}$.

2. Das Subtrahieren der Brüche.

a) $\frac{2a - b}{c}$. *b)* $\frac{b}{m}$. *c)* $\frac{2y}{x^2 - y^2}$. *e)* $-5x + 2y + 4z$. *g)* $-\frac{[illegible]}{y^2z}$. *h)* $-\frac{a}{6}$. *i)* $\frac{[illegible] - 2x - 3}{x^3}$. *k)* $-\frac{92 + 129a - 90a^2 - 11a^3}{5 + 11a - 13a^2 - 3a^3}$.

3. Das Multiplizieren der Brüche.

a) $\frac{15x^2yz}{4a}$. *b)* $-\frac{18abcd}{5x}$. *c)* $-\frac{a^2b^2c^2d}{m}$. *d)* $-(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$. *e)* $\frac{10ace}{21bdf}$. *f)* $\frac{4a^3 - 13a^2 + 22a - 15}{a^8}$. *g)* $\frac{175x^2 + 21x - 658}{72}$. *h)* $-\frac{30x^2 - 33x - 24}{30x^2 + 43x + 4}$. *i)* $-\frac{2(54x^2 + 22x - 20)}{5(39x^2 \; 16x + 1)}$.

4. Das Dividieren der Brüche.

a) $-\frac{3y^2}{16ab}$. *b)* $-\frac{c}{xy}$. *c)* $\frac{2xyz}{7}$. *d)* $\frac{9x + 52}{100}$. *e)* $\frac{x}{a^2 - b^2}$. *f)* $\frac{19 + y}{6}$. *g)* $\frac{4a(2a - 3b)}{10a^2 - 2ax + 25ab - 5bx}$. *h)* $\frac{4(7x - 17)}{21}$. *i)* $2\frac{3}{10}$. *k)* $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$.

5. Das Potenzieren der Brüche.

a) $\frac{x^2}{y^2}$. *b)* $\frac{169x^2}{36a^2}$. *c)* $\frac{0{\cdot}25a^2}{0{\cdot}49c^2}$. *d)* $\frac{9a^2}{16b^2} + \frac{25c^2}{36a^2} + \frac{49e^2}{64f^2}$. *e)* $\left(\frac{x}{y}\right)^2$. *f)* $\left(\frac{2xy}{3y}\right)^2$. *g)* $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2 + \left(\frac{5c}{[illegible]}\right)^2 + \left(\frac{7e}{[illegible]}\right)$

6. Das Radizieren der Brüche.

$a)\ \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b^3}},\ \frac{x}{2},\ \frac{xy}{a^2b^2},\ \frac{a\,.\,\sqrt{0\cdot 86}}{b\,.\,\sqrt{0\cdot 98}}.\ b)\ \frac{a}{b},\ \frac{x^3}{y^3},\ \frac{6abc^2}{8xy^2z^4}.$

Zu § 67. Über das Quadrieren allgemeiner Zahlen.

$a)$ $x^2 + 2x + 1$, $x^2 - 2x + 1$, $9a^2 + 24ab + 16b^2$, $\frac{9x^2}{16} - \frac{5xy}{4} + \frac{25y^2}{36}$. $b)$ $a^2 + 4ab + 6ac + 4b^2 + 12bc + 9c^2$, $x^2 - 64x - 4xy + 128y + 4y^2 + 1024$, $4a^2 - 16ab + 16b^2 - 24ac - 48bc + 36c^2$. $c)$ $m^2 + 4mn + 6mo + 8mp + 4n^2 + 12no + 16np + 9o^2 + 24op + 16p^2$, $25x^2 - 30xy + 40xz - 60nx + 9y^2 - 24yz + 36ny + 16z^2 - 48nz + 36n^2$.

Zu § 68. Über das Quadratwurzelziehen aus allgemeinen Zahlen.

$a)$ $\sqrt{9a^2 - 24ab + 16b^2} = 3a - 4b$, $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} = a^2 + 1$, $\sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2 - 16ac - 24bc + 16c^2} = 2a + 3b - 4c$. $b)$ $a - b$. $c)$ $3x - y$. $d)$ $x - 2y + 3z$.

Zu § 69. Über das Kubieren allgemeiner Zahlen.

$a)$ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$, $27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$, $z^3 + 12z^2u + 48zu^2 + 64u^3$, $y^3 - 12y^2 + 48y - 64$, $\frac{x^3}{8} - \frac{3x^2y}{32} + \frac{3xy^2}{128} - \frac{y^3}{512}$. $b)$ $64x^3 - 96x^2y + 144x^2z + 48xy^2 - 144xyz + 108xz^2 - 8y^3 + 36y^2z - 54yz^2 + 27z^3$, $a^3 - 9a^2b + 3a^2c + 27ab^2 - 18abc + 3ac^2 - 27b^3 + 27b^2c - 9bc^2 + c^3$, $343x^3 + 1323x^2y - 588x^2z + 1701xy^2 - 1512xyz + 336xz^2 + 729y^3 - 972y^2z + 432yz^2 - 64z^3$.

Zu § 70. Über das Kubikwurzelziehen aus allgemeinen Zahlen.

$a)$ $\sqrt[3]{8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3} = 2a + 3b$,

$\sqrt{x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3} = x + 3y$,

$\sqrt[3]{a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3} = a - 2b$,

$\sqrt[3]{8x^3 - 48x^2z + 96xz^2 - 64z^3} = 2x - 4z$.

$b)$ $x - 1$, $a + b + c$. $c)$ $a - b$, $2a - 3b$.

Zu § 72. Über Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

$a)$ $x = 3$. $b)$ $y = 4$. $c)$ $u = 15$. $d)$ $u = 9\frac{4}{9}$. $e)$ $x = 10$ $f)$ $x = 9$. $g)$ $x = 1$. $h)$ $x = 8$. $i)$ $y = 8$. $k)$ $x = 20$. $l)$ $x = -8$. $m)$ $y = -2$. $n)$ $x = 6$. $o)$ $x = 5$. $p)$ $x = 3$. $q)$ $x = 12$. $r)$ $x = 120$. $s)$ $x = \sqrt{27}$. $t)$ $x = 26$. $u)$ $x = 8$.

1. 12, 17, 22. 2. 120, 60. 3. 72. 4. 1200 *K*. 5. 240 Buchen- und 120 Lärchenstämme. 6. 56 *m*. 7. $1\frac{1}{5}$ Tage. 8. 30 Tage gearbeitet, 40 Tage ausgesetzt. 9. 5250 St. 10. 47400 Pflanzen.

B. Geometrie.

Zu § 28. Umfangs- und Flächenberechnungen.

1. $a)$ $U = 60\,m$, $F = 225\,m^2$; $b)$ $U = 95\cdot 12\,m$, $F = 565\,m^2\ 48\,dm^2\ 84\,cm^2$; $c)$ $U = 51^0\,2'$, $F = 164\,\square^0\ 25\,\square'$; $d)$ $U = 1\cdot 54\,m$, $F = 0\cdot 148225\,m^2$. 2. $a)$ $s = 5\cdot 85\,m$, $F = 34\cdot 2225\,m^2$; $b)$ $s = 4\cdot 725\,m$. $F = 22\cdot 325625\,m^2$; $c)$ $s = 8^0\,1'\,2''$, $F = 67\,\square^0\ 5\,\square'\ 52\,\square''$; $d)$ $s = 1\cdot 8\,m$, $F = 3\cdot 24\,m^2$. 3. $a)$ $s = 8\,m$, $U = 32\,m$; $b)$ $s = 394\,m$, $U = 1\cdot 576\,km$; $c)$ $s = 12\cdot 65'$, $U = 50\cdot 60'$; $d)$ $s = 0\cdot 5899\,m$, $U = 2\cdot 3596\,m$. 4. 4729·07 *K*. 5. $s = 1\,km\ 295\cdot 75\,m$, $F = 167\,ha\ 89\,a\ 68\cdot 0625\,m^2$. 6. $s = 14\cdot 25\,m$, $U = 57\cdot 00\,m$. 8. $8\,ha\ 54\,a\ 56\,m^2$. 9. $a)$ 7500 Saatplätze, $b)$ $675\,m^2$, den 0·0625ten Teil, $c)$ $2\cdot 4\,kg$. 10. $a)$ $U = 30\,m$, $F = 56\,m^2$; $b)$ $U = 21\cdot 04\,m$, $F = 26\cdot 3907\,m^2$; $c)$ $U = 12\cdot 2\,m$, $F = 9\cdot 10\,m^2$; $d)$ $U = 559\cdot 0\,m$, $F = 1\,ha\ 74\,a\ 18\cdot 66\,m^2$. 11. $a)$ $h = 5\,m$, $F = 611\cdot 5\,m^2$; $b)$ $h = 161\cdot 8625\,m$, $F = 82420\cdot 3850\,m^2$; $c)$ $h = 16\cdot 795\,m$, $F = 367\cdot 6425\,m^2$; $d)$ $h = 2\cdot 505\,m$, $F = 10\cdot 34565\,m^2$. 12. $a)$ $g = 22\cdot 8\,m$, $U = 70\cdot 6\,m$; $b)$ $g = 291\cdot 699\,m$, $U = 793\cdot 998\,m$; $c)$ $g = 5\cdot 945\,m$, $U = 18\cdot 03\,m$; $d)$ $g = 1\cdot 02826\,m$, $U = 2\cdot 8064\,m$. 13. $s = 103\cdot 72\,m$. 14. $370\cdot 71\,m^2$. 15. 3686·76 *kg*. 16. $a)$ 405 Schindeln, $b)$ 52 Reihen, $c)$ $144\,cm^2$, 21094 Schindeln. 17. 353·32 Latten. 18. 29·5 Bretter. 19. 765 : 737. 21. 8·3712 *ha*. 22. 144 Streifen, 7660·8 *m*, $2298\cdot 24\,m^2$, den 0·2303ten Teil, 19·35 *K*. 23. $U = 48\,dm$. 24. $s = 96\,cm$. 25. $U = 61\cdot 2\,m$, $F = 58\cdot 14\,m^2$. 26. $F = 117\,m^2$, $U = 44\cdot 4\,m$. 27. $U = 114\cdot 6\,m$. 28. $s = 74\,m$. 29. $s = 105\cdot 7\,m$, $s = 90\cdot 6\,m$. 30. $a)$ $F = 20\cdot 16\,m^2$, $b)$ $U = 21\cdot 6\,m$, 7·76 *K*, 62·64 *K*. 31. $a)$ $11573\cdot 70\,m^2$, $b)$ $2408\cdot 4\,m^2$. 32. $U = 43\cdot 6\,m$. 33. $a)$ $F = 3\cdot 91\,m^2$, $b)$ $F = 0\cdot 4556\,m^2$, $c)$ $F = 58\cdot 2651\,m^2$, $d)$ $F = 898$ [illegible] 12

52·5□″. 34. *a)* $h = 5{\cdot}74\ m$, *b)* $h = 1844{\cdot}65\ m$, *c)* $h = 6{\cdot}35\ dm$. 35. $s = 195{\cdot}12\ m$. 36. $F = 3182\ m^2$. 37. 1·1336 *m*. 38. 0·3752 *m*. 39. 13 *m*. 40. 11·92 *m*. 42. $U = 179{\cdot}18\ cm$, $h = 69{\cdot}3\ cm$. 43. $U = 25{\cdot}91\ m$. 44. 51·17 *K*. 46. 7 *ha* 40 *a* 4·9 m^2. 47. 34 *a* 78·4 m^2. 48. $h = 0{\cdot}77\ m$. 49. 393·52 *m*. 50. 400 dm^2. 51. 1175·44 m^2. 52. $U = 35\ dm$, $F = 84{\cdot}3045\ dm^2$; $U = 42\ dm$, $F = 127{\cdot}302\ dm^2$; $U = 56\ dm$, $F = 236{\cdot}5916\ dm^2$. 53. $F = 46{\cdot}7425\ m^2$, 48·8651 m^2. 54. 1076·09 m^2. 55. 25·12 *m*, 18·84 *dm*, 12·56 *mm*, 45·844 *m*, 138·16 *mm*. 56. 83·08 *K*. 57. 0·9236 *cm*, 5·9554 *dm*, 2·8343 *mm*, 3·7685 *m*. 58. 17·91 *cm*, 22·02 *cm*, 27·76 *cm*, 36·02 *cm*. 59. 0·7850 cm^2, 78·50 cm^2, 314 cm^2, 706·50 cm^2, 1256 cm^2, 1962·50 cm^2. 60. 803·84 cm^2, 94·985 dm^2, 254·34 mm^2, 9·0746 m^2. 61. 10·91 *mm*, 3·75 *cm*, 15·49 *m*, 6·5 *dm*. 62. 6·9 *m*, 6·81 *dm*, 7·2 *mm*. 63. 49 *cm*. 64. 59·19 cm^2. 65. 12·56 *cm*. 66. $141^0\ 6'\ 26{\cdot}3''$ a. T. 67. 11·26 *dm*. 68. 549·27 cm^2. 69. 3472 dm^2. 70. 181·44 cm^2. 71. 1 : 4. 72. 7165·61 : 5625 : 5400. 73. 653 : 737. 74. 32·97 *m*, 43·96 *m*, 54·1650 *m*, 48·984 *m*, 69·27625 *m*. 75. 14·885 *m*. 76. 978·895 dm^2. 2524·56 dm^2, 1554·30 dm^2, 6556·32 dm^2. 77. 29·86 *cm*.

Zu § 44. Körperberechnungen.

1. $O = 0{\cdot}0486\ m^2$, $C = 0{\cdot}729\ dm^3$; $O = 245{\cdot}76\ m^2$, $C = 262144\ dm^3$; $O = 1{\cdot}7785\ m^2$, $C = 161{\cdot}384\ dm^3$; $O = 315{\cdot}375\ m^2$, $C = 381078{\cdot}12\ dm^3$. 2. $s = 3\ m$, $C = 27\ m^3$; $s = 2{\cdot}8\ dm$, $C = 21{\cdot}952\ dm^3$; $s = 0{\cdot}7757\ m$, $C = 0{\cdot}4667\ m^3$; $s = 3{\cdot}67\ cm$, $C = 49{\cdot}430863\ cm^3$. 3. Kante = 12 *dm*, $O = 864\ dm^2$; Kante = 9·6 *m*, $O = 552{\cdot}96\ m^2$. 4. *a)* 25·45 *cm*, *b)* 3886·215 cm^2, *c)* 16484·0286 cm^3. 5. *a)* 595·914 dm^2. *b)* 345·420 dm^3. 6. $O = 289{\cdot}13\ dm^2$, $C = 269{\cdot}36\ dm^3$. 7. *a)* 0·1444 m^2. *b)* 0·38 *m*, *c)* 10·9288 m^2. 8. 68 dm^3. 9. 647·17 *K*. 10. 0·066826 m^3. 11. *a)* 24·688125 m^3. *b)* 0·064 *K*, *c)* 7·41 *K*, *d)* 493 Schiebtruhen. 12. 1·76 *m*. 13. 21·12 *rm*, 16·47 *fm*; 28·16 *rm*, 21·96 *fm*; 35·2 *rm*, 27·46 *fm*. 14. *a)* 1 *m*, *b)* 1·25 *m*, *c)* 1·76 *m*. 15. 525·9 m^3, 210·36 m^3, 1·04 *km*, 0·629 *km*. 16. 42·3225 *q*. 17. *a)* $37{\cdot}\dot{3}\ m^3$, *b)* $8{\cdot}31\dot{3}\ dm^3$, *c)* $23{\cdot}8\dot{3}\ cm^3$. 18. 174·3576 dm^2, 110·8608 dm^3. 19. 256 cm^2, 768 cm^2, 1930·87 cm^3. 20. $612^1/_4$ Platten. 21. 0·677 m^3. 22. 813·28 dm^2, 1520 dm^3. 23. 7·8611 m^3. 24. $O = 6{\cdot}9288\ m^2$, $C = 0{\cdot}9427\ m^3$; $O = 13{\cdot}8576\ m^2$, $C = 3{\cdot}7711\ m^3$; $O = 34{\cdot}6440\ m^2$, $C = 17{\cdot}4559\ m^3$; $O = 24\ m^2$, $C = 8\ m^3$; $O = 82{\cdot}584\ m^2$, $C = 61{\cdot}3049\ m^3$. 25. $G = 19{\cdot}625\ m^2$, $M = 188{\cdot}4\ m^2$, $O = 227{\cdot}65\ m^2$, $C = 235{\cdot}5\ m^3$; $G = 113{\cdot}04\ dm^2$, $M = 489{\cdot}84\ dm^2$, $O = 715{\cdot}92\ dm^2$, $C = 1469{\cdot}52\ dm^3$; $G = 42{\cdot}63\ cm^2$, $M = 208{\cdot}26\ cm$, $O = 293{\cdot}52\ cm^2$, $C = 383{\cdot}67\ cm^3$; $G = 985{\cdot}96\ mm^2$, $M = 890{\cdot}25\ mm^2$, $O = 2862{\cdot}17\ mm^2$, $C = 7887{\cdot}68\ mm^3$. 26. 18·35 m^3. 27. 26·69 m^3. 28. $4^m\ 43{\cdot}6''$. 29. 0·145112 *fm*, 39·98%. 30. 4·07 *K*. 31. 0·1975 m^3. 32. 0·186 m^3. 33. 220·51 *K*. 34. 1964·1328 cm^2, 3140 cm^3. 35. 0·562688 m^3. 36. 68·15 m^2. 37. 8·61 m^3. 38. 9 *m*. 39. 143·1840 dm^3. 40. 46 *hl* 98·25 *l*. 41. 113·04 dm^2, 113·04 dm^3. 42. 1·69 *m*, 20·21 m^3. 43. 40·54 dm^2. 44. *a)* 1·938636 m^3, 0·969318 m^3; *b)* 1·360248 m^3, 0·680124 m^3; *c)* 0·441562 m^3, 0·220781 m^3; *d)* 0·543652 m^3, 0·271826 m^3. 45. 2590·5 *kg*. 46. 452·83 dm^3. 47. 498·3 *l*. 48. 49·54 *rm*. 49. 605·88 *rm*. 51. 452·83 *kg*. 52. 473·76 *kg*. 53. 4 Pferde. 54. 3·03 *rm*.





